Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 510.67

О ПРОБЛЕМЕ КОНЕЧНОЙ СИГНАТУРЫ

А. С. Морозов

Аннотация: Показано, что не всегда можно заменить произвольную модель другой моделью конечной сигнатуры так, чтобы группа ее автоморфизмов при этом не изменилась.

Ключевые слова: автоморфизм, конечная сигнатура

Мы в основном следуем стандартной терминологии и обозначениям, принятым в теории конструктивных моделей (см. [1]) и теории вычислимости (см. [2]).

Хорошо известно, что группа автоморфизмов любой счетной модели счетной сигнатуры реализуется с точностью до изоморфизма как группа всех автоморфизмов некоторого бинарного предиката. При этом если эта группа реализуется как группа всех автоморфизмов некоторой вычислимой модели, то этот бинарный предикат тоже может быть выбран вычислимым. Аналогичный результат верен и для групп всех вычислимых автоморфизмов вычислимых моделей. Идеи преобразования моделей бесконечных сигнатур в модели конечных сигнатур с сохранением типа изоморфизма группы всех автоморфизмов достаточно просты, хорошо известны и многократно описаны в разных вариациях. Автор затрудняется установить первоисточник этого вопроса. Сама идея преобразования моделей заключается в том, что для каждой n-ки элементов $a_1, \dots, a_n$, удовлетворяющих предикату P_i, мы добавляем в модель серию новых элементов, связанных с этими элементами и между собой бинарным отношением R так, что по фигуре, образуемой этими новыми добавленными элементами с помощью R, можно однозначно восстановить номер i предиката P_i и факт принадлежности этой n-ки данному предикату. Например, если предикат P_i тернарный, то для каждой тройки a_1, a_2, a_3 такой, что $P_i(a_1, a_2, a_3)$, в модель можно добавлять новые элементы $b_1, \dots, b_{i+1}, c_1, c_2, c_3$, на которых R определено как

$$\{\langle b_1, a_1\rangle, \langle b_2, b_1\rangle, \langle b_3, b_2\rangle, \dots, \langle b_{i+1}, b_i\rangle, \langle b_1, c_1\rangle, \langle c_1, a_2\rangle, \langle b_1, c_2\rangle, \langle c_2, c_3\rangle, \langle c_3, a_3\rangle\}.$$

При соблюдении некоторой аккуратности в построении так полученное множество элементов с бинарным предикатом R, рассматриваемое как модель, будет иметь группу автоморфизмов и группу вычислимых автоморфизмов, изоморфные соответственно группе всех автоморфизмов и группе всех вычислимых автоморфизмов исходной модели. Сокращение числа сигнатурных символов при этом было достигнуто за счет добавления в модель новых элементов. Разумеется, при этом действие соответствующих групп на полученной таким образом

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (грант № 00–499) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00593).

новой модели уже может оказаться неизоморфным действию этих групп на исходной модели.

В связи с этим автором неоднократно ставился следующий вопрос (см., например, [3]). *Пусть G — группа всех (вычислимых) автоморфизмов (вычислимой) модели $\mathfrak{M}$. Всегда ли можно построить на том же множестве (вычислимую) модель $\mathfrak{M}'$ конечной сигнатуры такую, что G совпадает с множеством всех (вычислимых) автоморфизмов модели $\mathfrak{M}'$?* В работе дается отрицательный ответ на этот вопрос. Более точно, в работе доказывается

Теорема 1. *Существует вычислимая модель $\mathfrak{M}$ с основным множеством ω такая, что для любой модели $\mathfrak{M}'$ конечной сигнатуры справедливы $\operatorname{Aut}\mathfrak{M} \neq \operatorname{Aut}\mathfrak{M}'$ и $\operatorname{Aut}_c\mathfrak{M} \neq \operatorname{Aut}_c\mathfrak{M}'$.*

Сначала введем некоторые обозначения и напомним некоторые определения. Мы используем стандартную индексацию конечных множеств натуральных чисел: конечное множество $S \subseteq \omega$ имеет индекс $m = \sum\limits_{i\in S} 2^i$ и обозначается через D_m. Заметим, что в силу этого определения $D_0 = \varnothing$. Два элемента модели называются *автоморфными*, если они переводятся друг в друга некоторым автоморфизмом модели. Основное множество модели $\mathfrak{M}$ обозначается через $|\mathfrak{M}|$. В работе несколько раз используется хорошо известная так называемая *челночная конструкция* (back–and–forth argument), с помощью которой строятся изоморфизмы между моделями. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две счетные модели. Под челночной конструкцией понимается процесс, в котором на каждом шаге t определяется изоморфизм f_t между конечными подмоделями $\mathfrak{A}_t \leq \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}_t \leq \mathfrak{B}$ так, что $f_s \subseteq f_{s+1}$ для всех $s < \omega$, и на каждом шаге расширение этого конечного изоморфизма происходит так, что в область определения и в область значений каждого нового определяемого конечного изоморфизма f_{t+1} добавляются наименьшие элементы, еще не вошедшие в область определения и в область значений f_t. Объединение всех f_s, $s < \omega$ будет изоморфизмом между моделями $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Через $\operatorname{lh}(\bar{a})$ мы обозначаем длину кортежа $\bar{a}$. Зафиксируем вычислимые функции c, l, r, кодирующие пары натуральных чисел, т. е. удовлетворяющие тождествам $c(l(x), r(x)) = x$, $lc(x, y) = x$, $rc(x, y) = y$.

Доказательство теоремы 1. Для доказательства нам понадобится

Лемма 1. *Для каждого $n \in \omega$ существует счетная модель $\mathfrak{M}_n$ сигнатуры, состоящей из одного $(n+1)$-местного предиката P_n, у которой группа всех автоморфизмов и группа всех вычислимых автоморфизмов действуют на $\mathfrak{M}_n$ n-транзитивно но не $(n+1)$-транзитивно. При этом модель $\mathfrak{M}_n$ строится эффективно равномерно по n.*

Доказательство леммы. Пусть $\mathfrak{K}$ — класс всех конечных моделей сигнатуры $\langle P_n\rangle$, у которых основное множество — конечное подмножество ω, удовлетворяющих следующему свойству:

$$\forall x_1, \ldots, x_{n+1}\Big(P(x_1, \ldots, x_{n+1}) \to \bigwedge_{1\leq i<j\leq n+1} x_i \neq x_j\Big). \tag{1}$$

Мы предполагаем, что зафиксирована некоторая эффективная нумерация $\mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_1, \ldots$ элементов класса $\mathfrak{K}$, причем такая, что по данному $t \in \omega$ можно эффективно определить индекс конечного множества $|\mathfrak{N}_t|$ и эффективно определить индекс конечного семейства всех кодов $(n+1)$-ок, удовлетворяющих P в модели $\mathfrak{N}_t$. Заметим также, что данную нумерацию можно определять некоторой эффективной процедурой, равномерно зависящей от n.

Опишем построение модели $\mathfrak{M}_n$. Мы получим $\mathfrak{M}_n$ как объединение цепи моделей

$$\mathfrak{M}_n^0 \subseteq \mathfrak{M}_n^1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{M}_n^k \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{i\in\omega} \mathfrak{M}_n^i = \mathfrak{M}_n,$$

каждая из которых будет совпадать с некоторой моделью $\mathfrak{N}_j$, $j<\omega$.

На первом шаге положим $\mathfrak{M}_n^0 = \mathfrak{N}_0$.

Предположим, что мы уже построили модель $\mathfrak{M}_n^t$ и она имеет свойство (1).

Перечислим все наборы кортежей $\bar{a}, \bar{b}, a' \in (\mathfrak{M}_n^t)^{<\omega}$ такие, что $\mathrm{lh}(\bar{a}) = \mathrm{lh}(\bar{b}) \le \mathrm{card}(\mathfrak{M}_n^t)$ и кортежи $\bar{a}$ и $\bar{b}$ удовлетворяют одним и тем же формулам вида $P_n(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+1}})$ (ввиду условия (1) это эквивалентно тому, что кортежи $\bar{a}$ и $\bar{b}$ удовлетворяют одним и тем же бескванторным формулам). Для каждого такого набора кортежей $\bar{a}, \bar{b}, a'$ добавим в модель $\mathfrak{M}_n^t$ новый элемент b' и расширим предикат P_n на вновь полученную модель так, чтобы $\bar{a}a'$ и $\bar{b}b'$ удовлетворяли одним и тем же бескванторным формулам, а так полученная модель — свойству (1). Затем найдем модель $\mathfrak{M}_n^{t+1}$ как элемент класса $\mathfrak{K}$, расширяющий модель, которую мы только что построили, и вдобавок такую, что модель $\mathfrak{N}_{t+1}$ изоморфно вложима в $\mathfrak{M}_n^{t+1}$. Описание построения закончено.

Организуем процесс построения модели в соответствии с некоторым алгоритмом, считая, что на каждом этапе, где требуется выбор нового объекта, мы выбираем объект с наименьшим номером. Отсюда следует, что результатом построения будет вычислимая модель.

Обозначим бескванторный тип кортежа $\bar{x}$ через $t_0(\bar{x})$. Заметим, что свойство $t_0(\bar{x}) = t_0(\bar{y})$ может быть выражено бескванторной формулой. В качестве такой формулы годится, например, конъюнкция всех формул вида

$$P(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \leftrightarrow P(y_{i_1}, \dots, y_{i_n})$$

и формул вида $x_i = x_j \leftrightarrow y_i = y_j$.

Модель $\mathfrak{M}_n$, построенная нами, удовлетворяет предложению

$$\forall \bar{x}, \bar{y}\, [t_0(\bar{x}) = t_0(\bar{y}) \to \forall x' \exists y' (t_0(\bar{x}, x') = t_0(\bar{y}, y'))]. \tag{2}$$

Поэтому она имеет следующее свойство: для любых пар кортежей $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ равной длины, которые удовлетворяют одним и тем же бескванторным формулам, существует вычислимый автоморфизм модели $\mathfrak{M}_n$, переводящий $\bar{a}$ в $\bar{b}$. Это легко получается из (2) с помощью челночной конструкции.

Очевидно, что группа вычислимых автоморфизмов $\mathfrak{M}_n$ действует n-транзитивно поскольку ввиду (1) любые две n-ки в этой модели удовлетворяют одним и тем же бескванторным формулам, а любые два кортежа нашей модели, удовлетворяющие одним и тем же бескванторным формулам, автоморфны в этой модели, причем соответствующий автоморфизм может быть выбран вычислимым, так как он может быть получен эффективной челночной конструкцией. С другой стороны, существует две $(n+1)$-ки, каждая из которых состоит из попарно различных элементов, одна из которых удовлетворяет P_n, а другая нет. Значит, эти две $(n+1)$-ки не могут быть автоморфными. Лемма доказана.

Определим теперь модель $\mathfrak{M}$. Ее сигнатура будет состоять из предикатов $P_1, P_2, \dots; Q_1, Q_2, \dots$. Сама модель является прямой суммой моделей $\mathfrak{M}_i$; более точно, она устроена следующим образом. Предикаты Q_i, $i = 1, 2, \dots$, выделяют множества $\{n \mid \ell(n) = i\}$, $i = 1, 2, \dots$. На каждом из множеств Q_i определяется структура модели $\mathfrak{M}_i$; более точно, для любых $i < \omega$ и для любых $x_1, \ldots, x_{i+1}$ справедливо

$$\mathfrak{M} \models P_i(x_1, \ldots, x_{i+1}) \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_{i+1} \in Q_i \ \& \ \mathfrak{M}_i \models P_i(r(x_1), \ldots, r(x_{i+1}))).$$

Нетрудно убедиться, что группа всех автоморфизмов модели $\mathfrak{M}$ является декартовым произведением групп автоморфизмов моделей $\mathfrak{M}_i^* \cong \mathfrak{M}_i$, полученных ограничением $\mathfrak{M}$ на предикаты Q_i, $i < \omega$. Для нас важно, что каждый предикат Q_i инвариантен относительно всех автоморфизмов модели $\mathfrak{M}$ и что любое семейство $(\psi_i)_{1 \leq i < \omega}$ автоморфизмов моделей $\mathfrak{M}_i^*$ однозначно задает некоторый автоморфизм ψ модели $\mathfrak{M}$ по правилу

$$\psi(x) = y \Leftrightarrow \exists i < \omega (x \in \mathfrak{M}_i^* \ \& \ \psi_i(x) = y).$$

Таким образом, любые два кортежа из модели $\mathfrak{M}_i^*$, каждый из которых состоит из i попарно различных элементов, переводятся друг в друга некоторым вычислимым автоморфизмом модели $\mathfrak{M}$, но не всякие такие кортежи из $i+1$ попарно различных элементов переводятся друг в друга некоторым автоморфизмом.

Предположим теперь, что $\mathfrak{N}$ — какая-то (вычислимая) модель конечной сигнатуры, для которой выполнено $\operatorname{Aut}\mathfrak{N} = \operatorname{Aut}\mathfrak{M}$ ($\operatorname{Aut}_c\mathfrak{N} = \operatorname{Aut}_c\mathfrak{M}$), и пусть k будет больше всех арностей предикатов и операций модели $\mathfrak{N}$. Без ограничения общности можно считать, что сигнатура модели $\mathfrak{N}$ состоит из одних предикатов. Покажем, что в таком случае любая перестановка (вычислимая перестановка) f на ω, тождественная вне множества Q_k, является автоморфизмом (вычислимым автоморфизмом) модели $\mathfrak{N}$, что будет противоречить только что доказанному свойству автоморфизмов модели $\mathfrak{M}$. Для этого достаточно показать, что для любого предиката $R(x_1, \ldots, x_m)$ модели $\mathfrak{N}$ и любых элементов $a_1, \ldots, a_m \in \mathfrak{N}$ выполнено

$$\mathfrak{N} \models R(a_1, \ldots, a_m) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models R(f(a_1), \ldots, f(a_m)).$$

Докажем это. Поскольку $m < k$ и $\operatorname{Aut}\mathfrak{N} = \operatorname{Aut}\mathfrak{M}$ ($\operatorname{Aut}_c\mathfrak{N} = \operatorname{Aut}_c\mathfrak{M}$), найдется (вычислимый) автоморфизм f' модели $\mathfrak{N}$ такой, что $f(a_1) = f'(a_1), \ldots, f(a_m) = f'(a_m)$. Отсюда получаем

$$\mathfrak{N} \models R(a_1, \ldots, a_m) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models R(f'(a_1), \ldots, f'(a_m)) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models R(f(a_1), \ldots, f(a_m)),$$

следовательно, f — автоморфизм модели $\mathfrak{N}$; противоречие. Теорема доказана.

Замечание. Построенная нами в лемме 1 модель $\mathfrak{M}_n$ счетно-категорична, разрешима и допускает элиминацию кванторов.

В самом деле, сначала докажем, что $\mathfrak{M}_n$ ω-категорична. Введем обозначение. Пусть $D(\mathfrak{N}_i)$ обозначает диаграмму модели $\mathfrak{N}_i$, т. е. семейство всех атомарных предложений и их отрицаний в сигнатуре, расширенной индивидуальными константами c_a для каждого элемента a этой модели. Рассмотрим следующую систему аксиом T:

1) $\exists \bar{x} \big(\bigwedge D(\mathfrak{N}_i)\big)_{\bar{c}}^{\bar{x}}$ для каждого $i < \omega$. Здесь под $\big(\bigwedge D(\mathfrak{N}_i)\big)_{\bar{c}}^{\bar{x}}$ понимается конъюнкция всех формул диаграммы $D(\mathfrak{N}_i)$, в которой все новые константы вида c_a заменены новыми переменными, образующими набор $\bar{x}$;

2) $\forall \bar{x}, \bar{y} (t_0(x_1, \ldots, x_q) = t_0(y_1, \ldots, y_q) \to$
$\forall x' \exists y' (t_0(x_1, \ldots, x_q, x') = t_0(y_1, \ldots, y_q, y')))$ для всех $q < \omega$;

3) $\forall x_1, \ldots, x_{n+1} \big(P(x_1, \ldots, x_{n+1}) \to \bigwedge\limits_{1 \leq i < j \leq n+1} x_i \neq x_j\big)$ (свойство (1)).

Используя челночную конструкцию, можно легко показать, что построенная нами модель удовлетворяет этому множеству аксиом и что это множество аксиом ω-категорично.

Более того, поскольку для любого m любые две m-ки, у которых бескванторные типы совпадают, изоморфны и существует только конечное число неэквивалентных бескванторных типов, каждая формула сигнатуры $\langle P_n \rangle$ эквивалентна в T некоторой бескванторной формуле. Таким образом, $\mathfrak{M}_n$ — вычислимая модель вычислимо перечислимой теории T, допускающей элиминацию кванторов. Поэтому $\mathfrak{M}_n$ — разрешимая модель T (см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л., Гончаров С. С.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999. (Сибирская школа алгебры и логики).

2. *Rogers H.* Theory of recursive functions and effective computability. New York; St. Louis; San Francisco; Toronto; London; Sydney: McGraw-Hill Book Comp., 1967.

3. *Morozov A. S.* Computable automorphisms of models // Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Tagungsbericht 3/2001, Berechenbarkeitstheorie 21.01.–27.01.2001, abstracts. Oberwolfach, 2001. P. 6–7.

Статья поступила 10 октября 2002 г.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru