Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 517.55

ОБ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ И. И. БАВРИНА И ИХ ПРИЛОЖЕНИИ К РЕШЕНИЮ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. С. Якшина

Аннотация: В классе введенных И. И. Бавриным интегродифференциальных операторов, специфических для поликруга, строится групповая структура относительно операции произведения. Указано два применения таких операторов к решению функциональных уравнений.

Ключевые слова: интегродифференциальный оператор, интегральное представление, многомерный комплексный анализ.

Развитый И. И. Бавриным (см., например, [1–3]) операторный метод позволил установить ряд результатов в теории интегральных представлений голоморфных функций и геометрической теории функций. В дальнейшем метод интегродифференциальных операторов сам подвергся изучению. В работах Г. И. Сечкина [4, 5] впервые была наведена групповая структура на множествах операторов, специфических для звездных, выпуклых и n-круговых областей пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$.

В более поздних исследованиях И. И. Баврин [2, 3] дополнил свой метод рядом новых положений, в частности, ввел класс операторов, специфических для поликруга.

В настоящей статье строится групповая структура этого класса относительно операции произведения (суперпозиции) операторов и рассматривается два применения операторов к решению функциональных уравнений. В первом из них интегродифференциальный оператор задается на множестве всех точек поликруга, а во втором — лишь на его остове.

§ 1. Группа интегродифференциальных операторов, специфических для поликруга

Рассмотрим поликруг $D = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_1| < R_1, \dots, |z_n| < R_n\}$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) и функцию $f(z)$, голоморфную в D.

Пусть l, $\tilde{l}$ — натуральные числа, $\beta_1, \dots, \beta_l$, $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{\tilde{l}}$ — любые положительные числа и

$$z^{(1)} = \big(z_1^{(1)}, \dots, z_n^{(1)}\big), \dots, z^{(l)} = \big(z_1^{(l)}, \dots, z_n^{(l)}\big),$$

$$\tilde{z}^{(1)} = \big(\tilde{z}_1^{(1)}, \dots, \tilde{z}_n^{(1)}\big), \dots, \tilde{z}^{(\tilde{l})} = \big(\tilde{z}_1^{(\tilde{l})}, \dots, \tilde{z}_n^{(\tilde{l})}\big)$$

— произвольно фиксированные точки из D. Для каждого j ($\tilde{j}$) из множества $\{1,2,\dots,l\}$ ($\{1,2,\dots,\tilde{l}\}$) пусть $\delta_1^{(j)},\dots,\delta_n^{(j)}$, $\big(\tilde{\delta}_1^{(\tilde{j})},\dots,\tilde{\delta}_n^{(\tilde{j})}\big)$ — любые неотрицательные числа с условием $\delta_1^{(j)}+\dots+\delta_n^{(j)}>0$ $\big(\tilde{\delta}_1^{(\tilde{j})}+\dots+\tilde{\delta}_n^{(\tilde{j})}>0\big)$.

Следуя [3], введем операторы

$$L_{A_jz^{(j)}}[f]=L_{\left(\beta_j,\delta_1^{(j)},\dots,\delta_n^{(j)}\right)z^{(j)}}[f]=\beta_jf+\sum_{\nu=1}^{n}\delta_\nu^{(j)}\big(z_\nu-z_\nu^{(j)}\big)f'_{z_\nu}$$

(здесь и далее $z\in D$),

$$L^{(-1)}_{A_jz^{(j)}}[f]=\int\limits_0^1\varepsilon^{\beta_j-1}f(\varepsilon^{\delta_1^{(j)}}z_1+(1-\varepsilon^{\delta_1^{(j)}})z_1^{(j)},\dots,\varepsilon^{\delta_n^{(j)}}z_n+(1-\varepsilon^{\delta_n^{(j)}})z_n^{(j)})\,d\varepsilon,$$

$j=1,\dots,l$ (при $0<\beta_j<1$ интеграл понимается как несобственный; аналогичная договоренность принимается и ниже в подобных случаях). Определим произведение (суперпозицию) операторов:

$$L^{(l)}_{Ab}[f]=L_{(A_1,\dots,A_l)(z^{(1)},\dots,z^{(l)})}[f]=L_{A_lz^{(l)}}[L_{A_{l-1}z^{(l-1)}}\dots[L_{A_1z^{(1)}}[f]]\dots],$$

$$L^{(-l)}_{Ab}[f]=L^{(-1)}_{A_1z^{(1)}}[L^{(-1)}_{A_2z^{(2)}}\dots[L^{(-1)}_{A_lz^{(l)}}[f]]\dots],$$

где $A=(A_1,\dots,A_l)$, $b=(z^{(1)},\dots,z^{(l)})$, $A_j=\big(\beta_j,\delta_1^{(j)},\dots,\delta_n^{(j)}\big)$, $j=1,\dots,l$. Положим $L^{(0)}_{Ab}[f]=f$.

Дифференциальный и интегральный операторы $L_{A_jz^{(j)}}[f]$ и $L^{(-1)}_{A_jz^{(j)}}[f]$ взаимно обратны [3]:

$$L^{(-1)}_{A_jz^{(j)}}[L_{A_jz^{(j)}}[f]]=L_{A_jz^{(j)}}[L^{(-1)}_{A_jz^{(j)}}[f]]=f.$$

Взаимно обратны и операторы $L^{(l)}_{Ab}[f]$ и $L^{(-l)}_{Ab}[f]$, а также операторы $L^{(\tilde{l})}_{\widetilde{A}\tilde{b}}[f]$ и $L^{(-\tilde{l})}_{\widetilde{A}\tilde{b}}[f]$ (здесь и далее $\widetilde{A}=(\widetilde{A}_1,\dots,\widetilde{A}_{\tilde{l}})$, $\widetilde{A}_{\tilde{j}}=\big(\tilde{\beta}_{\tilde{j}},\tilde{\delta}_1^{(\tilde{j})},\dots,\tilde{\delta}_n^{(\tilde{j})}\big)$, $\tilde{j}=1,\dots,\tilde{l}$, $\tilde{b}=(\tilde{z}^{(1)},\dots,\tilde{z}^{(\tilde{l})})$).

Пусть теперь l и $\tilde{l}$ — целые неотрицательные числа. Обозначим через Ω множество операторов, полученных произвольным произведением (суперпозицией) операторов $L_{A_jz^{(j)}}[f]$ и $L^{(-1)}_{A_jz^{(j)}}[f]$. В Ω для каждого интегродифференциального оператора найдется ему обратный, например, операторы $L^{(l,-\tilde{l})}_{Ab\ \widetilde{A}\tilde{b}}[f]=L^{(-\tilde{l})}_{\widetilde{A}\tilde{b}}\big[L^{l}_{Ab}[f]\big]$, $L^{(\tilde{l},-l)}_{\widetilde{A}\tilde{b}\ \ Ab}[f]=L^{-l}_{Ab}\big[L^{(\tilde{l})}_{\widetilde{A}\tilde{b}}[f]\big]$ взаимно обратны.

Покажем, что в множестве Ω выполняется ассоциативный закон. В самом деле, взяв, например, три оператора $L_{A_1z^{(1)}}[f]$, $L_{A_2z^{(2)}}[f]$, $L_{A_3z^{(3)}}[f]$, докажем формулу

$$L_{A_1z^{(1)}}[L_{A_2z^{(2)}}[L_{A_3z^{(3)}}[f]]]=[L_{A_1z^{(1)}}[L_{A_2z^{(2)}}]][L_{A_3z^{(3)}}[f]].$$

Для этого введем обозначение для их однородных частей:

$$D_m=\sum_{\nu=1}^{n}\delta_\nu^{(m)}\big(z_\nu-z_\nu^{(m)}\big)\frac{\partial}{\partial z_\nu},\quad m=1,2,3,$$

и найдем произведение операторов. С одной стороны, получаем

$$\begin{aligned}
L_{A_1z^{(1)}}\left[L_{A_2z^{(2)}}\left[L_{A_3z^{(3)}}[f]\right]\right] &= (\beta_1+D_1)[(\beta_2+D_2)[\beta_3 f+D_3[f]]] \\
&= \beta_1\beta_2\beta_3 f+\beta_1\beta_3D_2[f]+\beta_1\beta_2D_3[f]+\beta_1D_2[D_3[f]] \\
&\quad +\beta_1\beta_3D_1[f]+\beta_3D_1[D_2[f]]+\beta_2D_1[D_3[f]]+D_1[D_2[D_3[f]]].
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
[L_{A_1z^{(1)}}[L_{A_2z^{(2)}}]][L_{A_3z^{(3)}}[f]] &= [(\beta_1+D_1)[(\beta_2+D_2)]][\beta_3 f+D_3[f]] \\
&= \beta_1\beta_2\beta_3 f+\beta_1\beta_2D_3[f]+\beta_2\beta_3D_1[f]+\beta_2D_1[D_3[f]] \\
&\quad +\beta_1\beta_3D_2[f]+\beta_1D_2[D_3[f]]+\beta_3D_1[D_2[f]]+D_1[D_2[D_3[f]]].
\end{aligned}$$

Сравнивая результаты, убеждаемся в справедливости равенства.

Следовательно, все аксиомы определения группы для множества Ω выполняются.

Установим, что входящие в суперпозицию $L_{Ab}^{(l)}[f]$ дифференциальные операторы первого порядка не обладают, вообще говоря, коммутативным свойством. Действительно, взяв, например, два оператора $L_{A_1z^{(1)}}[f]$, $L_{A_2z^{(2)}}[f]$ и учтя, что

$$\begin{aligned}
L_{A_1z^{(1)}}\left[L_{A_2z^{(2)}}[f]\right] &= (\beta_1+D_1)[\beta_2 f+D_2[f]] \\
&= \beta_1\beta_2 f+\beta_2D_1[f]+\beta_1D_2[f]+D_1[D_2[f]],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{A_2z^{(2)}}\left[L_{A_1z^{(1)}}[f]\right] &= (\beta_2+D_2)[\beta_1 f+D_1[f]] \\
&= \beta_1\beta_2 f+\beta_2D_1[f]+\beta_1D_2[f]+D_2[D_1[f]],
\end{aligned}$$

делаем вывод о том, что правые части полученных выражений совпадают в случае $D_1[D_2[f]] = D_2[D_1[f]]$. Расписывая обе части последнего равенства в явном виде и производя сравнение полученных выражений, заключаем, что они будут совпадать в том случае, если

$$\sum_{\nu=1}^{n}\delta_\nu^{(1)}\delta_\nu^{(2)}\left(z_\nu-z_\nu^{(1)}\right)\frac{\partial f}{\partial z_\nu}=\sum_{\nu=1}^{n}\delta_\nu^{(1)}\delta_\nu^{(2)}\left(z_\nu-z_\nu^{(2)}\right)\frac{\partial f}{\partial z_\nu},$$

т. е. при $z^{(1)} = z^{(2)}$. Отсюда делаем вывод о том, что входящие в суперпозицию $L_{Ab}^{(l)}[f]$ операторы можно произвольным образом менять местами в том случае, если $z^{(1)} = z^{(2)} = \dots = z^{(l)}$.

Теорема 1. *Множество Ω относительно операции произведения (суперпозиции) операторов образует свободную неабелеву группу с континуальной системой образующих.*

Доказательство. Установим изоморфизм между свободной неабелевой группой S с множеством континуальной мощности I, взятым в качестве системы свободных образующих, и множеством интегродифференциальных операторов Ω.

Индексы $A_jz^{(j)} = \left(\beta_j;\delta_1^{(j)},\delta_2^{(j)},\dots,\delta_n^{(j)};z_1^{(j)},z_2^{(j)},\dots,z_n^{(j)}\right)$ представляют собой элементы декартова произведения следующих множеств: действительных положительных чисел, n-х степеней действительных неотрицательных чисел и n-мерного комплексного пространства. Обозначим это декартово произведение через I. В силу определения множество I имеет мощность континуума.

Рассмотрим свободную неабелеву группу S с континуальной системой свободных образующих I. Символу $x_{A_j z^{(j)}}$ сопоставим дифференциальный оператор $L_{A_j z^{(j)}}[f]$, а символу $x^{(-1)}_{A_j z^{(j)}}$ — интегральный оператор $L^{(-1)}_{A_j z^{(j)}}[f]$. Тогда S изоморфно отображается на множество конечных произведений операторов $L_{A_j z^{(j)}}[f]$ и $L^{(-1)}_{A_j z^{(j)}}[f]$, т. е. на множество Ω. Но всякий изоморфный образ группы S является свободной неабелевой группой с континуальной системой образующих.

§ 2. Применение к решению функциональных уравнений

Укажем два применения рассматриваемых операторов к решению интегродифференциальных уравнений специального вида.

Теорема 2. *Функциональное уравнение*

$$f = L^{(l,-\tilde{l})}_{Ab\;\widetilde{A}\tilde{b}}[F] \tag{1}$$

относительно неизвестной функции $F = F(z)$, где $f = f(z)$ — известная голоморфная в поликруге D функция, имеет решение вида

$$F = L^{(\tilde{l},-l)}_{\widetilde{A}\tilde{b}\;Ab}[f],$$

причем F — также голоморфная в D функция.

Доказательство основано на том, что при указанных условиях существует оператор, обратный оператору, стоящему в правой части уравнения (1).

Один из результатов работы [2] по теории интегральных представлений голоморфных функций состоит в следующем.

Пусть Δ — $(n-1)$-мерный симплекс:

$$\Delta = \{\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) : \tau_1 + \dots + \tau_n = 1, \quad \tau_1 > 0, \dots, \tau_n > 0\}$$
$$= \{\tau : \tau_1 = 1 - \tau_2 - \dots - \tau_n, \quad (\tau_2, \dots, \tau_n) \in \Delta^*\},$$

где $\Delta^* = \{(\tau_2, \dots, \tau_n) : 0 < \tau_2 < 1,\ 0 < \tau_3 < 1-\tau_2, \dots,\ 0 < \tau_n < 1-\tau_2-\dots-\tau_{n-1}\}$.

Положим

$$\int d\omega_\tau = \int\limits_{\Delta^*} d\tau_2 \dots d\tau_n, \quad \int d\omega_\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta_2 \cdots \int\limits_0^{2\pi} d\theta_n.$$

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в поликруге D и все ее частные производные до порядка μ $(\mu = 0, 1, 2, \dots)$ включительно непрерывны в $D \cup S$, где $S = \{z : |z_\nu| = R_\nu,\ \nu = 1, \dots, n\}$ — остов D. Тогда для $l = 0, 1, 2, \dots, \mu$, $\tilde{l} = 0, 1, 2, \dots$ и $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n i} \int d\omega_\tau \int d\omega_\theta \int\limits_{|\varsigma|=1} L^{(n-1)}_{1,n-1}\left[L^{(\tilde{l},-l)}_{\widetilde{A}\tilde{b}\quad Ab}\left[\frac{1}{\varsigma - u}\right]\right] L^{(l,-\tilde{l})}_{Ab\quad\widetilde{A}\tilde{b}}[F_0(\varsigma, R, \theta)]\, d\varsigma, \tag{2}$$

где

$$u = R_1^{-1}\tau_1 z_1 + \sum_{\nu=2}^{n} R_\nu^{-1}\tau_\nu e^{-i\theta_\nu} z_\nu, \quad F_0(\varsigma, R, \theta) = f(R_1\varsigma, R_2\varsigma e^{i\theta_2}, \dots, R_n\varsigma e^{i\theta_n}),$$

$$L^{(n-1)}_{1,n-1}[f] = L_{n-1}[L_{n-2}\dots[L_1[f]]\dots], \quad L_m[f] = mf + z_1 f'_{z_1} + \dots + z_n f'_{z_n}.$$

Формула (2) выражает значения функции $f(z)$ в поликруге D через значения интегродифференциального оператора $L^{(l,-\tilde{l})}_{Ab\ \ \widetilde{A}\tilde{b}}[f]$ на остове S этого поликруга.

Рассмотрим функциональное относительно неизвестной функции $F = F(z)$ уравнение

$$f = L^{(l,-\tilde{l})}_{Ab\ \ \widetilde{A}\tilde{b}}[F], \tag{3}$$

где $f = f(z)$ — голоморфная в поликруге D и непрерывная в $D \cup S$ вместе со всеми своими частными производными до порядка k включительно функция.

Обозначим через $L^{(k,-\widetilde{k})}_{\acute{A}\acute{b}\ \ \widetilde{\acute{A}}\widetilde{\acute{b}}}[f]$ оператор, аналогичный $L^{(l,-\tilde{l})}_{Ab\ \ \widetilde{A}\tilde{b}}[f]$, а через $L^{(\widetilde{k},-k)}_{\widetilde{\acute{A}}\widetilde{\acute{b}}\ \ \acute{A}\acute{b}}[f]$ — оператор, взаимно обратный ему.

Теорема 3. *Если заданы значения оператора*

$$L^{(k,-\widetilde{k})}_{\acute{A}\acute{b}\ \ \widetilde{\acute{A}}\widetilde{\acute{b}}}[F_0(\varsigma, R, \theta)]$$

на остове S поликруга D, то уравнение (3) *имеет в D голоморфное решение вида*

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi)^n i} \int d\omega_\tau \times \int d\omega_\theta \int\limits_{|\varsigma|=1} L^{(\tilde{l},-l)}_{\widetilde{A}\tilde{b}\ \ Ab} \left[L^{(n-1)}_{1,n-1} \left[L^{(\widetilde{k},-k)}_{\widetilde{\acute{A}}\widetilde{\acute{b}}\ \ \acute{A}\acute{b}} \left[\frac{1}{\varsigma - u} \right] \right] \right] L^{(k,-\widetilde{k})}_{\acute{A}\acute{b}\ \ \widetilde{\acute{A}}\widetilde{\acute{b}}}[F_0(\varsigma, R, \theta)]\, d\varsigma. \tag{4}$$

Доказательство. Функция f, определенная уравнением (3), в силу условий теоремы может быть представлена формулой (2):

$$L^{(l,-\tilde{l})}_{Ab\ \ \widetilde{A}\tilde{b}}[F(z)] = \frac{1}{(2\pi)^n i} \times \int d\omega_\tau \int d\omega_\theta \int\limits_{|\varsigma|=1} L^{(n-1)}_{1,n-1} \left[L^{(\widetilde{k},-k)}_{\widetilde{\acute{A}}\widetilde{\acute{b}}\ \ \acute{A}\acute{b}} \left[\frac{1}{\varsigma - u} \right] \right] L^{(k,-\widetilde{k})}_{\acute{A}\acute{b}\ \ \widetilde{\acute{A}}\widetilde{\acute{b}}}[F_0(\varsigma, R, \theta)]\, d\varsigma.$$

Применим к ней оператор $L^{(\tilde{l},-l)}_{\widetilde{A}\tilde{b}\ \ Ab}[f]$, взаимно обратный к $L^{(l,-\tilde{l})}_{Ab\ \ \widetilde{A}\tilde{b}}[f]$,

$$L^{(\tilde{l},-l)}_{\widetilde{A}\tilde{b}\ \ Ab} \left[L^{(l,-\tilde{l})}_{Ab\ \ \widetilde{A}\tilde{b}}[F(z)] \right] = \frac{1}{(2\pi)^n i} L^{(\tilde{l},-l)}_{\widetilde{A}\tilde{b}\ \ Ab} \times \left[\int d\omega_\tau \int d\omega_\theta \int\limits_{|\varsigma|=1} L^{(n-1)}_{1,n-1} \left[L^{(\widetilde{k},-k)}_{\widetilde{\acute{A}}\widetilde{\acute{b}}\ \ \acute{A}\acute{b}} \left[\frac{1}{\varsigma - u} \right] \right] L^{(k,-\widetilde{k})}_{\acute{A}\acute{b}\ \ \widetilde{\acute{A}}\widetilde{\acute{b}}}[F_0(\varsigma, R, \theta)]\, d\varsigma \right].$$

Используя теорему Фубини и теорему о дифференцировании интеграла по параметру, получаем формулу (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баврин И. И.* К теории интегральных представлений голоморфных функций // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180, № 1. С. 12–14.
2. *Баврин И. И.* Операторы и интегральные представления в случае поликруга // Сообщ. АН Груз. ССР. 1976. Т. 84, № 3. С. 537–540.

3. *Баврин И. И.* Операторный метод в комплексном анализе. М.: Прометей, 1991.

4. *Сечкин Г. И.* Операторный метод Баврина и интегральные представления, связанные с группами и полугруппами операторов // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217, № 4. С. 770–773.

5. *Сечкин Г. И.* Группы операторов для выпуклых и звсздных областей и их приложение к решению функциональных уравнений // Математический анализ и теория функций: Респ. сб. тр. 1973. № 2. С. 60–67.

Статья поступила 4 февраля 2003 г.

Якшина Анна Сергеевна
Благовещенский гос. педагогический университет,
кафедра математического анализа,
ул. Ленина, 104, Благовещенск 675000, Амурская обл.
Yakshina@freemail.ru