Сибирский математический журнал
Июль—август, 2002. Том 43, № 4

УДК 517.53

АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА — ПАДЕ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. Н. Сорокин

Аннотация: Даны примеры корректно поставленных задач о совместных аппроксимациях Эрмита — Паде для рядов от двух переменных. Найдены формулы Родрига и интегральные представления решений. Изучается предельное распределение нулей соответствующих многочленов. Предложенные конструкции базируются, с одной стороны, на классических многочленах Аппеля, ортогональных в треугольнике, и, с другой стороны, на различных способах доказательства теоремы Апери об иррациональности числа $\zeta(3)$.

Ключевые слова: ортогональные многочлены, аппроксимация Эрмита — Паде многочлены Аппеля

§ 1. Введение

В теории ортогональных многочленов от нескольких переменных [1] наиболее яркий пример дают многочлены Аппеля, ортогональные в треугольнике [1, гл. III; 2, гл. 12; 3, гл. VI]. (Не ограничивая общности, будем рассматривать случай двух переменных.) Эти многочлены могут быть получены как решение задачи об аппроксимациях Паде [4, 5] для некоторого степенного ряда от двух переменных (см. § 2 настоящей работы).

С другой стороны, в последние годы бурно развивается теория совместных аппроксимаций Эрмита — Паде для функций одной переменной [5], которая берет свое начало от знаменитой работы Ш. Эрмита 1873 г. о трансцендентности числа e [6]. Эта конструкция состоит в том, что для данного набора степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_{j,m}}{z^{m+1}}, \quad j = 1, \dots, r,$$

и мультииндекса $(n_1, \dots, n_r)$ ищется ненулевой многочлен $Q(z)$ степени не выше $n_1 + \dots + n_r$ такой, что для некоторых многочленов $P_1(z), \dots, P_r(z)$ выполняются следующие интерполяционные условия:

$$Q(z) f_j(z) - P_j(z) = O(1/z^{n_j+1}), \quad j = 1, \dots, r,$$

(это аппроксимации второго типа), либо ненулевой набор $Q_1(z), \dots, Q_r(z)$ многочленов степени не выше $n_1, \dots, n_r$ соответственно такой, что для некоторого многочлена $P(z)$ выполняется условие

$$Q_1(z) f_1(z) + \dots + Q_r(z) f_r(z) - P(z) = O(1/z^{n_1+\dots+n_r+r})$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–01251, 00–15–96132, 01–01–00738) и INTAS (код проекта 2000–272).

(это аппроксимации первого типа). Для функций нескольких переменных аналогичной теории не построено и, более того, не известно ни одного примера совместных аппроксимаций.

Значительный интерес представляют так называемые semi-классические случаи [7], которые неформально можно определить как задачи, допускающие формулу Родрига. Этот интерес обусловлен их многочисленными приложениями в теории чисел, математической и теоретической физике и в других областях.

Мы заметили, что аналогичная теория может быть построена и для функций нескольких переменных. В работе рассмотрен фрагмент этой теории, связанный с обобщениями многочленов Аппеля. Такой выбор объясняется нашим интересом к приложениям аппроксимаций Эрмита — Паде в теории диофантовых приближений. А именно, в работе [8] Ф. Бекерс предложил изящную конструкцию для доказательства теоремы Р. Апери [9] об иррациональности значения дзета-функции Римана $\zeta(3)$. Он построил матричные аппроксимации Эрмита — Паде для полилогарифмов, связанные с обобщениями многочленов Лежандра.

В настоящей работе мы построим аналогичные аппроксимации для функций двух переменных.

§ 2. Аппроксимации Паде гипергеометрического ряда от двух переменных

2.1. В этом параграфе мы рассмотрим интерполяционную задачу, приводящую к классическим многочленам Аппеля, изучение совместных обобщений которой и составляет содержание настоящей работы.

Определим следующую функцию двух комплексных переменных:

$$E(z,w)=\iint\limits_{\Delta}\frac{dxdy}{(z-x)(w-y)}, \tag{2.1}$$

где $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y>0,\ x+y<1\}$ — треугольник на плоскости. Естественной областью голоморфности функции (2.1) будет область

$$\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 : z\notin[0,1]\wedge w\notin[0,1]\}. \tag{2.2}$$

В частности, функция (2.1) голоморфна в окрестности бесконечности, а именно, она разлагается в степенной ряд

$$E(z,w)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_{l,m}}{z^{l+1}w^{m+1}}, \tag{2.3}$$

сходящийся в области

$$\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 : |z|>1\wedge|w|>1\}. \tag{2.4}$$

Коэффициенты ряда (2.3) суть степенные моменты меры Лебега в треугольнике Δ:

$$c_{l,m}=\iint\limits_{\Delta}x^ly^m\,dxdy,$$

которые вычисляются по формуле

$$c_{l,m}=\frac{l!m!}{(l+m+2)!}.$$

Таким образом, (2.3) — это гипергеометрический ряд от двух переменных [3].

2.2. Будем использовать следующие обозначения. Если

$$F(z,w)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{F_{l,m}}{z^{l+1}w^{m+1}} \tag{2.5}$$

— произвольный формальный ряд с комплексными коэффициентами, то $\{F\}_{l,m}=F_{l,m}$ — его коэффициенты и

$$\{F\}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{F_{l,m}}{z^{l+1}w^{m+1}}$$

— так называемая дробная часть этого ряда.

Определим на целочисленной решетке множества

$$\mathbb{T}_n=\bigl\{(l,m)\in\mathbb{Z}_+^2 : l+m\le 2n\bigr\}$$

и

$$\mathbb{T}_n^*=\mathbb{T}_n\setminus\{(n,n)\},$$

где n — целое неотрицательное число.

Поставим следующую интерполяционную задачу.

Задача 1. *Требуется найти не равный тождественно нулю многочлен от двух переменных $A_n(z,w)$ степени не выше $2n$ (по совокупности переменных) такой, что*

$$\{A_nE\}_{l,m}=0,\quad (l,m)\in\mathbb{T}_n^*. \tag{2.6}$$

Условия (2.6) представляют собой систему N_n-1 линейных однородных уравнений относительно $N_n=(n+1)(2n+1)$ неизвестных коэффициентов многочлена A_n. Поэтому нетривиальное решение задачи существует. Из позитивности меры Лебега вытекает единственность решения (с точностью до нормировки). Многочлен A_n удовлетворяет следующим соотношениям ортогональности:

$$\iint\limits_{\Delta}A_n(x,y)x^ly^m\,dxdy=0,$$

если $0\le l\le n-1$ или $0\le m\le n-1$. При этом справедлива формула Родрига

$$A_n(x,y)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}x^n\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial y^n}y^n(1-x-y)^{2n}.$$

Функции второго рода

$$R_n=\{A_nE\}$$

имеют более сложную структуру, чем в случае одной переменной, а именно

$$R_n(z,w)=A_n(z,w)E(z,w)+B_n^z(z,w)e(z)+B_n^w(z,w)e(w)+C_n(z,w),$$

где $B_n^z(z,w)$, $B_n^w(z,w)$ и $C_n(z,w)$ — некоторые многочлены степени не выше $2n$, $2n$ и $2n-1$ соответственно, и

$$e(z)=\int_0^1\frac{dx}{z-x}.$$

Многочлены A_n называются *многочленами Аппеля* и представляют собой двумерный аналог классических многочленов Лежандра, ортогональных по мере Лебега на отрезке $[0,1]$ и являющихся знаменателями Паде логарифмической функции $e(z)$, двумерным аналогом которой служит функция $E(z,w)$.

§ 3. Аппроксимации Эрмита — Паде второго типа

3.1. Определим следующие функции:

$$E^{\sigma,\tau}(z,w)=\iint\limits_{\Delta}\frac{\ln^\sigma\frac{1}{x}\ln^\tau\frac{1}{y}}{(z-x)(w-y)}\,dxdy, \tag{3.1}$$

где $\sigma=0,1$ и $\tau=0,1$, естественной областью голоморфности каждой из которых служит область (2.2). При этом $E^{0,0}=E$.

Предложение 1. *В области* (2.4) *каждая из функций* (3.1) *раскладывается в степенной ряд*

$$E^{\sigma,\tau}(z,w)=\sum_{l=0}^\infty\sum_{m=0}^\infty\frac{c_{l,m}^{\sigma,\tau}}{z^{l+1}w^{m+1}}$$

с коэффициентами

$$c_{l,m}^{0,0}=\frac{l!m!}{(l+m+2)!}, \tag{3.2a}$$

далее,

$$c_{l,m}^{1,0}=c_{l,m}^{0,0}d_{l,m},\quad c_{l,m}^{0,1}=c_{l,m}^{0,0}d_{m,l}, \tag{3.2b}$$

$$c_{l,m}^{1,1}=c_{l,m}^{0,0}\biggl(d_{l,m}d_{m,l}-\sum_{k=l+m+3}^\infty\frac{1}{k^2}\biggr), \tag{3.2c}$$

где

$$d_{l,m}=\sum_{k=l+1}^{l+m+2}\frac{1}{k}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Вычислим интеграл Меллина

$$\mathscr{M}(s,t)=\iint\limits_{\Delta}x^{s-1}y^{t-1}\,dxdy,\quad s>0,\ t>0.$$

Имеем

$$\mathscr{M}(s,t)=\int_0^1x^{s-1}\,dx\int_0^{1-x}y^{t-1}\,dy=\frac{1}{t}\int_0^1x^{s-1}(1-x)^t\,dx=\frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t+1)},$$

где Γ — гамма-функция. Поскольку

$$c_{l,m}^{\sigma,\tau}=\iint\limits_{\Delta}x^ly^m\ln^\sigma\frac{1}{x}\ln^\tau\frac{1}{y}\,dxdy,$$

то

$$c_{l,m}^{\sigma,\tau}=\Bigl(-\frac{\partial}{\partial s}\Bigr)^\sigma\Bigl(-\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)^\tau\mathscr{M}(s,t)\Big|_{s=l+1,t=m+1}.$$

Следовательно,

$$c_{l,m}^{0,0}=\frac{\Gamma(l+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(l+m+3)}=\frac{l!m!}{(l+m+2)!}.$$

Далее,

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathscr{M}(s,t)=\mathscr{M}(s,t)\biggl\{\frac{\partial}{\partial s}\ln\Gamma(s)-\frac{\partial}{\partial s}\ln\Gamma(s+t+1)\biggr\},$$

что равно

$$\mathscr{M}(s,t)\{\psi(s)-\psi(s+t+1)\},$$

где ψ — пси-функция (логарифмическая производная гамма-функции [2, гл. 1]). По формуле приведения для пси-функции имеем

$$c^{1,0}_{l,m}=c^{0,0}_{l,m}\{\psi(l+m+2)-\psi(l+1)\}=c^{0,0}_{l,m}\left\{\frac{1}{l+m+2}+\dots+\frac{1}{l+1}\right\}.$$

Аналогичным образом получается формула для $c^{0,1}_{l,m}$. Наконец,

$$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\mathscr{M}(s,t)=\mathscr{M}(s,t)\{\psi(s)-\psi(s+t+1)\}\{\psi(t)-\psi(s+t+1)\}\\ -\mathscr{M}(s,t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(s+t+1),$$

при этом

$$\frac{d}{dz}\psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}.$$

Отсюда и получается выражение для $c^{1,1}_{l,m}$.

Формулы (3.2) и (3.3) доказаны. $\square$

Обозначим через $\varepsilon(z)$ главную ветвь функции $\ln\frac{1}{z}$ в области $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. Построим следующую комбинацию функций (3.1):

$$\mathscr{E}(z,w)=E^{1,1}(z,w)-\varepsilon(z)E^{0,1}(z,w)-\varepsilon(w)E^{1,0}(z,w)+\varepsilon(z)\varepsilon(w)E^{0,0}(z,w).$$

Функция $\mathscr{E}(z,w)$ голоморфна в области

$$\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 : z\notin(-\infty,0]\wedge w\notin(-\infty,0]\}. \tag{3.4}$$

Действительно, она может быть записана в виде

$$\mathscr{E}(z,w)=\iint\limits_{\Delta}\frac{\varepsilon(\frac{x}{z})\varepsilon(\frac{y}{w})}{(z-x)(w-y)}\,dxdy.$$

3.2. Пусть F — произвольный ряд вида (2.5). Любой ряд F^* с той же дробной частью, что ряд F, будем называть *исправлением ряда* F.

Поставим следующую задачу.

Задача 2. *Требуется найти многочлен $A_n(z,w)$ такой, что*

1) $\deg A_n\le 2n$ *и* $A_n\not\equiv 0$;

2) *для каждой пары индексов σ, τ (где $\sigma=0,1$ и $\tau=0,1$) существует исправление $E^{\sigma,\tau}_n(z,w)$ ряда*

$$(1-z-w)^{2n}A_n(z,w)E^{\sigma,\tau}(z,w), \tag{3.5}$$

для которого

(a) *функция*

$$R^{\sigma,\tau}_n(z,w)=\frac{E^{\sigma,\tau}_n(z,w)}{(1-z-w)^{2n}}$$

голоморфна в окрестности бесконечности,

(b) $\left\{R^{\sigma,\tau}_n\right\}_{l,m}=0$, *если $l<0$ или $m<0$,*

(c) $\left\{R^{\sigma,\tau}_n\right\}_{l,m}=0$, *если* $(l,m)\in\mathbb{T}^*_n$;

3) *функция*

$$\mathscr{R}_n(z,w) = R_n^{1,1}(z,w) - \varepsilon(z)R_n^{0,1}(z,w) - \varepsilon(w)R_n^{1,0}(z,w) + \varepsilon(z)\varepsilon(w)R_n^{0,0}(z,w)$$

голоморфна в области (3.4).

Обозначим через

$$(f*g)(x) = \int_x^1 f(\xi)g\left(\frac{x}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi}$$

свертку Меллина. Определим функцию

$$\varepsilon_n(x) = (1-x)^n * (1-x)^n, \quad x \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \tag{3.6}$$

Она имеет вид

$$\varepsilon_n(x) = \alpha_n(x)\varepsilon(x) + \beta_n(x),$$

где α_n и β_n — многочлены степени n, при этом

$$\alpha_n(x) = (1-x)^n \circ (1-x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 x^k$$

— композиция по Адамару. С другой стороны,

$$\varepsilon_n(x) = O((1-x)^{2n+1}), \quad x \to 1.$$

Следовательно, $\varepsilon_n(x)$ — функция Лежандра второго рода, т. е. решение задачи об аппроксимациях Паде логарифма $\varepsilon(x)$ с центром разложения в точке $x = 1$. Отметим также очевидную формулу

$$\frac{\varepsilon_n(x)}{(1-x)^{2n+1}} = \frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}x^n\,\frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,\frac{\varepsilon(x)}{1-x}. \tag{3.7}$$

Предложение 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Решение задачи* 2 *существует и единственно* (*с точностью до нормировки*).

2. *Многочлены A_n могут быть определены формулой Родрига*

$$A_n(x,y) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}x^n\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial y^n}y^n\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}x^n\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial y^n}y^n(1-x-y)^{2n}. \tag{3.8}$$

3. *Имеет место интегральное представление*

$$\mathscr{R}_n(z,w) = \iint_\Delta \frac{z^n w^n x^n y^n (1-x-y)^{2n}}{(z-x)^{2n+1}(w-y)^{2n+1}}\varepsilon_n\left(\frac{x}{z}\right)\varepsilon_n\left(\frac{y}{w}\right)dxdy. \tag{3.9}$$

Доказательство. Достаточно доказать существование решения (единственность очевидна). Покажем, что многочлен, определенный формулой (3.8), удовлетворяет условиям задачи 2. Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} A_n(z,w)E^{\sigma,\tau}(z,w) &= \iint_\Delta \frac{A_n(z,w)-A_n(x,w)}{(z-x)(w-y)}\ln^\sigma\frac{1}{x}\ln^\tau\frac{1}{y}\,dxdy \\ &+ \iint_\Delta \frac{A_n(x,w)-A_n(x,y)}{(z-x)(w-y)}\ln^\sigma\frac{1}{x}\ln^\tau\frac{1}{y}\,dxdy \\ &+ \iint_\Delta \frac{A_n(x,y)}{(z-x)(w-y)}\ln^\sigma\frac{1}{x}\ln^\tau\frac{1}{y}\,dxdy. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Первые два слагаемых в правой части равенства (3.10) имеют нулевую дробную часть. Следовательно,

$$\{A_n\mathscr{E}\} = \iint\limits_{\Delta} A_n(x,y)\frac{\varepsilon(\frac{x}{z})}{z-x}\frac{\varepsilon(\frac{y}{w})}{w-y}\,dxdy \tag{3.11}$$

(операция выделения дробной части применяется почленно). Подставим в (3.11) формулу Родрига (3.8) и выполним интегрирование по частям. Появляющиеся при этом внеинтегральные члены будут удовлетворять определению исправления ряда (3.5) и поэтому не войдут в $\mathscr{R}_n$. Тогда, учитывая (3.7), получим интегральное представление (3.9). Но функция, определенная этой формулой, удовлетворяет условиям (a), (b), (c) и 3). $\square$

3.3. Исследуем асимптотическое поведение величин $\mathscr{R}_n(z,w)$ и $A_n(z,w)$ при $n\to\infty$. Применим метод перевала (или эквивалентный ему метод Дарбу). Для величин $\mathscr{R}_n$ имеет место интегральное представление (3.9), а для величин A_n — формула Родрига (3.8), которая также может быть переписана в интегральной форме с использованием формулы Коши для производных. Остается лишь найти критические точки подынтегральной функции. Безусловно, наиболее сложная часть решения задачи состоит в отборе тех критических точек, которые действительно вносят вклад в асимптотику интегралов. В нашей задаче этот вопрос легко решается в окрестности бесконечности, далее используется аналитическое продолжение. Возникающие при этом трудности носят чисто технический характер, а именно сводятся к выделению однозначных ветвей конкретных алгебраических функций. Например, этот метод успешно применялся в работе [10], где впервые изучалось асимптотическое поведение совместных аппроксимаций Эрмита — Паде.

Перейдем к вычислениям. Проведем в пространстве $\mathbb{C}^2$ комплексную плоскость

$$w=\lambda z. \tag{3.12}$$

Рассмотрим лишь вещественные положительные значения параметра λ. Этот случай наиболее важен для приложений и допускает простую геометрическую интерпретацию. Положим

$$\omega_R=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0].$$

Обозначим

$$\begin{cases} p=\sqrt{z}, & z\in\omega_R, \quad \operatorname{Re}p>0,\\ q=\sqrt{w}, & w\in\omega_R, \quad \operatorname{Re}q>0.\end{cases} \tag{3.13}$$

Рассмотрим функцию двух комплексных переменных

$$\Phi(\xi,\eta|p,q)=\frac{\xi\eta(1-\xi^2-\eta^2)}{(p+\xi)(q+\eta)}, \tag{3.14}$$

зависящую от двух комплексных параметров p и q. Напишем систему уравнений, определяющую критические точки функции (3.14):

$$\begin{cases} p(1-\xi^2-\eta^2)=2\xi^2(p+\xi),\\ q(1-\xi^2-\eta^2)=2\eta^2(q+\eta),\end{cases} \tag{3.15}$$

а также уравнение

$$9(p+\xi)(q+\eta)=pq \tag{3.16}$$

для нахождения особых точек решений системы (3.15). Существует единственная аналитическая кривая

$$(z_*(\lambda), w_*(\lambda)), \quad \lambda > 0,$$

проходящая через точку $z_*(1) = 27/64$ и удовлетворяющая системе (3.15), (3.16) с учетом (3.12), (3.13). Эта кривая лежит в треугольнике Δ; ее концы, отвечающие предельным значениям $\lambda \to 0+$ и $\lambda \to +\infty$, находятся в точках $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно.

В окрестности точки $p = \infty$ система (3.15) имеет девять голоморфных решений. Рассмотрим два из них, которые при $p \to \infty$ имеют следующую асимптотику:

$$\begin{cases} \xi_R(p) \to 1/2, \\ \eta_R(p) \to 1/2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \xi_A(p) \sim a(\lambda)p, \\ \eta_A(p) \sim b(\lambda)p, \end{cases}$$

где $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ суть функции, голоморфные в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ и такие, что $a(1) = b(1) = -2$. Положим

$$\Phi_J(z) = \Phi(\xi_J(\sqrt{z}), \eta_J(\sqrt{z}) | \sqrt{z}, \sqrt{\lambda z}), \quad J = R, A. \tag{3.17}$$

Тогда функция $\Phi_R(z)$ аналитически продолжается до функции, голоморфной в области ω_R, а функция $\Phi_A(z)$ аналитически продолжается в область

$$\omega_A = \mathbb{C} \setminus [0, z_*].$$

Предложение 3. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Равномерно внутри области* ω_R

$$\lim_{n\to\infty} |\mathscr{R}_n(z, \lambda z)|^{1/n} = |\Phi_R(z)|^2.$$

2. *Равномерно внутри области* ω_A

$$\lim_{n\to\infty} |A_n(z, \lambda z)|^{1/n} = |\Phi_A(z)|^2.$$

3. *Нули многочленов* $A_n(z, \lambda z)$ *принадлежат отрезку* $[0, z_*]$, *который служит предельным множеством всех этих нулей.*

Доказательство. Из (3.6) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n(x)^{1/n} = (1 - \sqrt{x})^2, \quad x \in \omega_R,\ \operatorname{Re}\sqrt{x} > 0. \tag{3.18}$$

Из асимптотической формулы (3.18) и интегрального представления (3.9) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} |\mathscr{R}_n(z, w)|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left| \iint\limits_{\Delta} \frac{x^n y^n (1 - x - y)^{2n}\, dx dy}{(\sqrt{z} + \sqrt{x})^{2n} (\sqrt{w} + \sqrt{y})^{2n}} \right|^{1/n}.$$

Этот предел равен квадрату модуля одного из критических значений функции (3.14). Нужные нам критические значения были отобраны выше.

Исследование многочленов A_n выполняется аналогичным образом с применением формулы Родрига (3.8). $\square$

Отметим, что при каждом $\lambda > 0$ нули многочленов Аппеля $A_n(z, \lambda z)$ из § 2 лежат на отрезке $[0, \frac{1}{\lambda+1}]$ и в пределе заполняют весь этот отрезок. Для многочленов A_n из § 3 мы имеем так называемый эффект сталкивания нулей (зарядов) (см. [11]).

§ 4. Аппроксимации Эрмита — Паде первого типа

4.1. Определим функцию

$$D(z,w)=\iint\limits_{\Delta}\frac{\ln\frac{1}{x+y}}{(z-x)(w-y)}\,dxdy, \tag{4.1}$$

естественной областью голоморфности которой служит область (2.2).

Предложение 4. *В области* (2.4) *функция* (4.1) *раскладывается в степенной ряд*

$$D(z,w)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_{l,m}}{z^{l+1}w^{m+1}},$$

где

$$b_{l,m}=\frac{l!m!}{(l+m+2)!(l+m+2)}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Вычислим интеграл Меллина

$$\mathscr{M}(s,t)=\iint\limits_{\Delta}x^{s-1}y^{t-1}\ln\frac{1}{x+y}\,dxdy=\int\limits_0^1 x^{s-1}\,dx\int\limits_0^{1-x}y^{t-1}\ln\frac{1}{x+y}\,dy,$$

где $s>0$, $t>0$. Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^{1-x}y^{t-1}\ln\frac{1}{x+y}\,dy=\frac{1}{t}\int\limits_0^{1-x}\frac{y^t\,dy}{x+y}.$$

После замены переменной $u=x+y$ последний интеграл примет вид свертки Меллина:

$$\frac{1}{t}\int\limits_x^1(u-x)^t\,\frac{du}{u}=\frac{1}{t}(1-x)^t*x^t.$$

По теореме о свертке

$$\mathscr{M}(s,t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^1 x^{s-1}(1-x)^t\,dx\int\limits_0^1 x^{s-1}x^t\,dx=\frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{(s+t)\Gamma(s+t+1)},$$

откуда и следует (4.2). □

4.2. Поставим следующую задачу.

Задача 3. *Требуется найти многочлены $A_n(z,w)$ и $B_n(z,w)$ такие, что*
1) *эти многочлены не равны тождественно нулю одновременно, и*

$$\deg A_n\le 2n,\quad \deg B_n\le 4n;$$

2) *существует исправление $D_n(z,w)$ ряда*

$$(z+w)^{2n}A_n(z,w)D(z,w)+B_n(z,w)E(z,w),$$

для которого

а) *функция*
$$R_n(z,w)=\frac{D_n(z,w)}{(z+w)^{2n}}$$
голоморфна в окрестности бесконечности,

b) *если* $l<0$ *или* $m<0$, *то* $\{R_n\}_{l,m}=0$,

c) *если* $(l,m)\in\mathbb{T}_n^*$, *то* $\{R_n\}_{l,m}=0$;

3) *функция*
$$\lambda_n(x,y)=A_n(x,y)\varepsilon(x+y)+\frac{B_n(x,y)}{(x+y)^{2n}}$$
такова, что функция
$$\frac{\lambda_n(x,y)}{(1-x-y)^{2n+1}}$$
голоморфна в области
$$\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 : x+y\notin(-\infty,0]\}. \tag{4.3}$$

Аналогично предложению 2 доказывается

Предложение 5. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Решение задачи 3 существует и единственно (с точностью до нормировки).*

2. *Многочлены* A_n *и* B_n *могут быть определены формулой Родрига*
$$\lambda_n(x,y)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}x^n\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial y^n}y^n\varepsilon_{2n}(x+y).$$

3. *Имеет место интегральное представление*
$$R_n(z,w)=\iint\limits_{\Delta}\frac{x^ny^n\varepsilon_{2n}(x+y)}{(z-x)^{n+1}(w-y)^{n+1}}\,dxdy.$$

4.3. Исследуем асимптотическое поведение многочленов $A_n(z,w)$ при $n\to\infty$. Проведем в пространстве $\mathbb{C}^2$ комплексную плоскость (3.12), где, как и раньше, считаем $\lambda>0$.

Рассмотрим функцию двух комплексных переменных
$$\Phi(x,y|z,w)=\frac{xy(1+\sqrt{x+y})^4}{(z-x)(w-y)}, \tag{4.4}$$
определенную в области (4.3), при этом $\operatorname{Re}\sqrt{x+y}>0$. Напишем систему уравнений
$$d\Phi=0, \tag{4.5}$$
определяющую критические точки функции (4.4). В разрезанной окрестности бесконечности существует и единственно голоморфное решение системы (4.5) (с учетом (3.12)) такое, что при $z\to\infty$
$$x_A(z)\sim a(\lambda)z,\quad y_A(z)\sim b(\lambda)z,$$
где $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ суть функции, голоморфные в области $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ такие, что $a(1)=b(1)=2$. Положим
$$\Phi_A(z)=\Phi(x_A(z),y_A(z)|z,\lambda z). \tag{4.6}$$
Тогда функция (4.6) аналитически продолжается в область $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. Аналогично предложению 3 доказывается

Предложение 6. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Равномерно внутри области* $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

$$\lim_{n\to\infty}|A_n(z,\lambda z)|^{1/n}=|\Phi_A(z)|.$$

2. *Все нули многочленов* $A_n(z,\lambda z)$ *лежат на промежутке* $(-\infty,0]$, *который служит предельным множеством этих нулей.*

§ 5. Матричные аппроксимации Эрмита — Паде

5.1. Определим функции

$$D^{\sigma,\tau}(z,w)=\iint\limits_{\Delta}\frac{\ln^{\sigma}\frac{1}{x}\ln^{\tau}\frac{1}{y}}{(z-x)(w-y)}\ln\frac{1}{x+y}\,dxdy,\quad \sigma,\tau=0,1, \tag{5.1}$$

естественной областью голоморфности каждой из которых служит область (2.2). При этом $D^{0,0}=D$.

Заметим, что функция

$$\mathscr{D}(z,w)=D^{1,1}(z,w)-\varepsilon(z)D^{0,1}(z,w)-\varepsilon(w)D^{1,0}(z,w)+\varepsilon(z)\varepsilon(w)D^{0,0}(z,w)$$

имеет интегральное представление

$$\mathscr{D}(z,w)=\iint\limits_{\Delta}\frac{\varepsilon(\frac{x}{z})\varepsilon(\frac{y}{w})}{(z-x)(w-y)}\varepsilon(x+y)\,dxdy$$

и тем самым голоморфна в области (3.4).

Предложение 7. *В области* (2.4) *функции* (5.1) *раскладываются в степенные ряды*

$$D^{\sigma,\tau}(z,w)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_{l,m}^{\sigma,\tau}}{z^{l+1}w^{m+1}},$$

где коэффициенты $b_{l,m}^{0,0}=b_{l,m}$ *определяются формулой* (4.2),

$$b_{l,m}^{1,0}=b_{l,m}\biggl(d_{l,m}+\frac{1}{l+m+2}\biggr),\quad b_{l,m}^{0,1}=b_{l,m}\biggl(d_{m,l}+\frac{1}{l+m+2}\biggr),$$

а также

$$b_{l,m}^{1,1}=b_{l,m}\Biggl(\biggl(d_{l,m}+\frac{1}{l+m+2}\biggr)\biggl(d_{m,l}+\frac{1}{l+m+2}\biggr)+\frac{1}{(l+m+2)^2}-\sum_{k=l+m+3}^{\infty}\frac{1}{k^2}\Biggr),$$

при этом числа $d_{l,m}$ *определяются формулой* (3.3).

Доказательство этого предложения вытекает из доказательств предложений 1 и 4.

5.2. Поставим следующую задачу.

Задача 4. *Требуется найти многочлены* $A_n(z,w)$ *и* $B_n(z,w)$ *такие, что*

1) *эти многочлены не равны тождественно нулю одновременно, и*

$$\deg A_n\le 2n,\quad \deg B_n\le 6n;$$

2) *для любых* $\sigma=0,1$ *и* $\tau=0,1$ *существует исправление* $D_n^{\sigma,\tau}(z,w)$ *ряда*

$$(z+w)^{4n}A_n(z,w)D^{\sigma,\tau}(z,w)+B_n(z,w)E^{\sigma,\tau}(z,w),$$

для которого

a) *функция*

$$R_n^{\sigma,\tau}(z,w) = \frac{D_n^{\sigma,\tau}(z,w)}{(z+w)^{4n}}$$

голоморфна в окрестности бесконечности,

b) *если* $l < 0$ *или* $m < 0$, *то* $\{R_n^{\sigma,\tau}\}_{l,m} = 0$,

c) *если* $(l,m) \in \mathbb{T}_n^*$, *то* $\{R_n^{\sigma,\tau}\}_{l,m} = 0$;

3) *имеем* $B_n(z, 1-z) \equiv 0$.

Введем обозначения

$$\lambda_n(x,y) = A_n(x,y)\varepsilon(x+y) + \frac{B_n(x,y)}{(x+y)^{4n}}$$

и

$$\mathscr{R}_n(z,w) = R_n^{1,1}(z,w) - \varepsilon(z)R_n^{0,1}(z,w) - \varepsilon(w)R_n^{1,0}(z,w) + \varepsilon(z)\varepsilon(w)R_n^{0,0}(z,w).$$

Как и выше, легко доказывается

Предложение 8. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Решение задачи* 4 *существует и единственно* (*с точностью до нормировки*).

2. *Многочлены* A_n *и* B_n *могут быть определены формулой Родрига*

$$\lambda_n(x,y) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}x^n\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial y^n}y^n\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}x^n\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial y^n}y^n\varepsilon_{2n}(x+y).$$

3. *Имеет место интегральное представление*

$$\mathscr{R}_n(z,w) = \iint\limits_{\Delta} \frac{z^n w^n x^n y^n \varepsilon_{2n}(x+y)}{(z-x)^{2n+1}(w-y)^{2n+1}}\varepsilon_n\left(\frac{x}{z}\right)\varepsilon_n\left(\frac{y}{w}\right)dxdy.$$

5.3. Будем изучать асимптотическое поведение при $n \to \infty$ многочленов $A_n(z,w)$ и функций $\mathscr{R}_n(z,w)$ в плоскости (3.12), где $\lambda > 0$.

Рассмотрим функцию двух комплексных переменных

$$\Phi(\xi,\eta|p,q) = \frac{\xi\eta(1-\sqrt{\xi^2+\eta^2})^2}{(p+\xi)(q+\eta)},$$

где параметры p и q связаны с переменными z и w соотношениями (3.13). В окрестности точки $p=\infty$ выделим решения системы $d\Phi = 0$, имеющие асимптотику

$$\xi_R \to \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \eta_R \to \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

при этом

$$\sqrt{\xi_R^2+\eta_R^2} \to \frac{1}{2},$$

а также

$$\xi_A \sim a(\lambda)p, \quad \eta_A \sim b(\lambda)p,$$

где $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ суть функции, голоморфные в области $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, такие, что $a(1) = b(1) = -2$, и при этом если $\lambda = 1$, то

$$\sqrt{\xi_A^2+\eta_A^2} \sim -2\sqrt{2}p.$$

Определим функции $\Phi_R(z)$ и $\Phi_A(z)$ формулой (3.17). Они аналитически продолжаются в область $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.

Предложение 9. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Равномерно внутри области* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$$\lim_{n\to\infty} |\mathscr{R}_n(z, \lambda z)|^{1/n} = |\Phi_R(z)|^2, \quad \lim_{n\to\infty} |A_n(z, \lambda z)|^{1/n} = |\Phi_A(z)|^2.$$

2. *Нули многочленов* $A_n(z, \lambda z)$ *лежат на промежутке* $(-\infty, 0]$, *который служит предельным множеством всех этих нулей.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суетин П. К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. М.: Наука, 1988.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. Т. 2.
3. *Appell P., Kampe de Feriet J.* Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques, polynomes d'Hermite. Paris: Gauthier-Villars, 1926.
4. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.
5. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.
6. *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle // C. R. Acad. Sci. Paris. 1873. T. 77. P. 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.
7. *Marcellan F., Rocha I. A.* On semiclassical linear functionals: integral representations // J. Comput. Appl. Math. 1995. V. 57. P. 239–249.
8. *Beukers F.* Pade approximations in number theory // Lecture Notes Math. 1981. N 888. P. 90–99.
9. *Apery R.* Irrationalite de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. Journees arithmetiques de Luminy // Asterisque. 1979. V. 61. P. 11–13.
10. *Калягин В. А.* Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности // Мат. сб. 1979. Т. 110. С. 609–627.
11. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов // Мат. сб. 1984. Т. 125. С. 117–127.

Статья поступила 7 февраля 1997 г., окончательный вариант — 25 апреля 2001 г.

Сорокин Владимир Николаевич
Московский гос. университет, механико-математический факультет,
Воробьевы горы, 119899 Москва В-234,
vnsormm@mech.math.msu.su;