Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 512.542

К ТЕОРЕМЕ ХУППЕРТА

Л. А. Шеметков

Аннотация: Изучаются прямые разложения FG-модуля, где F — поле простой характеристики p, G — конечная p-сверхразрешимая группа.

Ключевые слова: конечная группа, модуль

Посвящается профессору Б. Хупперту

в связи с его 75-летием

1. Введение

Конечная группа называется *сверхразрешимой*, если все ее главные факторы циклические. Нетрудно заметить, что максимальные подгруппы любой конечной сверхразрешимой группы имеют простые индексы. В 1954 г. Б. Хупперт установил, что справедливо и обратное утверждение.

Теорема 1.1 [1]. *Конечная группа сверхразрешима, если каждая ее максимальная подгруппа имеет простой индекс.*

Доказательство этой замечательной теоремы существенно использует линейные методы, поскольку в данном случае группа оказывается разрешимой и допускает представление линейными преобразованиями над полем из p элементов. В работе [2] была предпринята попытка выделить линейную часть теоремы Хупперта. Это было сделано следующим образом.

Теорема 1.2 [2]. *Пусть F — поле характеристики $p > 0$, G — конечная p-сверхразрешимая группа, V — конечномерный FG-модуль. Если V имеет композиционный фактор размерности 1, то V имеет подмодуль размерности 1.*

Напомним, что, следуя С. А. Чунихину [3], конечную группу называют *p-сверхразрешимой*, если порядок каждого ее главного фактора либо равен p, либо не делится на p.

С развитием теории формаций роль теоремы Хупперта прояснилась и стала даже более значительной. Согласно В. Гашюцу [4] *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, где G — конечная группа, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$. Из теоремы Хупперта вытекает, что формация $\mathfrak{U}$ всех конечных сверхразрешимых групп является насыщенной. Но Хуппертом доказано даже больше. А именно, если функция f каждому простому p сопоставляет класс всех конечных абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$, то результат Б. Хупперта [5] утверждает, что f является локальным спутником формации $\mathfrak{U}$. Последнее означает, что конечная группа G принадлежит $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого ее главного фактора H/K и любого простого делителя p порядка H/K.

Теорема 1.2 докладывалась автором в 1968 г. на семинаре профессора Б. И. Плоткина в Риге. Тогда же возник вопрос: *выделяется ли прямым слагаемым наибольший подмодуль с композиционными факторами размерности* 1 *в условиях теоремы* 1.2? В настоящей работе мы рассматриваем обобщение теоремы 1.2 с формационной точки зрения и, как следствие, отвечаем положительно на этот вопрос. Результаты настоящей работы докладывались автором на Украинском математическом конгрессе 22 августа 2001 г., а также на Международной алгебраической конференции в Санкт-Петербурге 18 сентября 2002 г. (см. [6, 7]).

2. Предварительные сведения

Мы будем использовать некоторые сведения из теории формаций [8, 9]. Везде в дальнейшем p обозначает некоторое простое число, π — некоторое непустое множество простых чисел. Пусть $\mathfrak{E}$ — класс всех конечных групп. Все рассматриваемые формации будут предполагаться входящими в $\mathfrak{E}$. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал конечной группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа, фактор-группа по которой принадлежит формации $\mathfrak{F}$; $O_\pi(G)$ — наибольшая нормальная π-подгруппа конечной группы G; $\mathscr{K}(G)$ — множество всех тех групп, которые изоморфны композиционным факторам группы G. $\mathrm{Exp}(G)$ — экспонента конечной группы G. Если F — поле, то через F^* мы обозначаем его мультипликативную группу. Если V — FG-модуль, то $\mathrm{Ker}(G \text{ on } V)$ обозначает ядро соответствующего представления группы G, т. е. множество всех тех элементов из G, которые действуют тождественно на V.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *π-насыщенной*, если из условия $G/O_\pi(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ для конечной группы G всегда следует $G \in \mathfrak{F}$. В работах [10, 11] обоснована возможность построения π-насыщенной формации с помощью π-локальных спутников. Приведем схему этого построения, следуя [11].

Если H/K — главный фактор конечной группы G, то его *малый централизатор* $c_G(H/K)$ — это подгруппа, порожденная всеми такими нормальными подгруппами N группы G, что $N \supseteq K$ и $\mathscr{K}(N/K) \cap \mathscr{K}(H/K) = \varnothing$.

Рассмотрим функцию $f : \pi \cup \{\pi'\} \to \{\text{формации}\}$, где $f(\pi') \neq \varnothing$. Эта функция называется *π-локальным спутником*. Нормальную секцию $H/K \neq 1$ конечной группы G назовем *f-центральной*, если выполняется одно из следующих условий:

1) H/K — π'-группа, и $G/c_G(H/K) \in f(\pi')$;

2) $|H/K|$ делится на числа из π, и $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого простого $p \in \pi$, делящего $|H/K|$.

Множество $\mathfrak{F}$ всех конечных групп, у которых все главные факторы f-центральны, является формацией, а функция f называется *π-локальным спутником* этой формации. Запись $\mathfrak{F} = LF_\pi(f)$ означает, что f является π-локальным спутником $\mathfrak{F}$. Если π — множество всех простых чисел, то символ π опускают; в этом случае говорят, что f — *локальный спутник формации* $\mathfrak{F}$.

Понятие f-центральной нормальной секции можно, конечно, расширить, рассматривая конечную группу G с группой операторов S. Пусть, например, f — локальный спутник. Говорят, что группа операторов S *действует f-центрально на* G (или что G *f-центральна в* S), если $S/C_S(G)$ принадлежит $f(p)$ для любого простого делителя p порядка G. Если G не f-центральна в S, то говорят, что G *f-эксцентральна в* S или, иначе, S действует *f-эксцентрально на* G. Будем говорить, что S действует *f-гиперцентрально* (*f-эксгиперцентрально*) на G, если каждый S-главный фактор группы G f-централен (соответственно f-эксцентрален) в S.

Лемма 2.1 [10]. *Непустая формация $\mathfrak{F}$ является π-насыщенной тогда и только тогда, когда она имеет π-локальный спутник.*

Спутник f π-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ называется *приведенным*, если $\mathfrak{F}$ содержит $f(\pi')$ и $f(p)$ для любого $p \in \pi$.

Лемма 2.2 [10]. (1) *Если $\mathfrak{F} = LF_\pi(f)$ и h — π-локальный спутник такой, что $h(\pi') = f(\pi') \cap \mathfrak{F}$, $h(p) = f(p) \cap \mathfrak{F}$ для любого $p \in \pi$, то h — приведенный π-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$.*

(2) *Всякая непустая π-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ обладает таким приведенным π-локальным спутником f, что $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$ для любого $p \in \pi$ и $f(\pi') = \mathfrak{F}$ (такой спутник называется каноническим). Если f_1 и f_2 — приведенные π-локальные спутники π-насыщенной формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{N}_p f_1(p) = \mathfrak{N}_p f_2(p)$ для любого $p \in \pi$.*

Тот факт, что формация $\mathfrak{U}$ всех конечных сверхразрешимых групп имеет локальный спутник, легко получается из теоремы Б. Хупперта о неприводимой абелевой группе автоморфизмов p-группы (см. [12, теорема II.3.10]). Последний результат мы докажем в расширенном виде, используя ту же идею доказательства.

Лемма 2.3. *Пусть V — неприводимый конечномерный FG-модуль, где F — поле характеристики $p > 0$, G — конечная абелева группа. Тогда G — циклическая группа и если F^* содержит подгруппу порядка $|G/\operatorname{Ker}(G \text{ on } V)|$, то $\dim_F(V) = 1$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $\operatorname{Ker}(G \text{ on } V) = 1$, т. е. F и G содержатся в кольце $\operatorname{End}(V)$ эндоморфизмов аддитивной абелевой группы V и поэлементно перестановочны. В кольце $\operatorname{End}(V)$ рассмотрим произведение $Q = F^*G = \{\alpha x : \alpha \in F^*, x \in G\}$. Ясно, что Q — неприводимая абелева группа автоморфизмов аддитивной группы V. По лемме Шура кольцо E_Q всех Q-эндоморфизмов группы V является телом. Понятно, что G является конечной абелевой подгруппой мультипликативной группы центра $Z(E_Q)$ тела E_Q. Значит, G — циклическая группа. Пусть $G = \langle a \rangle$. Если $a \in F$, то $\dim_F(V) = 1$ и лемма верна. Предположим, что $a \notin F$. Рассмотрим простое расширение $R = F(a)$. Теперь мы рассматриваем V как неприводимый R-модуль.

Если v — ненулевой элемент из V, то $vR = \{vr = rv : r \in R\}$ — подмодуль R-модуля V, а так как V неприводим, то $vR = V$. Итак, $V = vR$ для любого $v \neq 0$ из V.

Зафиксируем теперь ненулевой элемент v из V и рассмотрим отображение $\varepsilon : r \mapsto vr$, где $r \in R$. Ясно, что ε — R-гомоморфизм аддитивной группы поля R на V, причем единица 1 поля R не входит в $\operatorname{Ker}(\varepsilon)$. Поскольку $\operatorname{Ker}(\varepsilon)$ — идеал в R, получаем $\operatorname{Ker}(\varepsilon) = (0)$. Итак, R-модули $R = F(a)$ и $V = vR$ R-изоморфны. Значит, $\dim_F(V) = \dim_F(R)$. Предположим, что G изоморфна некоторой подгруппе H мультипликативной группы F^* поля F. Произведение $GH = \{xh : x \in G, h \in H\}$ является, понятно, конечной подгруппой в R^*. Значит, GH — конечная циклическая группа, имеющая две циклические подгруппы G и H одинакового порядка. По свойству циклических групп будет $G = H$, а значит, $G \subseteq F = R$, т. е. V — одномерный модуль. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть F — поле характеристики $p > 0$, $\mathfrak{H}$ — класс всех таких конечных абелевых групп G, что $\mathrm{Exp}(G)$ делит порядок некоторой конечной подгруппы из F^*. Тогда $\mathfrak{H}$ — S-замкнутая формация.*

Доказательство. Пусть K — подгруппа группы $G \in \mathfrak{H}$. Если xK имеет порядок $r = \mathrm{Exp}(G/K)$, то $x^r \in K$. Пусть t — порядок элемента x и $t = rm + q$, $0 \leq m < r$. Тогда $x^t = 1 = x^{rm} \cdot x^q$, откуда получаем $x^q \in K$, а значит, $q = 0$. Таким образом, $\mathfrak{H}$ — S-замкнутый гомоморф.

Покажем, что $\mathfrak{H}$ замкнут относительно взятия прямых произведений. Рассмотрим группу $G = A \times B$, где A и B принадлежат $\mathfrak{H}$. Пусть a — элемент порядка r из A, b — элемент порядка s из B. Ясно, что порядок элемента ab делит число $[r, s] = rs/(r, s)$. По условию в F^* найдутся такие конечные подгруппы $X = \langle x \rangle$ порядка r_1 и $Y = \langle y \rangle$ порядка s_1, что r делит r_1, а s делит s_1. Ясно, что $XY = \{x^i y^j : i, j \in \mathbb{N}\}$ — конечная циклическая подгруппа из F^*. Пусть $XY = \langle z \rangle$ и F_p — простое подполе из F. Расширение $F_p(z)$ является конечным полем и содержит, понятно, $F_p(x)$ и $F_p(y)$. Пусть $F_p(z) = GF(p^\alpha)$. Тогда r_1 и s_1 делят $p^\alpha - 1$. Значит, r и s делят $p^\alpha - 1$. Таким образом, $[r, s]$ делит порядок мультипликативной группы поля $GF(p^\alpha)$. Лемма доказана.

Лемма 2.5 (Цассенхауз, см. [12, с. 350]). *Пусть G — конечная группа операторов периодической абелевой группы V, причем порядки элементов из V взаимно просты с $|G|$. Тогда $V = [V, G] \times C_V(G)$, где оба фактора, конечно, G-допустимы.*

Лемма 2.6. *Пусть A — некоторая стабильная группа автоморфизмов p-группы G, т. е. A действует тождественно на каждом факторе субнормального A-допустимого ряда $G = G_0 \supset \cdots \supset G_n = 1$. Тогда A является p-группой.*

Доказательство этого известного факта очень просто. По индукции A/C — p-группа, где $C = C_A(G_1)$. Если $c \in C$ и $x \in G$, то $x^c = xg_1$, где $g_1 \in G_1$, а значит, $x^{c^m} = xg_1^m$ для любого натурального m, откуда и следует требуемый результат.

3. Метод

Самый естественный метод доказательства теорем, аналогичных теореме Машке, состоит в применении теорем о дополнениях к нормальным подгруппам. Главнейшая из них — это следующая теорема Гашюца.

Теорема 3.1 (см. [12, теорема I.17.4]). *Пусть $A \subseteq B \subseteq G$, где A — абелева нормальная подгруппа группы G, а B — подгруппа конечного индекса $n = |G : B|$. Предположим, что отображение $a \to a^n$ ($a \in A$) биективно. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если A имеет дополнение в B, то A имеет дополнение в G;*

2) *если A имеет дополнение в B и все такие дополнения сопряжены в B, то все дополнения к A в G сопряжены в G.*

Напомним, что подгруппа H называется *дополнением* (complement) к подгруппе A в группе G, если $G = HA$ и $H \cap A = 1$. Если $G = XY$, то подгруппа Y называется *добавлением* (supplement) к подгруппе X в G. Изучение добавлений к нормальной подгруппе — один из способов обнаружения дополнений.

Нетрудно заметить, что из теоремы 3.1 вытекает теорема Машке. Действительно, пусть A — подмодуль конечномерного FH-модуля V, где F — поле, характеристика которого не делит порядок конечной группы H. Не ограничивая общности, будем считать, что H и F^* содержатся в кольце эндоморфизмов группы V. Понятно, что F^*H — группа. Будем смотреть теперь на V как на мультипликативную группу с некоторой группой автоморфизмов F^*H. Теперь к полупрямому произведению $G = [V](F^*H)$ применим теорему 3.1. Положим $B = VF^*$. Так как A имеет F-допустимое дополнение A_1 в V, то A_1F^* является дополнением к A в B. Кроме того, $|G : B| = |H|$, и ввиду условия отображение $a \to a^{|H|}$ биективно. По теореме 3.1 существует дополнение C к A в G. Так как $V \supseteq A$, ввиду тождества Дедекинда имеем $V = A(V \cap C)$. Очевидно, $V \cap C$ нормальна в G и является искомым прямым дополнением к A в V.

Теорема 3.1 была расширена для конечных групп в работах [13–15], а также в [11]. В частности, в 1972 г. автором был доказан следующий результат.

Теорема 3.2 [14]. *Пусть G — конечная группа, $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация.*

(1) *Если силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то $G^{\mathfrak{F}}$ не имеет $\mathfrak{F}$-центральных G-главных p-факторов.*

(2) *$G^{\mathfrak{F}}$ дополняем в G, если силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева для любого простого делителя p индекса $|G : G^{\mathfrak{F}}|$.*

В 1972 г. Р. Бэр в работе [16] обнаружил, что наличие определенной $\mathfrak{F}$-группы операторов у конечной разрешимой группы G позволяет разложить G в прямое произведение двух подгрупп. В 1974 г. П. Шмид усилил результат Р. Бэра, освободившись от условия разрешимости, и доказал в [17] следующую теорему: *если некоторая группа автоморфизмов S конечной группы G принадлежит формации $\mathfrak{F} = LF(f)$ и содержит все внутренние автоморфизмы группы G, то $G = A \times B$, где A f-гиперцентральна в S, а B f-эксгиперцентральна в S.* В то время никто (в том числе и автор настоящей статьи) не обратил внимания на то, что приведенная теорема П. Шмида может быть выведена из теоремы 3.2. Действительно, так как группы $G/Z(G)$ и $\mathrm{Inn}(G)$ S-изоморфны, а $\mathrm{Inn}(G)$ f-гиперцентральна в S, то S действует f-гиперцентрально на $G/Z(G)$. Учитывая, что $S \in \mathfrak{F}$, получаем, что $\mathfrak{F}$-корадикал $\Gamma^{\mathfrak{F}}$ полупрямого произведения $\Gamma = [G]S$ содержится в $Z(G)$. По теореме 3.2, $\Gamma^{\mathfrak{F}}$ f-эксгиперцентрален в S и имеет дополнение C в Γ. Но тогда $G = \Gamma^{\mathfrak{F}} \times (C \cap G)$, причем $C \cap G$ является, конечно, f-гиперцентральной в S.

Идеи, заложенные в теореме 3.2, мы используем в настоящей статье для получения нового аналога теоремы Машке.

4. Основные результаты

Поскольку мы будем рассматривать модули, нам необходимо естественным образом видоизменить понятие f-центральности.

Определение. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая p-насыщенная формация, f — ее некоторый p-локальный спутник. Пусть V —конечномерный FG-модуль, где G — конечная группа, F — поле характеристики $p > 0$. Композиционный фактор V_1/V_2 модуля V называется:

1) *f-центральным*, если $G/\operatorname{Ker}(G \text{ on } V_1/V_2) \in f(p)$;

2) *f-эксцентральным*, если V_1/V_2 не является f-центральным;

3) *$\mathfrak{F}$-центральным*, если V_1/V_2 f-централен и f — приведенный p-локальный спутник;

4) *$\mathfrak{F}$-эксцентральным*, если V_1/V_2 не является $\mathfrak{F}$-центральным.

На самом деле определение $\mathfrak{F}$-центральности не зависит от выбора приведенного p-локального спутника f. Действительно, если f_1 — еще один приведенный p-локальный спутник, то по лемме 2.2 имеет место равенство $\mathfrak{N}_p f(p) = \mathfrak{N}_p f_1(p)$, где $\mathfrak{N}_p$ — класс всех конечных p-групп. Так как модуль V_1/V_2 неприводим, то $O_p(G)$ содержится, как известно, в $\mathrm{Ker}(G \text{ on } V_1/V_2)$. Поэтому f-центральность модуля V_1/V_2 равносильна f_1-центральности.

Теорема 4.1. *Пусть V — конечномерный FG-модуль, где F — поле характеристики $p > 0$, G — конечная группа из формации $\mathfrak{F} = LF_p(f)$. Тогда V представим в виде прямой суммы $V = V_1 \oplus V_2$, где модули V_1 и V_2 обладают следующими свойствами:*

а) *каждый фактор композиционного ряда модуля V_1 f-централен;*

б) *каждый фактор композиционного ряда модуля V_2 f-эксцентрален.*

Доказательство. Так как $G \in \mathfrak{F}$, ввиду леммы 2.2 можно считать, что f — канонический p-локальный спутник. Если X и Y — подмодули из V такие, что все факторы композиционных рядов модулей V/X и V/Y f-центральны, то и $V/X \cap Y$ обладает этим же свойством. Таким образом, V имеет наименьший подмодуль R с тем свойством, что все факторы композиционного ряда модуля V/R f-центральны. Докажем следующее утверждение.

(A) *Все композиционные факторы модуля R f-эксцентральны.*

Будем доказывать утверждение (A) индукцией по длине композиционного ряда модуля. Ввиду индукции можно считать, что V совпадает с R и имеет единственный неприводимый подмодуль N, причем модуль N $\mathfrak{F}$-централен, а V/N неприводим и $\mathfrak{F}$-эксцентрален. Так как $G \in \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$, то $G/O_{p'}(G) \in f(p)$. Пусть $Q = G^{f(p)}$. Если $Q = 1$, то $G \in f(p)$, а значит, все композиционные факторы модуля V $\mathfrak{F}$-центральны. Поэтому получаем $1 \neq Q \subseteq O_{p'}(G)$. Пусть $C = \mathrm{Ker}(Q \text{ on } V)$. Для того чтобы применить лемму 2.5, будем считать, что V — мультипликативная группа, на которой действует группа операторов F^*G, являющаяся произведением поэлементно перестановочных групп F^* и G. По лемме 2.5, примененной к p-группе V и ее p'-группе операторов Q, имеем $V = [V, Q] \times C$. Ясно, что $C = V \cap Z(VQ)$. Так как N $\mathfrak{F}$-центральна, то $N \subseteq C$. Подгруппы $[V, Q]$ и C являются F^*-допустимыми, а значит, могут рассматриваться и как подмодули модуля V. Теперь из единственности N получаем $[V, Q] = 1$, а это означает, что $G \in f(p)$. Утверждение (A) доказано.

Мы и дальше будем рассматривать V как мультипликативную группу с группой операторов F^*G. Пусть $\Gamma = V(F^*G)$ — полупрямое произведение V и F^*G.

(B) *Если $1 \neq S \trianglelefteq \Gamma, S \subseteq V, \Gamma = B_1 S = B_2 S \supseteq B_1 \supset B_2$, то $B_1 \cap S \supset B_2 \cap S$.*

Предположим, что $B_1 \cap S = B_2 \cap S$. Ввиду тождества Дедекинда $V = (B_1 \cap V)S = (B_2 \cap V)S$. Возьмем элемент $x \in B_1 \setminus B_2$. Так как $\Gamma = B_2 S$, то $x = bs$, где $b \in B_2$, $s \in S$. Тогда $s = b^{-1}x \in B_1 \cap S = B_2 \cap S$. Из $b^{-1}x \in B_2$ и $b^{-1} \in B_2$ следует $x \in B_2$, что невозможно.

(C) *Если $L \neq 1$ — нормальная подгруппа группы Γ, содержащаяся в V, то в F^*GL существует максимальная подгруппа, не содержащая L.*

В группе F^*GL рассмотрим возрастающую цепь подгрупп $H_0 = F^*G \subset H_1 \subset H_2 \subset \dots$, не содержащих L. Аналогично (B) получаем возрастающую цепь $1 = H_0 \cap L \subset H_1 \cap L \subset \dots$ в группе L. Но L обладает конечным F^*G-главным рядом (L может рассматриваться как подмодуль конечномерного модуля V). Значит, цепи $H_0 \cap L \subset H_1 \cap L \subset \dots$ и $H_0 \subset H_1 \subset \dots$ не могут быть бесконечными, что доказывает утверждение (C).

(D) *Если V_1 — минимальное F^*G-допустимое добавление к R в V, то $V_1 \cap R = 1$.*

Заметим, что существование V_1 гарантируется конечномерностью V. Рассмотрим подгруппу $H = F^*GV_1$, являющуюся добавлением к R в Γ.

Предположим, что в H существует такая собственная подгруппа H_1, что $H_1R = \Gamma$. Ясно, что $V = R(H_1 \cap V)$, причем $H_1 \cap V$ нормальна в Γ. Согласно (B) будет $V_1 = H \cap V \supset H_1 \cap V$. Последнее противоречит минимальности V_1. Итак, H — минимальное добавление к R в Γ.

В силу (C) в H имеются максимальные подгруппы. Допустим, что существует максимальная подгруппа M из H, не содержащая $H \cap R$. Тогда $M(H \cap R) = H$ и $MR = \Gamma$, что невозможно. Таким образом, $H \cap R$ содержится в подгруппе Фраттини $\Phi(H)$ группы H.

Итак, $\Gamma = HR$, $H = F^*GV_1$, $H \cap R = V_1 \cap R \subseteq \Phi(H)$. Теперь обратим внимание на действие группы $Q = G^{f(p)}$ на $V_1 \cap R$. Так как $G \in LF_p(f)$, то Q — p'-группа. С учетом того, что группы V/R и $V_1/V_1 \cap R$ Γ-изоморфны, каждый Γ-главный фактор X/Y группы $V_1/V_1 \cap R$ f-централен в G, т. е. $G/C_G(X/Y) \in f(p)$, а значит, $Q \subseteq C_G(X/Y)$. Таким образом, Q действует тождественно на каждом Γ-главном факторе группы $V_1/V_1 \cap R$, а поскольку по лемме 2.6 стабильная группа автоморфизмов p-группы является p-группой, то Q действует тождественно на $V_1/V_1 \cap R$, т. е. $[V_1, Q] \subseteq V_1 \cap R$. Применяя лемму 2.5 к V_1 и Q, получаем

$$V_1 = [V_1, Q] \times C_{V_1}(Q) = (V_1 \cap R)C_{V_1}(Q).$$

В группе V_1Q все подгруппы порядка $|Q|$ сопряжены по теореме 3.1, причем V_1Q нормальна в H. По обобщенной лемме Фраттини $V_1QN_H(Q) = V_1N_H(Q) = H$.

Учитывая приведенную выше факторизацию V_1, выводим, что

$$H = (V_1 \cap R)C_{V_1}(Q)N_H(Q) = (V_1 \cap R)N_H(Q).$$

Отсюда ввиду $V_1 \cap R \subseteq \Phi(H)$ вытекает, что $Q = G^{f(p)}$ нормальна в H и, значит, действует тождественно на $V_1 \cap R$. Но тогда ясно, что каждый Γ-главный фактор группы $V_1 \cap R$ является f-центральным в G. Согласно (A) это возможно лишь в случае $V_1 \cap R = 1$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Пусть F — поле характеристики $p > 0$, $\mathfrak{H}$ — класс всех таких конечных абелевых групп A, что $\mathrm{Exp}(A)$ делит порядок некоторой конечной подгруппы из F^*. Пусть $\mathfrak{F}$ — p-насыщенная формация с таким p-локальным спутником f, что $f(p) = \mathfrak{H}$. Тогда всякий конечномерный FG-модуль V, где $G \in \mathfrak{F}$, представим в виде прямой суммы $V = V_1 \oplus V_2$, где размерность каждого композиционного фактора модуля V_1 равна 1, а размерность каждого композиционного фактора модуля V_2 больше 1.*

Доказательство. Пусть X/Y — произвольный фактор композиционного ряда модуля V. Если X/Y f–централен, то $A = G/\mathrm{Ker}(G \text{ on } X/Y)$ принадлежит $f(p) = \mathfrak{H}$. Теперь применим лемму 2.3. Группа A оказывается циклической и ввиду $A \in \mathfrak{H}$ в F^* имеется подгруппа порядка $|A|$. Значит, модуль X/Y имеет размерность 1. Таким образом, фактор композиционного ряда модуля V f-централен тогда и только тогда, когда он имеет размерность 1. Теперь остается применить теорему 4.1. Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Пусть F — поле характеристики $p > 0$, V — конечномерный FG-модуль, где G — конечная p-сверхразрешимая группа. Тогда V представим в виде прямой суммы $V = V_1 \oplus V_2$, где модули V_1 и V_2 обладают следующими свойствами:*

1) *каждый фактор композиционного ряда модуля V_1 имеет размерность* 1*;*

2) *размерность каждого фактора композиционного ряда модуля V_2 больше* 1.

Доказательство. Рассмотрим p-локальный спутник f такой, что $f(p) = \mathfrak{H}$ — формация из теоремы 4.2, а $f(p')$ — произвольная непустая формация, содержащая группу G. Пусть $\mathfrak{F} = LF_p(f)$. Так как G p-сверхразрешима, то $G \in \mathfrak{F}$. Теперь применяем теорему 4.2. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. Bd 60. S. 409–434.
2. *Шеметков Л. А.* О конечных разрешимых группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32, № 3. С. 533–559.
3. *Чунихин С. А.* О π-свойствах конечных групп // Мат. сб. 1949. Т. 25, № 3. С. 321–346.
4. *Gaschütz W.* Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. Bd 80. S. 300–305.
5. *Huppert B.* Zur Gaschützschen Theorie der Formationen // Math. Ann. 1966. Bd 164. S. 133–141.
6. *Шеметков Л. А.* Частично насыщенные формации и аналоги теоремы Машке // Тр. Украинского математического конгресса, Киев, 21–23 августа 2001 г. (в печати).
7. *Shemetkov L. A.* On Gaschütz method in general algebra // Abstracts of the Intern. algebraic conf. dedicated to the memory of Z. I. Borevich. St. Petersburg, Russia, September 17–23, 2002. P. 158–159.
8. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
9. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
10. *Shemetkov L. A., Skiba A. N.* Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups // Siberian Adv. Math. 2000. V. 10, N 2. P. 112–141.
11. *Shemetkov L. A.* On partially saturated formations and residuals of finite groups // Comm. Algebra. 2001. V. 29, N 9. P. 4125–4137.
12. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verl., 1967.
13. *Шеметков Л. А.* О существовании π-дополнений к нормальным подгруппам конечных групп // Докл. АН СССР. 1970. Т. 195, № 1. С. 50–52.
14. *Шеметков Л. А.* О формационных свойствах конечных групп // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 6. С. 1324–1327.
15. *Шеметков Л. А.* Ступенчатые формации групп // Мат. сб. 1974. Т. 94, № 4. С. 628–648.
16. *Baer R.* Durch Formationen Gestimmte Zerlegungen von Normalteilern endlicher Gruppen // J. Algebra. 1972. V. 20, N 1. P. 38–56.
17. *Schmid P.* Lokale Formationen endlicher Gruppen // Math. Z. 1974. Bd 137, N 1. S. 31–48.

Статья поступила 22 октября 2002 г.

Шеметков Леонид Александрович
Гомельский университет им. Ф. Скорины, Гомель
shemetkov@gsu.unibel.by