Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 517.994

СИММЕТРИЯ БАРОХРОННЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА

Л. В. Овсянников

Аннотация: Изучается система нелинейных дифференциальных уравнений, выражающая постоянство алгебраических инвариантов матрицы Якоби для гладких векторных полей в трехмерном пространстве. Эта система эквивалентна уравнениям газовой динамики, описывающим барохронные движения газа (давление и плотность зависят только от времени). Представлены результаты вычисления допускаемой локальной группы Ли и построения общего решения этой системы. Отмечены некоторые возникающие здесь новые задачи.

Ключевые слова: допускаемая локальная группа Ли преобразований, алгебра Ли операторов, эквивалентность, общее решение.

0. Введение. Движение идеального газа называется *барохронным*, если в этом движении давление и плотность постоянны по пространству $\mathbb{R}^3(x^1, x^2, x^3)$ и зависят только от времени t. Ввиду изэнтропичности таких движений давление газа однозначно определяется через плотность. Поэтому исходные дифференциальные уравнения, описывающие барохронные движения, сводятся к системе уравнений

$$u^i_t + u^j u^i_j = 0, \quad u^i_i = -\rho_t/\rho \quad (i = 1, 2, 3) \tag{0.1}$$

для искомых компонент вектора скорости $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ и плотности $\rho = \rho(t)$, где $u^i_j = \partial u^i/\partial x^j$ и используется правило суммирования по повторяющемуся индексу. Система (0.1) впервые была подробно исследована А. П. Чупахиным [1]. Им были изучены некоторые интересные физические свойства описываемых ее решениями газодинамических процессов. Ниже будут использованы следующие два основных результата А. П. Чупахина.

Во-первых, система (0.1) необходимо пополняется уравнениями для алгебраических инвариантов k_i матрицы Якоби $J = \partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{x}$, т. е. коэффициентов ее характеристического многочлена

$$\det(J - \lambda I) = -\lambda^3 + k_1\lambda^2 - k_2\lambda + k_3,$$

которые в силу уравнений (0.1) оказываются функциями только от времени t и удовлетворяют замкнутой системе уравнений

$$k_1' = 2k_2 - k_1^2, \quad k_2' = 3k_3 - k_1k_2, \quad k_3' = -k_1k_3.$$

С начальными данными $k_i(0) = c_i$ $(i = 1, 2, 3)$ решение этой системы имеет вид ($q' = \partial q/\partial t$ и т. д.)

$$\begin{gathered} k_1 = q'/q, \quad k_2 = q''/2q, \quad k_3 = q'''/6q, \\ q = 1 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3. \end{gathered} \tag{0.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00550).

При этом плотность дается выражением $\rho = \rho_0/q(t)$ с некоторой постоянной $\rho_0 > 0$.

Во-вторых, преобразование переменных $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \to (t, \mathbf{y}, \mathbf{v})$ по формулам

$$y^i = x^i - tu^i, \quad v^i(t, \mathbf{y}) = u^i(t, \mathbf{x}) \quad (i = 1, 2, 3), \tag{0.3}$$

взаимно однозначное при малых t, дает для матриц Якоби $J^u = \partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{x}$ и $J^v = \partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{y}$ соотношение (I — единичная матрица)

$$(I - tJ^u)(I + tJ^v) = I,$$

в силу которого J^v есть рациональная функция от J^u, что позволяет выразить алгебраические инварианты k_i^v матрицы J^v через таковые для J^u. Оказывается, что в силу формул (0.2) будет просто $k_i^v = c_i$. Кроме того, если $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет уравнениям (0.1), (0.2), то для $\mathbf{v}(t, \mathbf{y})$ получается равносильная система уравнений

$$v_t^i = 0, \quad k_i^v = c_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{0.4}$$

Тем самым изучение барохронных движений газа сведено к задаче об отыскании векторных полей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{y})$, для которых матрица Якоби $J^v = \partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{y}$ имеет постоянные алгебраические инварианты.

В силу взаимной однозначности точечного преобразования (0.3) свойства симметрии системы (0.1), (0.2) и системы (0.4) также находятся во взаимно однозначном соответствии и достаточно изучить их для (0.4). Именно этому и посвящена данная работа.

1. Допускаемая группа. Постановка задачи (в измененных обозначениях): на пространстве $\mathbb{R}^3(\mathbf{x})$ рассматриваются гладкие векторные поля $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{gathered} u_1^1 + u_2^2 + u_3^3 = c_1, \\ \begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1^1 & u_3^1 \\ u_1^3 & u_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_2^2 & u_3^2 \\ u_2^3 & u_3^3 \end{vmatrix} = c_2, \\ \begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 \end{vmatrix} = c_3, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $u_j^i = \partial u^i/\partial x^j$ и c_i — константы. Требуется найти наиболее широкую локальную группу Ли G локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^9(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c})$, допускаемую (в смысле С. Ли) системой (1.1).

Согласно теории групп Ли решение этой задачи сводится к отысканию допускаемых системой (1.1) операторов

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \varphi_i \frac{\partial}{\partial c_i} \tag{1.2}$$

с координатами ξ^i, η^i, φ_i — гладкими функциями независимых переменных $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{c}$. Алгебра Ли всех таких операторов и дает искомое описание симметрии системы (1.1).

Известный [2] алгоритм отыскания допускаемых операторов состоит в продолжении оператора X на производные u_j^i, действии продолженных операторов на уравнения (1.1), переходе в полученных соотношениях на многообразие в продолженном пространстве, заданном уравнениями (1.1), приводящем к определяющим уравнениям, учете независимости координат от параметрических производных и построении общего решения полученных определяющих уравнений (ОУ). Последние представляют собой систему линейных однородных дифференциальных уравнений для искомых координат оператора (1.2). Поэтому общее решение ОУ есть векторное пространство L (не обязательно конечномерное). Вместе с любыми операторами X, Y пространство L содержит также коммутатор $[X, Y] = X(Y) - Y(X)$ и, значит, образует допускаемую алгебру Ли операторов.

Применение этого алгоритма в данном случае приводит к следующим ОУ (δ^i_k — символ Кронекера, A, B, D — вспомогательные функции):

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial u^k} = \delta^i_k A, \quad \frac{\partial \eta^i}{\partial u^k} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \delta^i_k B, \quad \frac{\partial \eta^i}{\partial x^k} = \delta^i_k D \quad (i, k = 1, 2, 3); \tag{1.3$_1$}$$

$$\left.\begin{aligned} 3D + c_1 B + \big(2c_2 - c_1^2\big)A = \varphi_1(\mathbf{c}),\\ 2c_1 D + 2c_2 B + (3c_3 - c_1 c_2)A = \varphi_2(\mathbf{c}),\\ c_2 D + 3c_3 B - c_1 c_3 A = \varphi_3(\mathbf{c}). \end{aligned}\right\} \tag{1.3$_2$}$$

Условия совместности уравнений (1.3$_1$) приводят к выражениям для вспомогательных функций

$$A = A_i x^i + A_0, \quad B = A_i u^i + B_0, \quad D = D_0, \tag{1.4}$$

с которыми общее решение подсистемы (1.3$_1$) дается формулами

$$\begin{aligned} \xi^i = A_k x^k u^i + B^i_k x^k + A_0 u^i + P^i,\\ \eta^i = A_k u^k u^i + B^i_k u^k + B_0 u^i + D_0 x^i + Q^i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.5}$$

где A_k, B^i_k, P^i, Q^i, A_0, B_0, D_0 — произвольные постоянные (всего 21 константа). Подстановка выражений (1.4) в подсистему (1.3$_2$) дает соотношения

$$\begin{gathered} \varphi_1 = 3D_0 + c_1 B_0 + \big(2c_2 - c_1^2\big)A_0 + A_i\big[c_1 u^i + \big(2c_2 - c_1^2\big)x^i\big],\\ \varphi_2 = 2c_1 D_0 + 2c_2 B_0 + (3c_3 - c_1 c_2)A_0 + A_i[2c_2 u^i + (3c_3 - c_1 c_2)x^i],\\ \varphi_3 = c_2 D_0 + 3c_3 B_0 - c_1 c_3 A_0 + A_i[3c_3 u^i - c_1 c_3 x^i]. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Так как $\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{c})$, из (1.6) при $\mathbf{c} \neq 0$ следует, что все A_i равны 0. Поэтому в общем решении ОУ остается 18 независимых констант. Следовательно, справедлива

Теорема 1. *В случае* $\mathbf{c} \neq 0$ *система* (1.1) *допускает* 18*-мерную алгебру Ли* L_{18} *операторов* (1.2) *с координатами*

$$\begin{gathered} \left.\begin{aligned} \xi^i = B^i_k x^k + A_0 u^i + P^i,\\ \eta^i = B^i_k u^k + B_0 u^i + D_0 x^i + Q^i \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, 3),\\ \varphi_1 = 3D_0 + c_1 B_0 + \big(2c_2 - c_1^2\big)A_0,\\ \varphi_2 = 2c_1 D_0 + 2c_2 B_0 + (3c_3 - c_1 c_2)A_0,\\ \varphi_3 = c_2 D_0 + 3c_3 B_0 - c_1 c_3 A_0. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Базис в L_{18} *образуют операторы (вместо* X *используются обозначения ба-*

зисных операторов символами соответствующих констант):

$$
\begin{gathered}
P_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Q_i = \frac{\partial}{\partial u^i} \quad (i = 1, 2, 3),\\
B^i_j = x^i \frac{\partial}{\partial x^j} + u^i \frac{\partial}{\partial u^j} \quad (i, j = 1, 2, 3),\\
A_0 = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(2c_2 - c_1^2\right) \frac{\partial}{\partial c_1} + (3c_3 - c_1 c_2) \frac{\partial}{\partial c_2} - c_1 c_3 \frac{\partial}{\partial c_3}, \qquad (1.8)\\
B_0 = u^i \frac{\partial}{\partial u^i} + c_1 \frac{\partial}{\partial c_1} + 2c_2 \frac{\partial}{\partial c_2} + 3c_3 \frac{\partial}{\partial c_3},\\
D_0 = x^i \frac{\partial}{\partial u^i} + 3 \frac{\partial}{\partial c_1} + 2c_1 \frac{\partial}{\partial c_2} + c_2 \frac{\partial}{\partial c_3}.
\end{gathered}
$$

2. Структура алгебры L_{18}. Операторы P_i, Q_i образуют базис абелевой подалгебры L_6.

Операторы B^i_j порождают алгебру Ли L_9, изоморфную алгебре Ли согласованных линейных эндоморфизмов пространства $\mathbb{R}^3(\mathbf{x}) \times \mathbb{R}^3(\mathbf{u})$, с коммутаторами

$$
\left[B^i_j, B^k_l\right] = \delta^k_j B^i_l - \delta^i_l B^k_j \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3).
$$

Одномерная подалгебра с оператором

$$
B^i_i = B^1_1 + B^2_2 + B^3_3
$$

является центром в L_9. Фактор-алгебра $L_9/\left\{B^i_i\right\}$ является простой алгеброй Ли L_8, изоморфной классической алгебре $sl(3)$, т. е. алгебре Ли 3×3-матриц с нулевым следом.

Операторы A_0, B_0, D_0, B^i_i порождают четырехмерную подалгебру L_4. Если заменить оператор B_0 оператором

$$
B'_0 = B_0 - \frac{1}{2} B^i_i, \qquad (2.1)
$$

то фактор-алгебра $L_4/\left\{B^i_i\right\}$ будет изоморфна подалгебре $L'_3 \subset L_{18}$ с базисом A_0, B'_0, D_0 и коммутаторами

$$
[A_0, B'_0] = -A_0, \quad [B'_0, D_0] = -D_0, \quad [A_0, D_0] = 2B'_0, \qquad (2.2)
$$

т. е. классической простой алгебре $sl(2)$ матриц 2×2 с нулевым следом.

Подалгебру $L_6\{P_i, Q_i\}$ можно расширить центром B^i_i до разрешимой подалгебры L_7. Поэтому окончательно структура алгебры Ли L_{18} такова: ее радикал есть подалгебра $L_7\left\{P_i, Q_i, B^i_i\right\}$, а фактор Леви, полупростая подалгебра L_{11}, есть прямая сумма простых алгебр L_8 и L_3:

$$
L_{11} = L_9/\left\{B^i_i\right\} \oplus L_3\{A_0, B'_0, D_0\} \cong sl(3) \oplus sl(2). \qquad (2.3)
$$

Алгебре Ли L_{18} соответствует локальная группа Ли G_{18} локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^9(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c})$, допускаемая системой (1.1). Основное свойство симметрии системы (1.1) состоит в том, что группа G_{18} действует на множестве $\{U\}$ решений $U = (u^1, u^2, u^3)$ этой системы.

3. Эквивалентность. Решения системы (1.1) зависят от вектора констант $\mathbf{c} = (c^1, c^2, c^3)$, т. е. $U = U(\mathbf{c})$. Два решения с разными $\mathbf{c}$ называются *эквивалентными*, если существует преобразование $g \in G_{18}$, переводящее одно из этих решений в другое. По этой эквивалентности множество решений $\{U\}$ разбивается на классы эквивалентных решений. Для описания этих классов надо рассмотреть те преобразования из G_{18}, которые действуют на вектор $\mathbf{c}$.

Из (1.7) видно, что это будут преобразования, порожденные только операторами A_0, B_0, D_0. Явные формулы для этих преобразований $\mathbf{c} \to \mathbf{c}'$ легко получаются интегрированием соответствующих уравнений Ли и имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} A_0: c_1' = (c_1 + 2c_2\tau + 3c_3\tau^2)/q, \quad c_2' = (c_2 + 3c_3\tau)/q, \quad c_3' = c_3/q, \\ q = 1 + c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3; \\ B_0: c_1' = e^{\tau}c_1, \quad c_2' = e^{2\tau}c_2, \quad c_3' = e^{3\tau}c_3; \\ D_0: c_1' = c_1 + 3\tau, \quad c_2' = c_2 + 2c_1\tau + 3\tau^2, \quad c_3' = c_3 + c_2\tau + c_1\tau^2 + \tau^3, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где τ — вещественный параметр соответствующей однопараметрической подгруппы, свой для каждого оператора.

Теорема 2. *Существуют четыре попарно не эквивалентных класса решений системы* (1.1), *соответствующих векторам* $\mathbf{c}$*:*

$$1^0\ (0,0,0), \quad 2^0\ (1,0,0), \quad 3^0\ (0,1,0), \quad 4^0\ (0,-1,0). \tag{3.2}$$

Доказательство. Величина c_3 преобразованием D_0 приводится к нулю, так как уравнение $c_3' = 0$ согласно (3.1) наверное имеет вещественный корень τ. Из (3.1) следует, что плоскость $c_3 = 0$ инвариантна относительно преобразований A_0, B_0, действующих в этой плоскости на вектор (c_1, c_2). Возможны два случая: $c_2 \neq 0$ или $c_2 = 0$. Если $c_2 \neq 0$, то преобразованием A_0 достигается значение $c_1 = 0$ и прямая $c_1 = 0$ инвариантна относительно преобразований B_0, сводящихся к $c_2' = e^{2\tau}c_2$. Поэтому можно сделать $c_2 = \pm 1$. Прямая $c_2 = 0$ инвариантна относительно A_0, B_0, преобразующих на ней только величину c_1. Если $c_1 \neq 0$, то можно сделать $c_1 = 1$, в противном случае получится инвариантный вектор $\mathbf{c} = 0$. Остается показать, что никакие два вектора (3.2) не эквивалентны. Этот факт легко проверяется для каждого конкретного вектора (3.2).

Замечание 1. Если $\mathbf{c} = 0$, то выражения (1.6) координат φ_i сводятся к $\varphi_1 = 3D_0$, $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$. Поэтому точка $\mathbf{c} = 0$ будет инвариантна, если и только если положить $D_0 = 0$ в общем решении ОУ (1.5). Но при этом из (1.6) уже не следуют равенства $A_i = 0$, т. е. константы A_i дают три новых допускаемых оператора

$$A_k = x^k u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + u^k u^i \frac{\partial}{\partial u^i} = u^i B_i^k \quad (k = 1, 2, 3). \tag{3.3}$$

Следовательно, базис (1.8) допускаемой алгебры Ли при $\mathbf{c} = 0$ изменяется так: убирается оператор D_0 и добавляются три новых оператора A_k (3.3). Тем самым в случае $\mathbf{c} = 0$ система (1.1) допускает 20-мерную алгебру Ли L_{20}. Этот результат известен, он фактически был получен при анализе изобарических движений газа [3].

Согласно теореме 2 любое решение системы (1.1) эквивалентно такому решению U, для которого $c_3 = \det J = 0$. Это означает, что компоненты вектора $\mathbf{u}$ связаны функциональными зависимостями, число которых зависит от общего ранга (далее о.р.) матрицы $J = \partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{x}$. Если о.р. $J = 2$, то принято (в механике жидкостей и газов) называть решение U *двойной волной*, а если о.р. $J = 1$, то — *простой волной* (последнее возможно лишь при $c_2 = 0$).

Поэтому из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Любое* (*непостоянное*) *решение системы* (1.1) *эквивалентно либо двойной волне, либо простой волне.*

4. Двойные волны. В этом пункте рассматриваются свойства симметрии решений системы (1.1) типа двойных волн. Для упрощения записи формул здесь удобно изменить обозначения, положив $\mathbf{u} = (u, v, w)$ и $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Уравнения двойных волн получаются, если из системы (1.1) (при $c_3 = 0$) убрать последнее уравнение, заменив его соотношением

$$w = f(u, v) \tag{4.1}$$

с гладкой функцией f. При этом первые два уравнения (1.1) запишутся в виде

$$M(u) + N(v) = c_1, \quad M(u)N(v) - M(v)N(u) = c_2 \tag{4.2}$$

с операторами

$$M = \partial_x + f_u \partial_z, \quad N = \partial_y + f_v \partial_z. \tag{4.3}$$

В соответствии с теоремой 2 константы c_1 и c_2 считаются фиксированными, имеющими значения (3.2).

Согласно п. 2 при фиксированных константах $\mathbf{c} \neq 0$ система (1.1) допускает группу G_{15}, алгебра Ли которой имеет радикал L_7 и фактор Леви L_8 (из L_{18} убираются операторы A_0, B_0, D_0). Оказывается, что система (4.2) также допускает группу G_{15} в следующем смысле: если преобразование $g : (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \to (\mathbf{x}', \mathbf{u}')$ принадлежит G_{15}, то возникающие в результате преобразования g функции $u'(x', y', z')$, $v'(x', y', z')$ и $f'(u', v')$ удовлетворяют системе (4.2). Точнее, справедливо

Следствие 2. *Левые части системы* (4.2) *являются инвариантами группы* G_{15} (*при указанной трактовке преобразований* $g \in G_{15}$).

Доказательство дается прямой проверкой для каждой из порождающих G_{15} однопараметрических подгрупп с операторами (1.8).

Следовательно, преобразования $g \in G_{15}$ можно рассматривать как преобразования эквивалентности для «произвольного элемента» — функции $f(u, v)$, участвующей в системе (4.2).

Сводка преобразований эквивалентности функции f дана в табл. 1. В первом столбце перечислены операторы из списка (1.8), порождающие однопараметрические подгруппы $g(\tau) \in G_{15}$ с каноническим параметром τ или $\theta = \exp \tau$ (своим для каждой подгруппы). В следующих пяти столбцах указаны преобразованные значения координат x', y', z' и компонент скорости u', v'. В последнем столбце приведены значения преобразованной функции $f' = f'(u', v')$, выраженные через исходные величины и функцию $f = f(u, v)$.

При изучении решений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ системы (4.2) (здесь $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{u} = (u, v)$) с заданной функцией $f(\mathbf{u})$ в ряде вопросов возникает необходимость рассмотрения локального строения решения в окрестности некоторой фиксированной точки $p(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$. Наличие эквивалентности позволяет ограничиться таким рассмотрением в стандартной точке $p(0, 0)$. Пусть $\nabla_u = (\partial/\partial u, \partial/\partial v)$ и $Q(u, v)$ — квадратичная форма из членов второго порядка в разложении функции $f(u, v)$ по формуле Тейлора в точке $\mathbf{u}_0$.

Следствие 3. *Любое решение системы* (4.2) *эквивалентно «эталонному» решению, для которого*

$$\mathbf{u}(0) = 0, \quad f(0, 0) = 0, \quad \nabla_u f(0, 0) = 0, \tag{4.4}$$

Таблица 1

$g(\tau)$	x'	y'	z'	u'	v'	f'
P_1	$x+\tau$	y	z	u	v	f
P_2	x	$y+\tau$	z	u	v	f
P_3	x	y	$z+\tau$	u	v	f
Q_1	x	y	z	$u+\tau$	v	f
Q_2	x	y	z	u	$v+\tau$	f
Q_3	x	y	z	u	v	$f+\tau$
B_1^1	θx	y	z	θu	v	f
B_2^2	x	θy	z	u	θv	f
B_3^3	x	y	θz	u	v	θf
B_2^1	x	$y+\tau x$	z	u	$v+\tau u$	f
B_1^2	$x+\tau y$	y	z	$u+\tau v$	v	f
B_3^1	x	y	$z+\tau x$	u	v	$f+\tau u$
B_3^2	x	y	$z+\tau y$	u	v	$f+\tau v$
B_1^3	$x+\tau z$	y	z	$u+\tau f$	v	f
B_2^3	x	$y+\tau z$	z	u	$v+\tau f$	f

а квадратичная форма $Q(u,v)$ имеет одну из «эталонных» форм

$$u^2+v^2,\ uv,\ u^2,\ 0. \tag{4.5}$$

Доказательство следует из рассмотрения преобразований, указанных в табл. 1. Приведение в стандартную точку $p(0,0)$ достигается за счет переносов P_i по координатам $\mathbf{x}$ и Q_i по значениям u, v, f. Аннулирование $\nabla_u f(0,0)$ получается за счет преобразований B_3^1, B_3^2. $\square$

5. Общее решение. Определенная система уравнений первого порядка называется *системой Коши*, если в некоторой системе координат все уравнения записываются в виде выражений для производных от всех искомых функций по одной независимой переменной (главных производных) как гладких функций от остальных (параметрических) производных, независимых переменных и самих искомых функций. Для системы Коши широта ее решения определяется заданием начальных данных.

Согласно п. 2 исходная система (0.1) эквивалентна системе (4.2) и возникает вопрос о том, является ли последняя системой Коши. В силу инвариантности системы (4.2) относительно согласованных вращений в плоскостях $\mathbb{R}^2(x,y)$ и $\mathbb{R}^2(u,v)$ достаточно изучить этот вопрос в следующей постановке: можно ли разрешить систему (4.2) относительно производных u_x, v_x через гладкие функции остальных величин? Очевидно, достаточно найти выражения для $M(u)$ и $M(v)$, так как только в них и входят искомые производные.

Из первого уравнения (4.2) следует $M(u) = c_1 - N(v)$, а подстановка во второе уравнение приводит его к виду

$$M(v)N(u) = N(v)(c_1 - N(v)) - c_2,$$

и искомое разрешение возможно, если $N(u) \neq 0$. В этом случае при заданной функции $f(u,v)$ общее решение системы (4.2) зависит от двух произвольных функций двух независимых переменных, а именно от начальных данных $u|_{x=0} = u_0(y,z)$, $v|_{x=0} = v_0(y,z)$. Здесь препятствием является уравнение $N(u) = 0$, добавление которого к (4.2) приводит к переопределенной системе уравнений, порождающей особые решения. Они рассматриваются ниже, в п. 6.

Оказывается, что в общем случае существуют первые интегралы системы (4.2), с помощью которых можно найти решение с необходимым функциональным произволом.

Для этой цели на пространстве $\mathbb{R}^5(x,y,z,u,v)$ рассматриваются величины $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$, зависящие от параметра λ:

$$\xi = u - \lambda x, \quad \eta = v - \lambda y, \quad \zeta = f(u,v) - \lambda z. \tag{5.1}$$

С любыми функциями $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$ величины $\boldsymbol{\xi}$ становятся функциями от $\mathbf{x} = (x,y,z)$. Тогда для детерминанта матрицы Якоби $\mathscr{K}(\lambda) = (\partial\boldsymbol{\xi}/\partial\mathbf{x})$ справедливо выражение

$$\det \mathscr{K}(\lambda) = -\lambda\Delta(\lambda),$$

где (с операторами (4.3))

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - [M(u) + N(v)]\lambda + [M(u)N(v) - M(v)N(u)]. \tag{5.2}$$

Наряду с этим рассматривается уравнение

$$\lambda^2 - c_1\lambda + c_2 = 0. \tag{5.3}$$

Предложение 1. *Если* (u,v) *есть решение системы* (4.2) *и в качестве* λ *взят корень уравнения* (5.3), *то функции* $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ *удовлетворяют соотношению вида*

$$G(\xi, \eta, \zeta) = 0 \tag{5.4}$$

с некоторой функцией G.

Доказательство очевидно: при сделанных предположениях $\det \mathscr{K}(\lambda) = 0$. $\square$

Если $G_\zeta \neq 0$, то (5.4) можно взять в виде

$$f(u,v) - \lambda z = g(u - \lambda x, v - \lambda y) \tag{5.5}$$

с некоторой функцией g.

Замечание 2. Соотношение (5.4) дает интеграл системы (4.2), если $\lambda \neq 0$. При $\lambda = 0$ оно превращается в тривиальное $G(u, v, f(u,v)) = 0$. Но вместо (5.1) можно положить

$$\xi = u, \quad \eta = v, \quad \zeta = xf_u + yf_v - z. \tag{5.6}$$

Тогда будет $\det \mathscr{K} = -[M(u)N(v) - M(v)N(u)]$ и предложение 1 остается в силе (так как здесь $c_2 = 0$), а соответствующий интеграл вида (5.5) таков:

$$xf_u + yf_v - z = g(u,v). \tag{5.7}$$

В силу теоремы 2 достаточно с точностью до эквивалентности найти общее решение системы (4.2) в случаях, когда вектор $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ имеет одну из стандартных форм 2^0–4^0 (случай $\mathbf{c} = 0$ здесь не рассматривается, он дает изобарические решения, общий вид которых известен [3]). Значит, достаточно найти общее решение, когда корни уравнения (5.3) имеют значения

$$(2^0)\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0; \quad (3^0)\ \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i; \quad (4^0)\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1.$$

Во всех этих случаях $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Пусть $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ обозначают величины $\boldsymbol{\xi}$ (5.1), соответствующие корням λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) уравнения (5.3). Если $\lambda_2 = 0$, то в качестве $\boldsymbol{\xi}_2$ берется $\boldsymbol{\xi}$ из (5.6).

Теорема 3. *Общее решение системы* (4.2) *определяется неявно соотношениями*

$$G(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0, \quad H(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = 0 \tag{5.8}$$

с произвольными функциями G, H.

Доказательство. С найденными из (5.8) функциями $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ необходимо будет $\det \mathscr{K}(\lambda_i) = 0$ и в (5.2) также $\Delta(\lambda_i) = 0$ ($i = 1, 2$). Сравнение с (5.3) показывает, что коэффициенты в обоих уравнениях должны совпадать, т. е. найденные (u, v) удовлетворяют (4.2). □

Замечание 3. В случае 3^0 (3.2) мнимых корней общее решение будет получаться из одного соотношения вида (5.5), например

$$f(u, v) + iz = g(u + ix, v + iy),$$

где следует считать g аналитической функцией двух комплексных переменных, имеющей представление вида

$$g(u + ix, v + iy) = a(u, v, x, y) + ib(u, v, x, y),$$

причем функции a и b удовлетворяют переопределенной системе уравнений в инволюции. Эта система имеет общее решение с произволом в две (аналитические) функции двух независимых переменных. Следовательно, в этом случае общее решение (u, v) системы (4.2) будет вместо (5.8) определяться соотношениями

$$f(u, v) = a(u, v, x, y), \quad z = b(u, v, x, y). \tag{5.9}$$

6. Особые решения. Они получаются, если с точностью до эквивалентности положить $N(u) = 0$. Присоединение этого уравнения к системе (4.2) приводит к переопределенной системе

$$M(u) = \lambda_1, \quad N(u) = 0, \quad N(v) = \lambda_2. \tag{6.1}$$

Ее следует привести в инволюцию, предполагая, что операторы M и N действуют на пространстве $\mathbb{R}^3(\mathbf{x})$, т. е. что участвующая в них функция $f(u, v)$ рассматривается как функция от $\mathbf{x}$ в силу выражений $u = u(\mathbf{x})$, $v = v(\mathbf{x})$. С этой целью находится коммутатор операторов M и N, т. е. оператор, действующий на любую функцию $F(\mathbf{x})$ по формуле

$$[M, N](F) = M(N(F)) - N(M(F)). \tag{6.2}$$

Вычисление дает выражение

$$[M, N] = (f_{uv}M(u) + f_{vv}M(v) - f_{uu}N(u) - f_{uv}N(v))\partial_z. \tag{6.3}$$

В силу уравнений (6.1) этот коммутатор имеет значение

$$[M,N] = P\partial_z, \quad P = (\lambda_1 - \lambda_2)f_{uv} + M(v)f_{vv}.$$

С другой стороны, также в силу (6.1) формула (6.2) дает $[M,N](u) = 0$. Поэтому необходимым следствием системы (6.1) является равенство $Pu_z = 0$ и возможны два случая: $P \neq 0$ или $P = 0$.

Если $P \neq 0$, то $u_z = 0$ и система (6.1) принимает вид

$$u_x = \lambda_1,\ u_y = 0,\ u_z = 0; \quad v_y + f_v v_z = \lambda_2$$

с общим решением

$$u = \lambda_1 x,\ f(\lambda_1 x, v) = \lambda_2 z + \varphi(x, v - \lambda_2 y) \quad (\lambda_2 \neq 0)$$

или (6.4)

$$u = \lambda_1 x,\ y f_v(\lambda_1 x, v) = z + \varphi(x, v) \quad (\lambda_2 = 0)$$

с произвольной функцией φ.

Если $P = 0$, то из (6.3) при $f_{vv} \neq 0$ определяется величина

$$M(v) = R(u,v), \quad R = (\lambda_2 - \lambda_1)f_{uv}/f_{vv}, \tag{6.5}$$

присоединение которой к (6.1) дает выражения для значений операторов M, N от обоих искомых u, v. Вместе с тем вычисление значения коммутатора по формуле (6.2) от функции v приводит к равенству $\lambda_2 R_v = 0$, при выполнении которого вся система (6.1), (6.5) будет в инволюции. Поэтому надо рассмотреть две возможности: $\lambda_2 = 0$ или $\lambda_2 \neq 0$, $R_v = 0$.

Случай $\lambda_2 = 0$. Система в инволюции такова:

$$M(u) = \lambda_1,\ N(u) = 0; \quad M(v) = R(u,v), \quad N(v) = 0. \tag{6.6}$$

Отыскание решений в виде $F(x,y,z,u,v) = 0$ приводит к двум интегралам (здесь $\lambda_1 \neq 0$), дающим общее решение

$$\begin{gathered} f_v(u,v) = \varphi(u - \lambda_1 x), \\ f(u,v) = \lambda_1 z + (v - \lambda_1 y)\varphi(u - \lambda_1 x) + \psi(u - \lambda_1 x) \end{gathered} \tag{6.7}$$

с произвольными функциями φ, ψ.

Случай $\lambda_2 \neq 0$, $R_v = 0$. Здесь $R = R(u)$ и (6.5) превращается в уравнение для функции f с общим решением

$$f(u,v) = a(u) + g(v + b(u)), \tag{6.8}$$

где $a(u)$, $b(u)$ и $g(v)$ — произвольные функции, причем $g''(v) \neq 0$ и $R(u,v) = (\lambda_1 - \lambda_2)/b'(u)$. Система (6.6) снова в инволюции, и здесь ее общее решение таково:

$$\begin{gathered} g(v + b(u)) = \lambda_2 z - (\lambda_2/\lambda_1)a(u) + \varphi(u - \lambda_1 x), \\ ((\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1)b(u) = v - \lambda_2 y + \psi(u - \lambda_1 x) \end{gathered} \quad (\lambda_1 \neq 0) \tag{6.9}$$

или

$$\begin{gathered} g(v + b(u)) = \lambda_2(z - xa'(u)) + \varphi(u), \\ v = \lambda_2(y - xb'(u)) + \psi(u) \end{gathered} \quad (\lambda_1 = 0), \tag{6.10}$$

где φ, ψ — произвольные функции.

Наконец, остается еще возможность выполнения уравнения $P = 0$ с функцией f, удовлетворяющей уравнениям $f_{vv} = 0$, $f_{uv} = 0$. Все такие функции даются формулой (с точностью до эквивалентности)

$$f = v + g(u). \tag{6.11}$$

Здесь система (6.1) «распадается»:

$$u_x + g'(u)u_z = \lambda_1,\ u_y + u_z = 0; \quad v_y + v_z = \lambda_2. \tag{6.12}$$

Функция v находится сразу:

$$v = \lambda_2 y + \varphi(x, z - y) \tag{6.13}$$

с произвольной функцией φ, а u определяется из соотношения

$$g(u) + \psi(u - \lambda_1 x) = \lambda_1(z - y) \quad (\lambda_1 \neq 0)$$

или (6.14)

$$xg'(u) + \psi(u) = z - y \quad (\lambda_1 = 0)$$

с произвольной функцией ψ.

7. Простые волны. Решения системы (1.1) типа простых волн, т. е. такие, что о.р. $J = 1$, возможны, лишь если $c_3 = c_2 = 0$. Они характеризуются существованием такой функции $\xi = \xi(x, y, z)$ (параметра простой волны), с которой справедливо представление

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi). \tag{7.1}$$

Для определения параметра простой волны остается одно первое уравнение (1.1), принимающее вид (при $c_1 = 1$)

$$\mathbf{u}'(\xi) \cdot \nabla\xi = 1, \tag{7.2}$$

общее решение которого $\xi(x, y, z)$ находится элементарно и дается неявно соотношением вида

$$Q(u(\xi) - x, v(\xi) - y, w(\xi) - z) = 0 \tag{7.3}$$

с произвольными функциями Q и $\mathbf{u}(\xi)$, если $|\mathbf{u}'(\xi)| \neq 0$.

Минимизация функционального произвола в решении (7.3) показывает, что «широта» множества барохронных простых волн определяется одной произвольной функцией двух аргументов и двумя произвольными функциями одного аргумента.

Заключение. Свойство симметрии барохронных движений газа может быть использовано в нескольких направлениях. Прежде всего, допускаемая группа является источником многих классов точных решений системы (1.1) (или системы (4.2)). Такие решения, например инвариантные, находятся с помощью подгрупп из более простых и доступных детальному анализу систем дифференциальных уравнений (подмоделей для модели (1.1)). Для описания этого множества с точностью до эквивалентности, определяемой сопряженностью (подобием) подгрупп, полезно иметь список представителей классов сопряженных подгрупп (так называемую оптимальную систему подгрупп).

С точки зрения теории дифференциальных уравнений представляет интерес изучение характеристик системы (1.1) (или (4.2)). Эта задача нетривиальна ввиду того, что система (1.1) сильно нелинейна. Поведение ее характеристик (возможных поверхностей слабого разрыва решений) может быть нестандартным (классические характеристики вычисляются для линейных или квазилинейных систем дифференциальных уравнений).

Поскольку исходные уравнения газовой динамики записываются в виде «законов сохранения», позволяющих изучать также решения с сильными разрывами (ударными волнами), было бы полезно исследовать эту возможность и для системы (1.1). По-видимому, пока нет ни теории, ни содержательных примеров таких решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чупахин А. П.* О барохронных движениях газа // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 5. С. 624–626.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Овсянников Л. В.* Изобарические движения газа // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1792–1799.

Статья поступила 9 июля 2003 г.

Овсянников Лев Васильевич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
ovs@hydro.nsc.ru