Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 517.5

БАЗИСНЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ, КОСИНУСОВ И СИНУСОВ

Б. Т. Билалов

Аннотация: Рассматриваются системы экспонент, косинусов и синусов с комплекснозначными коэффициентами. Установлено необходимое и достаточное условие полноты и минимальности этих систем в лебеговых пространствах.

Ключевые слова: базисность, полнота, минимальность.

Рассмотрим следующие системы экспонент, косинусов и синусов:

$$\{A(t)e^{int}; B(t)e^{-ikt}\}_{n\geq 0,\, k\geq 1}; \tag{1}$$

$$\{\cos(nt+\gamma(t)); \sin(nt+\gamma(t))\}, \quad n\geq 0, \tag{2}$$

где $A(t)=|A(t)|e^{i\alpha(t)}$, $B(t)=|B(t)|e^{i\beta(t)}$ и $\gamma(t)$ — комплекснозначные функции на отрезке $[-\pi,\pi]$.

После работ Р. Пэли, Н. Винера [1] и Б. Я. Левина [2] возрос интерес к изучению базисных свойств систем (1), (2). В дальнейшем подобные вопросы рассматривались многими авторами. Существенные результаты относительно системы экспонент вида (1) $\exp[i(n+\beta\cdot\operatorname{sign}(n))t]$, $n=0,\pm1,\dots$, когда $\beta\in\mathbb{C}$, вообще говоря, комплексный параметр, получены в работах А. М. Седлецкого [3, 4] и Е. И. Моисеева [5]. Как показано в [5, 6], при $\beta=\frac{1}{2p}$ эта система полна и минимальна в $L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$, но не образует в нем базиса. Оказывается, это явление неслучайно. Оно вызвано наличием точки разрыва функции τ^β ($|\tau|=1$) на единичной окружности. В дальнейшем при более общих предположениях на функции $A(t)$, $B(t)$ и $\gamma(t)$ базисность в L_p систем (1), (2) изучена в работе автора [7]. В [7] для базисности системы (1) в L_p требовалось выполнение условия 4 вида $\tilde{h}_i\neq\frac{2\pi}{p}+2\pi k$ для каждого $k\in\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ — множество целых чисел), где $\tilde{h}_i$ — скачки функции $[\alpha(t)-\beta(t)]$ на $[-\pi,\pi]$. В настоящей работе показывается, что эти ограничения являются излишними для полноты и минимальности, но необходимы для базисности в L_p.

Отметим, что в случае, когда $\gamma(t)$ кусочно гёльдерова на $[-\pi,\pi]$, необходимое и достаточное условие (далее для простоты будем сокращенно писать НДУ) полноты и минимальности системы (2) в L_p, $1<p<+\infty$, найдено в работе [8] в ином виде.

Отдельно будем рассматривать случай $p=1$. НДУ полноты и минимальности систем (1), (2) в L_1 ранее не изучено. Часть результатов работы без доказательств приведена в [9].

1. Обозначения и основные предположения

Для удобства примем следующие обозначения: $L_p \equiv L_p(-\pi,\pi)$, $1 \le p < +\infty$; $L[M]$ — замыкание линейной оболочки множества M в банаховом пространстве $\mathscr{B}$; $X_k \overset{\text{def}}{\equiv} \{x_i\}_{i=k}^{+\infty}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\mathscr{B}_i$ — банахово пространство.

Будем предполагать, что функции $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют следующим условиям.

1. $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — кусочно непрерывные функции на $[-\pi,\pi]$, у которых допускается бесконечное число точек разрывов первого рода. Пусть $\{\tilde{s}_k\} \equiv \{t_k\} \cup \{\tau_k\}$, где $\{t_k\}$, $\{\tau_k\}$ — точки разрыва этих функций в $(-\pi,\pi)$ соответственно. Множество $\{\tilde{s}_k\}$ может иметь единственную предельную точку $s_0 \in (-\pi,\pi)$, и функция $\theta(t) \equiv \beta(t) - \alpha(t)$ (не ограничивая общности, будем считать, что она непрерывна слева в точках $\{\tilde{s}_k\}$ и $\theta(-\pi) = \theta(-\pi+0)$) имеет в точке s_0 справа и слева конечные пределы.

2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\tilde{h}_i| < +\infty$, где $\tilde{h}_i = \theta(\tilde{s}_i+0) - \theta(\tilde{s}_i-0)$, $i = \overline{1,\infty}$.

3. $|A(t)|$, $|B(t)|$ измеримы на $(-\pi,\pi)$ и удовлетворяют условию

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{(-\pi,\pi)} \{|A(t)|^{\pm 1}; |B(t)|^{\pm 1}\} < +\infty.$$

Прежде чем сформулировать теорему, определим некоторые величины, необходимые в дальнейшем.

Обозначим через r номер, после которого выполняется условие

$$-\frac{2\pi}{q} < \tilde{h}_k < \frac{2\pi}{p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad k = \overline{r,\infty}. \tag{3}$$

Пронумеруем элементы множества $\{\tilde{s}_i\}_1^r$ по возрастанию и обозначим через $\{s_i\}_1^r$. Перенумеруем соответствующие им скачки $\{\tilde{h}_i\}_1^r$ и обозначим через $\{h_i\}_1^r$. В зависимости от того, принадлежит ли $\tilde{h}_0 = \theta(s_0+0) - \theta(s_0-0)$ интервалу $(-\frac{2\pi}{q}, \frac{2\pi}{p})$, точка $\tilde{s}_0$ и число $\tilde{h}_0$ могут быть включены в множества $\{\tilde{s}_i\}_1^r$ и $\{\tilde{h}_i\}_1^r$ соответственно.

Определим целые числа n_i, $i = \overline{1,r}$, из следующих условий:

$$-\frac{1}{q} < \frac{h_i}{2\pi} + n_{i-1} - n_i \le \frac{1}{p}, \; i = \overline{1,r}; \quad n_0 = 0. \tag{4}$$

Обозначим

$$\omega = \theta(-\pi+0) - \theta(\pi-0) + 2\pi \cdot n_r. \tag{5}$$

Сформулируем основную теорему.

Теорема 1. *Пусть комплекснозначные функции $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют условиям 1–3. Целое число n_r определяется из условий (3), (4). Система (1) полна в L_p тогда и только тогда, когда $\omega \le \frac{2\pi}{p}$, и минимальна в L_p тогда и только тогда, когда $\omega > -\frac{2\pi}{q}$.*

2. Вспомогательные леммы

При доказательстве основной теоремы существенную роль играют следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть система X_1 полна и минимальна в $\mathscr{B}$, $\{y_i\}_{i\geq 1}\subset\mathscr{B}^*$ — соответствующая биортогональная система, где $\mathscr{B}^*$ — сопряженное пространство. Пусть $V\equiv\{f\in\mathscr{B}^*,\ f(x_i)=0\ \forall i\geq n+1\}$ при некотором $n\in\mathbb{N}$. Тогда $L\big[\{y_i\}_{i=1}^n\big]\equiv V$.*

Доказательство. Ясно, что $L\big[\{y_i\}_{i=1}^n\big]\subset V$. Пусть $f\in V$, но $f\notin L\big[\{y_i\}_{i=1}^n\big]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(x_1)\neq 1$. Обозначим $g=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i y_i+f$, где $\alpha_1=1-f(x_1)$, $\alpha_i=-f(x_i)$, $i=\overline{2,n}$. Тогда нетрудно заметить, что $\{g\}\cup\{y_i\}_{i\geq 2}$ является биортогональной к системе X_1. Из единственности биортогональной к полной системе получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть система $X_0\subset\mathscr{B}_1$ минимальна в $\mathscr{B}_1$, а система $X_{-n}\subset\mathscr{B}_2\subset\mathscr{B}_1$ полна и минимальна в $\mathscr{B}_2$ при некотором $n\in\mathbb{N}$, причем из сходимости в $\mathscr{B}_2$ следует сходимость в $\mathscr{B}_1$. Если $L\big[\{y_i\}_{i=-n}^{-1}\big]\cap\mathscr{B}_1^*=\{0\}$, то X_0 полна в $\mathscr{B}_1$, где $\{y_i\}_{i\geq -n}$ — биортогональная к X_{-n} система в $\mathscr{B}_2$.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathscr{B}_1^*\subset\mathscr{B}_2^*$. Пусть X_0 не полна в $\mathscr{B}_1$. Тогда найдется $f\in\mathscr{B}_1^*$, $f\neq 0$, для которой $f(x_i)=0\ \forall i\geq 0$. Так как $f\in\mathscr{B}_2^*$, из леммы 1 следует, что $f\in L\big[\{y_i\}_{i=-n}^{-1}\big]$, т. е. $f=\sum\limits_{i=1}^n\beta_i y_{-i}$. Из $L\big[\{y_i\}_{i=-n}^{-1}\big]\cap B_1^*=\{0\}$, вытекает, что $\beta_i=0$, $i=\overline{1,n}$, и тем самым $f=0$. Лемма доказана.

Лемма 3. *При выполнении условий теоремы 1 функция $\theta(t)$ имеет представление $\theta(t)=\theta_0(t)+\theta_1(t)$, где $\theta_0(t)$ — непрерывная функция на $[-\pi,\pi]$, $\theta_1(t)$ — функция скачков:*

$$\theta_1(-\pi)=0,\ \theta_1(s)=[\theta(-\pi+0)-\theta(-\pi)]+\sum_{-\pi<\tilde{s}_k<s}\tilde{h}_k+[\theta(s)-\theta(s-0)],\ -\pi<s\leq\pi.$$

Доказательство. Учитывая, что функция $\theta(s)$ непрерывна слева и $\theta(-\pi)=\theta(-\pi+0)$, для $\theta_1(s)$ имеем выражение

$$\theta_1(-\pi)=0,\quad \theta_1(s)=\sum_{-\pi<\tilde{s}_k<s}\tilde{h}_k.$$

Покажем, что функция $\theta_0(s)=\theta(s)-\theta_1(s)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$. Непрерывность этой функции в любой точке $s\neq s_0$ проверяется непосредственно. Докажем непрерывность $\theta_0(s)$ в точке s_0. Пусть $s>s_0$. Если справа от точки s_0 находится конечное число $\tilde{s}_k$, то очевидно, что $\theta_1(s+0)=\sum\limits_{-\pi<\tilde{s}_k\leq s_0}\tilde{h}_k$. В противном случае $\theta_1(s)$ представим в виде

$$\theta_1(s)=\sum_{-\pi<\tilde{s}_k\leq s_0}\tilde{h}_k+\sum_{s_0<\tilde{s}_k<s}\tilde{h}_k. \tag{6}$$

Из абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_1^\infty\tilde{h}_k$ следует, что ряд $\sum\limits_{s_0<\tilde{s}_k}\tilde{h}_k$ тоже сходится. Перенумеруем элементы последовательности $\{\tilde{h}_k>s_0\}$ по убыванию и обозначим их через $\{x_k\}$, $x_1>x_2>\ldots$. Ясно, что $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=s_0$. Соответствующие им скачки обозначим через $\{\omega_k\}$. Очевидно, что ряд $\sum\limits_1^\infty\omega_k$ сходится. Для любой точки $s>s_0$, достаточно близкой к s_0, существует номер p_k, для которого $x_{p_k} < s \le x_{p_{k+1}}$. Из $s \to s_0$ следует, что $p_k \to +\infty$. Из абсолютной сходимости получаем равенство $\sum\limits_{n=p_k}^{\infty} \omega_n = \sum\limits_{s_0<\tilde{s}_k<s} \tilde{h}_k$. Тогда из представления (6) имеем

$$\theta_1(s_0+1) = \sum_{-\pi<\tilde{s}_k\le s_0} \tilde{h}_k + \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=p_k}^{\infty} \omega_n\right) = \sum_{-\pi<\tilde{s}_k\le s_0} \tilde{h}_k.$$

Из вида $\theta_1(s)$ легко получить, что

$$\theta_1(s_0-0) = \sum_{-\pi<\tilde{s}_k<s_0} \tilde{h}_k.$$

В результате $\theta_1(s_0+0)-\theta_1(s_0-0) = h_0 = \theta(s_0+0)-\theta(s_0-0)$, т. е. $\theta(s_0-0) = \theta(s_0+0)$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Сначала рассмотрим случай, когда $n_i = 0$, $i=\overline{1,r}$. Выделим из множества $\{s_i\}_1^r$ те точки, в которых для соответствующих скачков в условиях (4) достигается равенство. Обозначим их через s_{i_k}, $k=\overline{1,m}$. В этих точках $h_{i_k} = \frac{2\pi}{p}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $-\pi < s_{i_1} < \ldots < s_{i_m} \le \pi$. При $s_{i_m} = \pi$ считаем, что $h_{i_m} = \omega$. Сначала предположим, что $-\frac{2\pi}{q} < \omega \le \frac{2\pi}{p}$. Ясно, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства

$$-\frac{2\pi}{q_\varepsilon} < \tilde{h}_i < \frac{2\pi}{p-\varepsilon}, \quad -\frac{2\pi}{q_\varepsilon} < h_0 < \frac{2\pi}{p-\varepsilon}, \quad -\frac{1}{q_\varepsilon} + \frac{1}{p-\varepsilon} = 1, \quad p-\varepsilon > 1.$$

Тогда согласно результатам работы [7] система (1) образует базис в $L_{p-\varepsilon}$. Следовательно, она минимальна в L_p.

Преобразуем систему (1). Введем функции

$$\nu_0(t) = \begin{cases} -2\pi k, & t\in[s_{i_k}, s_{i_{k+1}}),\ k=\overline{1,m}, \\ 0, & t\notin[s_{i_1},\pi],\ s_{i_{m+1}} = \pi, \end{cases}$$

$$B_0(t) \equiv B(t)\cdot e^{i\nu_0(t)}; \quad \beta_0(t) \equiv \arg B_0(t) = \beta(t)+\nu_0(t),$$

$$A_0(t) \equiv A(t)\cdot \begin{cases} e^{-imt} & \text{при } \omega \ne \frac{2\pi}{p}, \\ e^{-i(m+1)t} & \text{при } \omega = \frac{2\pi}{p}, \end{cases}$$

$$\alpha_0(t) \equiv \arg A_0(t) \equiv \begin{cases} \alpha(t)-mt & \text{при } \omega \ne \frac{2\pi}{p}, \\ \alpha(t)-(m+1)t & \text{при } \omega = \frac{2\pi}{p}. \end{cases}$$

Очевидно, что точки разрыва функции $\theta_0(t) \equiv \beta_0(t)-\alpha_0(t)$ совпадают с точками разрывов $\theta(t)$ и соответствующие скачки $\left\{h_i^0\right\}$ будут такими: $h_i^0 = \tilde{h}_i$ при $i\ne i_k$, $k=\overline{1,m}$, и $h_{i_k}^0 = h_{i_k}-2\pi$, $k=\overline{1,m}$.

Введем в рассмотрению следующую систему:

$$\{A_0(t)e^{int};\ B_0(t)e^{-ikt}\}_{n\ge0,k\ge1}. \tag{7}$$

Нетрудно заметить, что величина (5), соответствующая этой системе, равна $\omega_0 = \theta_0(-\pi+0)-\theta_0(\pi)$ при $\omega \ne \frac{2\pi}{p}$ и $\omega_0 = \omega-2\pi$ при $\omega = \frac{2\pi}{p}$.

Далее, рассмотрим следующую задачу сопряжения в классе Харди $H_{p+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число: найти аналитические функции $F^+(z)$ и

$F^-(z)$ из классов $H^+_{p+\varepsilon}$ и $H^-_{p+\varepsilon}$ соответственно, некасательные граничные значения которых на единичной окружности почти всюду удовлетворяют соотношению

$$F^+(e^{it}) + G(t)F^-(e^{it}) = A_0^{-1}(t)\psi(t), \quad F^-(\infty) = 0, \quad -\pi < t < \pi, \tag{8}$$

где $G(t) = \frac{B_0(t)}{A_0(t)}$, $\psi \in L_p$ — любая функция. Лемма 3 позволяет применить метод, разработанный в [10], к решению этой задачи. Обозначим через $Z_0(z)$ каноническое решение однородной задачи, соответствующей (8).

Следуя [10], разобьем множество чисел $\{h_k^0\}$ на два множества. К первому множеству отнесем положительные числа среди h_k^0 и обозначим его через $\{h_k^+\}$, к второму — все отрицательные числа среди $\left\{h_k^0\right\}$ и через $\{h_k^-\}$ обозначим множество их абсолютных значений. В этом процессе число $h_0 = \omega_0$ тоже включаем в множество $\left\{h_k^0\right\}$.

Соответственно разбиению множества $\left\{h_k^0\right\}$ разбивается и множество $\{\tilde{s}_k\}$ на множества $\left\{s_k^+\right\}$ и $\left\{s_k^-\right\}$. Обозначим

$$U^\pm(\sigma) = \prod_i \left\{\sin\left|\frac{\sigma - s_i^\pm}{2}\right|\right\}^{h_i^\pm/2\pi},$$

$$U_0(\sigma) = \left\{\sin\left|\frac{\sigma+\pi}{2}\right|\right\}^{-h_0^{(0)}/2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta_0(s)\, ctg\frac{\sigma - s}{2}\, ds\right\},$$

где $h_0^{(0)} = \theta_0(\pi) - \theta_0(-\pi)$.

В этих обозначениях граничные значения функции $Z_0^\pm(t)$ на единичной окружности выражается формулой [10, с. 80]

$$|Z_0^\pm(e^{i\sigma})| = \left|\frac{B(\sigma)}{A(\sigma)}\right|^{\pm\frac{1}{2}} U_0(\sigma)[U^+(\sigma)]^{-1}U^-(\sigma)\left\{\sin\left|\frac{\sigma+\pi}{2}\right|\right\}^{h_0/2\pi}.$$

Нетрудно заметить, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства

$$-\frac{2\pi}{q_\varepsilon} < h_i^0 < \frac{2\pi}{p+\varepsilon}, \quad -\frac{2\pi}{q_\varepsilon} < h_0 < \frac{2\pi}{p+\varepsilon}$$

при $i = i_k$, $k = \overline{1,m}$, где $\frac{1}{q_\varepsilon} + \frac{1}{p+\varepsilon} = 1$. Тогда по результатам работы [7] система $\{A_0(t)e^{int}; B_0(t)e^{-ikt}\}_{n\geq 0, k\geq 1}$ образует базис в $L_{p+\varepsilon}$.

Соответствующая биортогональная система $\left\{h_n^+(\sigma); h_k^-(\sigma)\right\}_{n\geq 0, k\geq 1}$ имеет вид

$$h_n^+(\sigma) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} b_{n-k}^+ e^{-ik\sigma}}{2\pi Z_0^+(e^{i\sigma})A(\sigma)}, \quad h_n^-(\sigma) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_{n-k}^- e^{ik\sigma}}{2\pi Z_0^+(e^{i\sigma})A(\sigma)},$$

$\left\{b_n^+; b_n^-\right\}_{n\geq 0, k\geq 1}$ — определенная последовательность комплексных чисел. Нетрудно заметить, что $\left|h_n^+(\sigma)\right|$ можно представить в виде

$$\left|h_n^+(\sigma)\right| = \frac{C(\sigma)\left|\sum\limits_{k=0}^{n} b_{n-k}^+ e^{-ik\sigma}\right|}{\prod\limits_{i=1}^{m} |e^{i\sigma} - e^{is_{i_k}}|^{\frac{1}{q}}},$$

где функция $C(\sigma) \geq \delta > 0$ в нуль не обращается. Из этого представления легко следует, что $L\big[\{h_n^+\}_{n=0}^{m-1}\big]$ не принадлежит пространству L_q. Тогда по лемме 2 система (1) полна и минимальна в L_p. Пусть теперь $\omega \leq -\frac{2\pi}{q}$, например $-\frac{2\pi}{q} - 2\pi < \omega \leq -\frac{2\pi}{q}$. В этом случае система $\{A(t)e^{int}; B(t)e^{-ikt}\}_{n\geq 1}$ полна и минимальна, значит, система (1) полна, но не минимальна в L_p. Аналогично доказываются остальные случаи.

Пусть $r > 1$. Введем следующую функцию:

$$g(t) \cong \begin{cases} 1, & -\pi \leq t < s_1, \\ e^{in_1\pi}, & s_1 \leq t < s_2, \\ \ldots\ldots & \\ e^{in_r\pi}, & s_r \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Очевидно, что $g(t) \equiv g^{-1}(t)$. Умножая каждый член системы (1) на $g(t)$, получим новую систему

$$\{\widetilde{A}(t)e^{int}; \widetilde{B}(t)e^{-ikt}\}_{n\geq 0, k\geq 1},$$

где $\widetilde{A}(t) \equiv g(t)A(t)$, $\widetilde{B}(t) \equiv g(t)B(t)$.

Для этой системы соответствующее число, определенное из (3), равно единице. Более того, она полна и минимальна в L_p тогда и только тогда, когда система (1) обладает соответствующим свойством. Теорема доказана.

Замечание 1. Как вытекает из доказательства теоремы, если к системе (1) добавить m функций (m — число равенств в условиях (4)), то она становится базисом в $L_{p+\varepsilon}$, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Следствие 1. *Пусть $A(t), B(t) \in C[-\pi,\pi]$, $A(t)B(t) \neq 0$ $\forall t \in [-\pi,\pi]$. Обозначим $\omega_0 = \theta(-\pi) - \theta(\pi)$, где $\theta(t) \equiv \arg B(t) - \arg A(t)$. Система (1) полна в L_p тогда и только тогда, когда $\omega_0 \leq \frac{2\pi}{p}$, а ее минимальность в L_p равносильна тому, что $\omega_0 > -\frac{2\pi}{q}$.*

Справедлива следующая

Лемма 4. *Система (2) полна (минимальна) в L_p тогда и только тогда, когда система*

$$\{e^{i\gamma(t)}e^{int}; e^{-i\gamma(t)}e^{-int}\}_0^\infty \tag{9}$$

полна (минимальна) в L_p.

Используя эту лемму и применяя теорему 1 к системе (9), выводим

Следствие 2. *Пусть функции $A(t) \equiv e^{i\gamma(t)}$, $B(t) \equiv e^{-i\gamma(t)}$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Обозначим $\omega_\gamma = \gamma(\pi - 0) - \gamma(-\pi + 0) + n_r\pi$, где целое число n_r определяется из условий (3), (4). Система (2) полна в L_p тогда и только тогда, когда $\omega_\gamma \leq \pi(1 + \frac{1}{p})$, и ее минимальность в L_p равносильна тому, что $\omega_\gamma > \frac{\pi}{p}$.*

Пример. Рассмотрим систему экспонент

$$\{e^{i[nt + \gamma(t)\cdot \operatorname{sign} n]}\}_{n\neq 0}, \tag{10}$$

где $\gamma(t) = \begin{cases} \alpha t, & -\pi \leq t \leq 0, \\ \beta t, & 0 < t \leq \pi. \end{cases}$ Эта система является системой собственных функций разрывного дифференциального оператора $L(y) = y'(t)$, $t \in (-\pi, 0) \cap (0, \pi)$.

Утверждение. *Система* (10) *полна в* L_p *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Re}[\alpha+\beta] \le \frac{1}{q}$. *Минимальность в* L_p *этой системы равносильна тому, что* $\mathrm{Re}[\alpha+\beta] > -1-\frac{1}{q}$, *где* α, β — *некоторые комплексные постоянные.*

Замечание 2. При $\alpha=\beta$ система (10) ранее рассмотрена в работах [1–4].

4. Полнота и минимальность в L_1

Будем предполагать, что $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — кусочно гёльдеровы функции на промежутке $[-\pi,\pi]$: $\{s_i\}_1^r$, $-\pi < s_1 < \ldots < s_r < \pi$, точки разрыва которых лежат в $(-\pi,\pi)$.

Определим целые числа n_i, $i=\overline{1,r}$, из следующих условий:

$$0 \le \frac{h_i}{2\pi} + n_{i-1} - n_i < 1, \quad n_0 = 0, \ i=\overline{1,r}, \tag{11}$$

где $h_i = \beta(s_i+0) - \beta(s_i-0) + \alpha(s_i-0) - \alpha(s_i+0)$. Обозначим

$$\omega_1 = \frac{1}{2\pi}[\beta(-\pi) - \beta(\pi) + \alpha(\pi) - \alpha(-\pi)] + n_r.$$

Теорема 2. *Пусть функции* $A(t)$ *и* $B(t)$ *удовлетворяют выше сформулированным условиям. Если имеет место условие* (3), *то система* (1) *полна в* L_1 *тогда и только тогда, когда* $\omega_1 < 1$, *и ее минимальность в* L_1 *равносильна тому, что* $\omega_1 \ge 0$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $0 \le \omega < 1$. Возьмем числа $p_i \in (1,+\infty)$, $i=\overline{1,r+1}$, так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 \le \frac{h_i}{2\pi} + n_{i-1} - n_i < \frac{1}{p_i}, \quad 0 \le \omega_i < \frac{1}{p_{r+1}}, \ \ n_0 = 0, \quad i=\overline{1,r}.$$

Пусть $p = \min\limits_i\{p_i\}$. Тогда очевидно, что выполняются условия

$$-\frac{1}{q} < \frac{h_i}{2\pi} + n_{i-1} - n_i < \frac{1}{p}, \quad n_0 = 0, \quad i=\overline{1,r}; \quad -\frac{1}{q} < \omega_1 < \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Как следует из результатов работы [7], в этом случае система (1) образует базис в L_p и, значит, она полна в L_1. Биортогональная система $\{h_n^+; h_{n+1}^-\}_{n\ge 0}$ к системе (1) определяется, как и в доказательстве теоремы 1, формулами

$$h_n^{\pm}(t) = \pm\frac{\sum\limits_{k=k^{\pm}}^{n} b_{n-k}^{\pm} e^{\mp ikt}}{2\pi Z_0^+(e^{it})A(t)}, \quad k^+ = 0, \ k^- = 1,$$

где $Z_0(z)$ — каноническое решение в классе Харди H_p однородной задачи сопряжения

$$A(t)Z_0^+(e^{it}) + B(t)Z_0^-(e^{it}) = 0, \quad -\pi < t < \pi.$$

Граничные значения $Z_0^+(e^{it})$ через скачки функции $\beta(t)-\alpha(t)$ определяются по формулам из п. 1. Из результатов книги [10, с. 79] следует, что функция $U_0^{\pm 1}(t)$ ограничена на $[-\pi,\pi]$. Более того, из выражения биортогональной системы получим, что $\left|h_n^{\pm}(t)\right| \le c_n \ \forall t \in [-\pi,\pi]$, где c_n — некоторые постоянные, зависящие только от n. Следовательно, $h_n^{\pm} \in L_\infty \ \forall n$, и, значит, (1) минимальна в L_1. В результате система (1) при $0 \le \omega < 1$ полна и минимальна в L_1. Остальные случаи доказываются аналогично теореме 1. Теорема доказана.

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Следствие 3. *Система экспонент* $\{e^{i(n+\beta\cdot\mathrm{sign}\, n)t}\}_{n\ne 0}$ *полна в* L_1 *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Re}\,\beta < 0$, *и ее минимальность в* L_1 *равносильна тому, что* $\mathrm{Re}\,\beta \ge \frac{1}{2}$.

5. Необходимое условие базисности

Сначала определим базисность некоторой «двойной» системы

$$\left\{x_n^+; x_k^-\right\}_{n,k\geq 0} \tag{12}$$

в банаховом пространстве $\mathscr{B}$, $\|\cdot\|$ — норма в $\mathscr{B}$.

Определение. «Двойная» система (12) *образует базис* в $\mathscr{B}$, если для любого $x \in \mathscr{B}$, существует единственная последовательность комплексных чисел $\left\{a_n^+; a_k^-\right\}_{n,k\geq 0}$ такая, что

$$\lim_{N^+,N^-\to\infty}\left\|\sum_{n=0}^{N^+} a_n^+ x_n^+ + \sum_{n=0}^{N^-} a_n^- x_n^- - x\right\| = 0.$$

Хорошо известно, что если классическую систему экспонент $\{e^{int}\}_{-\infty}^{+\infty}$ записывать в виде $\{e^{int}; e^{-it}e^{-ikt}\}_{n,k\geq 0}$, то она образует базис в L_p в смысле этого определения. Более того, базисность систем (1), (2) в более общем случае исследована в работе [7] на основе этого определения. В дальнейшем базисность «двойной» системы (12) будем понимать в указанном смысле.

В п. 1 мы доказали, что условие $\frac{h_i}{2\pi} - \frac{1}{p} \notin Z$, $i = \overline{0,\infty}$, для полноты и минимальности систем (1), (2) в L_p является излишним. Однако они необходимы для базисности в L_p.

Теорема 3. *Пусть функции $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют условиям* 1–3 *из п.* 1, $\tilde{h}_i$, $i = \overline{1,\infty}$, — *скачки функции* $\theta(t) \equiv \arg B(t) - \arg A(t)$, $\tilde{h}_0 = \theta(-\pi + 0) - \theta(\pi - 0)$. *Тогда для базисности системы* (1) *в* L_p, $p \in (1,\infty)$, *необходимыми являются условия*

$$\frac{\tilde{h}_i}{2\pi} - \frac{1}{p} \notin \mathbb{Z}, \quad i = \overline{0,\infty}. \tag{13}$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть в условиях (13) при некотором i_0 число $\frac{\tilde{h}_{i_0}}{2\pi} - \frac{1}{p}$ является целым. Точку разрыва функции $\theta(t)$, соответствующую скачку h_{i_0}, обозначим через t_0. Следуя теореме 1, определим величины n_r и ω. Очевидно, что в условиях (4) имеем $\frac{\tilde{h}_{i_0}}{2\pi} + n_{i_0-1} - n_{i_0} = \frac{1}{p}$. Достаточно рассмотреть случай, когда $-\frac{1}{q} < \omega \leq \frac{1}{p}$. В случае невыполнения этого условия, как следует из теоремы 1, система (1) в L_p либо не полна, либо не минимальна.

Снова рассмотрим задачу сопряжения (8). Не ограничивая общности, будем считать, что условие (13) нарушается в единственной точке t_0 и $n_{i_0} - n_{i_0-1} = 0$. Рассмотрим интеграл типа Коши

$$F(z) = \frac{Z_0(z)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\psi(t)}{Z_0^+(e^{it})A(t)}\frac{dt}{1-ze^{-it}},$$

где $\psi(t) \in L_p(-\pi,\pi)$ обращается в нуль в достаточно малой окрестности точки t_0, $Z_0(z)$ — каноническое решение соответствующей однородной задачи в H_p. Введем новую функцию

$$\tilde{\psi}(t) = \psi(t)\left\{\sin\left|\frac{t-t_0}{2}\right|\right\}^{\frac{\tilde{h}_{i_0}}{2\pi}}.$$

Используя формулы Сохоцкого — Племеля, функцию $F^{\pm}(e^{it})$ можно представить в виде

$$F^{\pm}(e^{it}) = \pm\frac{1}{2}\psi(t) + \left\{\sin\left|\frac{t-t_0}{2}\right|\right\}^{\frac{\tilde{h}_{i_0}}{2\pi}}\Phi(t), \tag{14}$$

где

$$\Phi(t) = \frac{\widetilde{Z}_0^+(e^{it})}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\widetilde{\psi}(\sigma)}{\widetilde{Z}_0^+(e^{i\sigma})A(\sigma)}\frac{d\sigma}{1-e^{i(t-\sigma)}},$$

$$\widetilde{Z}_0^+(e^{it}) = Z_0^+(e^{it})\left\{\sin\left|\frac{t-t_0}{2}\right|\right\}^{-\frac{\tilde{h}_{i_0}}{2\pi}}.$$

Нетрудно заметить, что для функции $\Phi(t)$ справедливы все условия теоремы 8.6 из работы [10, с. 144]. Таким образом, $\Phi(t) \in L_p(-\pi,\pi)$. Из (14) следует, что $F^{\pm}(e^{it}) \in L_p(-\pi,\pi)$. Следовательно, по теореме Смирнова [10, с. 51] функция $F(z)$ принадлежит классу Харди H_p, и тем самым биортогональный ряд по системе (1) сходится в L_p к $\psi(t)$. Обозначим через $P(\psi)$ интегральный оператор

$$P(\psi) = \frac{\widetilde{Z}_0^+(e^{it})}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\widetilde{\psi}(\sigma)}{\widetilde{Z}_0^+(e^{i\sigma})A(\sigma)}\cdot\frac{d\sigma}{1-e^{i(t-\sigma)}} + \frac{1}{2}\psi.$$

Из результатов работы [8, с. 146] вытекает, что этот оператор является неограниченным в L_p.

Предположим, что система (1) образует базис в L_p. Биортогональную систему к системе (1) обозначим через $\{h_n^+; h_n^-\}$, $n \geq 0$, $k \geq 1$. Пусть $Q(\psi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^+ e^{int}$, где $a_n^+ = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\bar{h}_n^+(t)\,dt$ — биортогональные коэффициенты. Из базисности системы (1) следует, что оператор $Q : L_p \to L_p$ ограничен. Из единственности разложения получим, что для любой $\psi \in L_p$, обращающейся в нуль в достаточно малой окрестности точки t_0, операторы $P(\psi)$ и $Q(\psi)$ совпадают, т. е. $P(\psi) \equiv Q(\psi)$ $\forall \psi \in L_p$ и $\psi(t) \equiv 0$, $t \in C_\delta(t_0)$, $C_\delta(t_0)$ — δ-окрестность точки t_0. Возьмем любую $\psi \in L_p$. Положим

$$\widetilde{\psi}(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in [-\pi,\pi] \setminus C_\delta(t_0), \\ 0, & t \in C_\delta(t_0). \end{cases}$$

Очевидно, что $P(\widetilde{\psi}) \equiv Q(\widetilde{\psi})$. Так как $Q(\psi)$ — линейный ограниченный оператор, имеем $\lim\limits_{\delta\to 0} Q(\widetilde{\psi}) = Q(\psi)$ для любой $\psi \in L_p$. Значит, существует предел

$$\lim_{\delta\to 0} P(\widetilde{\psi}) = \lim_{\delta\to 0} Q(\widetilde{\psi}) = Q(\psi).$$

С другой стороны, $\lim\limits_{\delta\to 0} P(\widetilde{\psi})$ существует для любой $\psi \in L_p$ и равен $Q(\psi)$. Это противоречит неограниченности оператора $P(\psi)$. Теорема доказана.

Замечание 3. Соответствующая теорема справедлива и относительно системы (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964.
2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
3. *Седлецкий А. М.* Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 5. С. 51–95.
4. *Седлецкий А. М.* О сходимости негармонических рядов Фурье по системам экспонент, косинусов и синусов // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 5. С. 1053–1056.
5. *Моисеев Е. И.* О базисности систем косинусов и синусов // Докл АН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 794–798.
6. *Девдариани Г. Г.* Базисность некоторых специальных систем собственных функций несамосопряженных дифференциальных операторов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1986.
7. *Билалов Б. Т.* Базисность некоторых систем экспонент косинусов и синусов // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 10–16.
8. *Барменков А. Н.* Об аппроксимативных свойствах некоторых систем функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1983.
9. *Билалов Б. Т.* Необходимые и достаточные условия полноты и минимальности системы вида $\{A(t)\varphi^n(t); B(t)\overline{\varphi}^n(t)\}$ // Докл. РАН. 1992. Т. 322, № 6. С. 1019–1021.
10. *Данилюк И. И.* Лекции по краевым задачам для аналитических функций и сингулярным интегральным уравнениям. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1964.

Статья поступила 1 июля 2003 г.

Билалов Билал Телман оглы
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
ул. Ф. Агаева, 9, квартал 553, Баку, Az 1141
b_bilalov@mail.ru