Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2002. Том 43, № 2

УДК 512.57

О НЕЗАВИСИМОСТИ ОТНОШЕНИЙ ЭПИМОРФНОСТИ И ВЛОЖИМОСТИ НА МНОГООБРАЗИИ ВСЕХ РЕШЕТОК

А. Г. Пинус, Я. Л. Мордвинов

Аннотация: Доказано, что любое дважды квазиупорядоченное множество изоморфно вложимо в двойной скелет многообразия всех решеток. Библиогр. 5.

При изучении строения многообразий универсальных алгебр существенную роль играют скелеты этих многообразий, изучение которых восходит к ряду работ А. Тарского. В работе [1] явно сформулированы понятия скелетов эпиморфности и вложимости многообразий универсальных алгебр. Если $\mathscr{M}$ — некоторое многообразие, то пусть $I\mathscr{M}$ является совокупностью типов изоморфизма $\mathscr{M}$-алгебр. На $I\mathscr{M}$ определим пару отношений квазипорядка $\leq$ и $\ll$: для $a, b \in I\mathscr{M}$ пусть $a \leq b$ ($a \ll b$) тогда и только тогда, когда алгебра $\mathscr{A}$ изоморфно вложима в алгебру $\mathscr{B}$ (алгебра $\mathscr{A}$ — гомоморфный образ алгебры $\mathscr{B}$), где $\mathscr{A}$ ($\mathscr{B}$) — алгебра типа изоморфизма $a(b)$. Квазиупорядоченный класс $\langle I\mathscr{M}; \leq\rangle$ ($\langle I\mathscr{M}; \ll\rangle$) называется *скелетом вложимости* (*скелетом эпиморфности*) многообразия $\mathscr{M}$, а дважды квазиупорядоченный класс $\langle I\mathscr{M}; \leq, \ll\rangle$ — *двойным скелетом* $\mathscr{M}$. Будем говорить, что отношения вложимости $\leq$ и эпиморфности $\ll$ *независимы* (*финитно независимы*) на многообразии $\mathscr{M}$, если любое (любое конечное) дважды квазиупорядоченное множество $\langle A; \leq_1, \leq_2\rangle$ изоморфно вложимо в двойной скелет многообразия $\mathscr{M}$. В работе [2] доказана финитная независимость отношений вложимости и эпиморфности на любом нетривиальном конгруэнц-дистрибутивном многообразии $\mathscr{M}$ со свойством продолжимости конгруэнций. Представляется естественным вопрос: в каких ситуациях можно говорить о большем, о независимости этих отношений. В данной работе доказывается соответствующий результат для многообразия всех решеток в предположении обобщенной континуум-гипотезы.

Теорема (ОКГ). *Отношения эпиморфности и вложимости независимы на многообразии всех решеток.*

Доказательство. Пусть $\langle A; \leq_1, \leq_2\rangle$ — произвольное дважды частично упорядоченное множество. Докажем изоморфную вложимость $\langle A; \leq_1, \leq_2\rangle$ в двойной скелет многообразия всех решеток. Пусть $|A| = k$ для некоторого кардинала k. Будем считать, что k не менее чем континуален. В работе [2] в предположении ОКГ доказано существование совокупности $\{L_i \mid i \in k\}$ мощности k k-плотных попарно невложимых друг в друга цепей L_i мощности k. Напомним, что цепь L называется k-плотной, если для любых $a, b \in L$ таких,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00571).

что $a < b$, интервал (a, b) цепи L имеет мощность, не меньшую чем k. Более того, цепи $\{L_i \mid i \in k\}$ таковы, что для любых $i \neq j$ и любых $a, b \in L_i$ если $a < b$, то интервал (a, b) цепи L_i не вложим в цепь L_j.

Пусть λ — кардинал, больший k, такой, что число различных кардиналов между k и λ равно k. Пусть λ^+ — следующий за λ кардинал и ω_α — начальный ординал мощности λ^+. Для любой решетки L через $L(\omega_\alpha + 1)$ обозначим решетку, получаемую из L подстановкой вместо любого элемента решетки L цепи порядкового типа $\omega_\alpha + 1$.

Для $P \subseteq k$ через R_p обозначим решетку, основное множество которой есть

$$\bigcup_{i \in P} L_i(\omega_\alpha + 1) \cup \{0, 1\}$$

(считаем, что $L_j(\omega_\alpha + 1) \cap L_i(\omega_\alpha + 1) = \varnothing$ для $i \neq j$ и $0, 1 \notin L_i(\omega_\alpha + 1)$). При этом $0(1)$ — наименьший (наибольший) элемент решетки R_p, а для элементов a, b из $L_i(\omega_\alpha + 1)$ $a < b$ в решетке R_p тогда и только тогда, когда $a < b$ в цепи $L_i(\omega_\alpha + 1)$, в то время как для $i \neq j$ и $a \in L_i(\omega_\alpha + 1)$, $b \in L_j(\omega_\alpha + 1)$ элементы a, b несравнимы в R_p. Пусть F — свободная k-порожденная решетка и $M_p = R_p \oplus F(\omega_\alpha + 1)$ — ординальная сумма решеток R_p и $F(\omega_\alpha + 1)$.

Для любых решеток L' и L'' пусть $L' \leq L''$ ($L' \equiv_{\leq} L''$) означает изоморфную вложимость решетки L' в решетку L'' (отношение $L' \leq L'' \& L'' \leq L'$), а $L' \ll L''$ ($L' \equiv_{\ll} L''$) — существование гомоморфизма решетки L'' на решетку L' (отношение $L' \ll L'' \& L'' \ll L'$).

Покажем, что для любых $P_1, P_2 \subseteq k$ имеет место отношение $M_{P_1} \equiv_{\ll} M_{P_2}$, а $M_{P_1} \leq M_{P_2}$ тогда и только тогда, когда $P_1 \subseteq P_2$. Действительно, так как $|L_i| \leq k$ и F — свободная k-порожденная решетка, то

$$M_P = R_P \oplus F(\omega_\alpha + 1) \equiv_{\ll} F(\omega_\alpha + 1)$$

для любого $P \subseteq k$ и тем самым $M_{P_1} \equiv_{\ll} M_{P_2}$ для любых $P_1, P_2 \subseteq k$. Если $P_1 \subseteq P_2$, то R_{P_1} вложима в R_{P_2} в силу построения и, значит, M_{P_1} вложима в M_{P_2}. Хорошо известно (см., к примеру, [3]), что свободная решетка F не содержит несчетных цепей, а значит, никакой не ординальный (т. е. не являющийся вполне упорядоченным множеством) интервал решетки M_P не вложим в решетку $F(\omega_\alpha + 1)$, т. е. если $i \in P_1 \backslash P_2$, то $L_i(\omega_\alpha + 1) \leq M_{P_1}$ и $L_i(\omega_\alpha + 1) \nleq M_{P_1}$. Тем самым вложимость решетки M_{P_1} в решетку M_{P_2} влечет включение $P_1 \subseteq P_2$.

Пусть $B = \{\mu - \text{кардинал} \mid k < \mu < \lambda\}$. В силу определения λ имеем $|B| = k$. Для любого кардинала μ через Part_μ обозначим решетку разбиений множества μ. Известно, что Part_μ — простая решетка. Для любого $P \subseteq B$ пусть

$$N_P = \prod_{\mu \in P} \mathrm{Part}\, \mu \times \mathrm{Part}\, \lambda.$$

В силу конгруэнц-дистрибутивности многообразия решеток и простоты решеток $\mathrm{Part}\, \mu$ для любых $P_1, P_2 \subseteq B$ отношение $N_{P_1} \ll N_{P_2}$ имеет место тогда и только тогда, когда $P_1 \subseteq P_2$. С другой стороны, очевидно, что для любого $P \subseteq B$

$$N_P \leq \mathrm{Part}\, \lambda, \quad (\mathrm{Part}\, \lambda)^k \leq \mathrm{Part}\, \lambda$$

и тем самым $N_{P_1} \equiv_{\ll} N_{P_2}$ для любых $P_1, P_2 \subseteq B$.

Для любых $P \subseteq k$, $Q \subseteq B$ решетку $S_{P,Q}$ определим как прямое произведение решеток M_P и N_P и покажем, что $S_{P_1,Q_1} \leq S_{P_2,Q_2}$ тогда и только тогда, когда $P_1 \subseteq P_2$, а $S_{P_1,Q_1} \ll S_{P_2,Q_2}$ тогда и только тогда, когда $Q_1 \subseteq Q_2$. Если

$P_1 \subseteq P_2$ ($Q_1 \subseteq Q_2$), то отношения $M_{P_1} \equiv_{\ll} M_{P_2}$, $M_{P_1} \leq M_{P_2}$ ($N_{Q_1} \equiv_{\leq} N_{Q_2}$, $N_{Q_1} \ll N_{Q2}$) очевидным образом влекут отношение $S_{P_1,Q_1} \leq S_{P_2,Q_2}(S_{P_1,Q_1} \ll S_{P_2,Q_2})$. Покажем обратное. Пусть

$$S_{P_1,Q_1} = M_{P_1} \times N_{Q_1} \ll S_{P_2,Q_2} = M_{P_2} \times N_{Q_2}.$$

В силу конгруэнц-дистрибутивности многообразия решеток и, значит, наличия для него свойства строгого утоньшения (см., к примеру, [4]) любой гомоморфизм h решетки $M_{P_2} \times N_{Q_2}$ на решетку $M_{P_1} \times N_{Q_2}$ является прямым произведением гомоморфизмов h_1 и h_2 решеток M_{P_2} и N_{Q_2} соответственно на некоторые решетки $U_1 \times V_1$ и $U_2 \times V_2$, где $U_1 \times U_2 \cong M_{P_1}$, $V_1 \times V_2 \cong N_{Q_1}$. Но конгруэнц-дистрибутивность решеток, простота решеток $\operatorname{Part}\mu$ и равенство $N_{Q_1} = \prod\limits_{\mu \in Q_1} \operatorname{Part}\mu \times \operatorname{Part}\lambda$ влекут то, что любой нетривиальный прямой сомножитель в прямом разложении решетки $N_{Q_1} = V_1 \times V_2$ включает в себя как собственный прямой сомножитель одну из решеток $\operatorname{Part}\mu$ (где $\mu \in Q_2$ или $\mu = \lambda$). Любая из последних решеток включает любую k^+-плотную цепь мощности k^+. В силу построения решетки M_{P_2} подобных цепей не содержат. Тем самым $|V_1| = 1$ и $V_2 = N_{Q_1}$. С другой стороны, решетка M_{P_1} (как ординальная сумма нетривиальных решеток) прямо неразложима, так что либо $|U_1| = 1$ и $U_2 = M_{P_1}$, либо $U_1 = M_{P_1}$ и $|U_2| = 1$. Первый случай невозможен, так как $|N_{Q_2}| < |M_{P_1}|$. Таким образом, отношение $S_{P_1,Q_1} \ll S_{P_2,Q_2}$ влечет отношения $M_{P_1} \ll M_{P_2}$ и $N_{Q_1} \ll N_{Q_2}$, а последнее, как доказано выше, включение $Q_1 \subseteq Q_2$.

Пусть теперь

$$S_{P_1,Q_1} = M_{P_1} \times N_{Q_1} \leq S_{P_2,Q_2} = M_{P_2} \times N_{Q_2}.$$

Поскольку $R_{P_1} \leq S_{P_1,Q_1}$ и $N_{Q_2} \equiv_{\leq} \operatorname{Part}\lambda$, то $R_{P_1} \leq M_{P_2} \times \operatorname{Part}\lambda$. Для любого $i \in P_1$ имеем $L_i(\omega_\alpha + 1) \leq R_{P_1}$ и $\omega_\alpha + 1 \nleq \operatorname{Part}\lambda$ (последнее ввиду того, что $|\omega_\alpha| = \lambda^+$, а любая цепь в $\operatorname{Part}\lambda$ имеет мощность, не превосходящую λ). В силу этих неравенств для любого $i \in P_1$ имеет место отношение $L_i \leq M_{P_2}$, которое в силу k-плотности цепей L_i и невложимости интервалов (a, b) в цепи L_i ни в какую цепь L_j при $j \neq k$ влечет включение $i \in P_2$. Таким образом, действительно отношение $S_{P_1,Q_1} \leq S_{P_2,Q_2}$ влечет включение $P_1 \subseteq P_2$.

Для любого множества C пусть $P(C)$ — совокупность всех подмножеств множества C. Согласно вложимости любого μ-элементного частичного порядка в частично упорядоченное множество $\langle P(C); \subseteq\rangle$, где $|C| = \mu$, найдутся изоморфные вложения f_1 частичного порядка $\langle A; \leq_1\rangle$ в $\langle P(k); \subseteq\rangle$ и f_2 частичного порядка $\langle A; \leq_2\rangle$ в $\langle P(B); \subseteq\rangle$.

Положим $f(a) = S_{f_1(a), f_2(a)}$ для $a \in A$. В силу доказанного выше о решетках $S_{P,Q}$ отображение f является изоморфным вложением дважды частично упорядоченного множества $\langle A; \leq_1, \leq_2\rangle$ в двойной скелет многообразия всех решеток.

Не представляет труда «размыть» вложения произвольных дважды частично упорядоченных множеств в двойной скелет многообразия всех решеток до вложений любых дважды квазиупорядоченных множеств в этот скелет с помощью перехода, к примеру, от самих решеток $S_{P,Q}$ к ординальным суммам этих решеток и достаточного числа попарно неизоморфных, но попарно вложимых друг в друга либо попарно эпиморфных друг другу довольно простых решеток, близких к цепям. Теорема доказана.

В связи с доказанной теоремой отметим, что ограничение многообразия всех решеток до совокупности счетных дистрибутивных делает невозможной даже финитную независимость отношений эпиморфности и вложимости на этой совокупности. Как доказано в [5], любая счетная дистрибутивная решетка ретрактивна, т. е. для любых не более чем счетных дистрибутивных решеток L_1, L_2 отношение $L_1 \ll L_2$ влечет отношение $L_1 \leq L_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пинус А. Г.* Об отношениях вложимости и эпиморфности на конгруэнц-дистрибутивных многообразиях // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 5. С. 588–607.

2. *Bonnet R.* Very strongly rigid Boolean algebras, continuum discrete set condition, countable antichain condition. I // Algebra Universalis. 1980. V. 11, N 3. P. 341–364.

3. *Freese R., Jezek J., Nation J. B.* Free lattices. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995.

4. *Jonsson B.* Congruence distributive varieties // Math. Japon. 1995. V. 42, N 2. P. 353–401.

5. *Пинус А. Г., Мордвинов Я. Л.* О скелетах многообразий решеток // Алгебра и теория моделей. 2. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999. С. 111–118.

Статья поступила 6 июня 2000 г.

Пинус Александр Георгиевич, Мордвинов Яков Леонидович
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru