Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 517.55

КРАТНЫЕ РЯДЫ ЛОРАНА И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Е. К. Лейнартас

Аннотация: С использованием понятия амебы характеристического многочлена получено описание пространства решений многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: ряд Лорана, разностное уравнение, многогранник Ньютона, амеба многочлена.

§ 1. Обозначения, определения, основные результаты

Обозначим через $\mathbb{Z}$ множество целых чисел и через $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ — n-мерную целочисленную решетку. Пусть $\mathbb{Z}^n_+$ — подмножество этой решетки, состоящее из точек с целыми неотрицательными компонентами, и $A = \{\alpha\} \subset \mathbb{Z}^n_+$ — некоторое фиксированное конечное множество таких точек.

Разностным уравнением (относительно неизвестной функции $f : \mathbb{Z}^n_+ \to \mathbb{C}$) назовем соотношение вида

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) = 0, \quad x \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{1}$$

где c_α — некоторые (постоянные) коэффициенты уравнения (1).

Характеристическим многочленом для разностного уравнения (1) назовем многочлен $\sum\limits_{\alpha \in A} c_\alpha \lambda^\alpha =: P(\lambda)$, где $\lambda^\alpha = \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_n^{\alpha_n}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, а $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство.

Характеристическим множеством для разностного уравнения (1) назовем множество нулей характеристического многочлена: $V = \{\lambda \in \mathbb{C}^n : P(\lambda) = 0\}$.

В случае $n = 1$ известно (см., например, [1]), что всякое решение уравнения (1) является линейной комбинацией решений вида $f(x) = x^s \xi^x$, $s = 0, \dots, k-1$, где ξ — корень характеристического многочлена кратности k. Следовательно, размерность пространства решений конечна и равна степени характеристического многочлена $P(\lambda)$.

Для $n > 1$ подобный ответ невозможен, так как характеристическое множество V бесконечно. Для описания пространства решений уравнения (1) нам потребуются такие понятия, как многогранник Ньютона и амеба многочлена. Соответствующие определения и необходимые сведения взяты из [2, 3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00167).

Отметим, что многомерные разностные уравнения возникают в теории цифровых рекурсивных фильтров [4], а также в комбинаторном анализе (см. [5]), где они называются линейными рекуррентными соотношениями.

Многогранником Ньютона N_P многочлена P называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ элементов множества A.

Амебой называется образ множества нулей V многочлена $P(\lambda)$ при отображении

$$\operatorname{Log} : \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \to (\log|\lambda_1|, \dots, \log|\lambda_n|) = \operatorname{Log}|\lambda|.$$

Применение термина «амеба» объясняется тем, что для $n = 2$ изображение множества $\operatorname{Log} V$ в общем случае действительно напоминает амебу.

Приведем некоторые свойства амебы, необходимые нам в дальнейшем. Другие свойства, а также их доказательства приведены в [3].

Дополнение амебы $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Log} V$ состоит из конечного числа связных компонент, которое не превосходит числа целых точек многогранника N_P.

Если ν — вершина многогранника N_P, то ей соответствует (непустая) связная компонента дополнения амебы E_ν такая, что

(i) *двойственный конус* $C_\nu = \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, \nu\rangle = \max\limits_{\alpha \in N_P} \langle s, \alpha\rangle\}$ является асимптотическим для этой компоненты, т. е. для любого $u \in E_\nu$ справедливо включение $u + C_\nu \subset E_\nu$, и никакой конус, содержащий C_ν, этому свойству не удовлетворяет;

(ii) рациональная функция $1/P(\lambda)$ разлагается в области $\operatorname{Log}^{-1} E_\nu \subset \mathbb{C}^n$ в ряд Лорана вида

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \sum_\beta \frac{a_\beta}{\lambda^{\nu+\beta}},$$

где $\beta \in \mathbb{Z}^n \cap K_\nu$, а K_ν — конус, построенный на векторах $\nu - \alpha$, $\alpha \in A$.

Отметим, что в дальнейшем нам потребуются разложения функции $1/P(\lambda)$ в вершинах ν многогранника Ньютона, двойственный конус которых C_ν удовлетворяет условию

$$\dim C_\nu \cap \mathbb{R}^n_+ = n. \tag{2}$$

На множестве рядов Лорана $F(\lambda) = \sum\limits_{x \in \mathbb{Z}^n} a_x \lambda^x$ определим функционал Res следующим образом:

$$\operatorname{Res} F(\lambda) = a_{-I}, \quad I = (1, \dots, 1).$$

Пусть $\mathbb{Z}^n_+ - \alpha$ — сдвиг множества $\mathbb{Z}^n_+$ на вектор $(-\alpha)$, определим для (фиксированного) набора $A = \{\alpha\}$ множество

$$\mathbb{Z}^n_A = \bigcup_{\alpha \in A} (\mathbb{Z}^n_+ - \alpha) \setminus \mathbb{Z}^n_+. \tag{3}$$

Обозначим через $\mathscr{M}_A$ линейное пространство рядов Лорана вида

$$M(\lambda) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n_A} \mu(y) \lambda^{-y-I} \tag{4}$$

и отметим, что сходимость таких рядов, вообще говоря, не предполагается.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Всякое решение разностного уравнения* (1) *можно представить в виде*

$$f(x) = \operatorname{Res}\left\{\frac{1}{P(\lambda)}M(\lambda)\lambda^x\right\}, \quad x \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{5}$$

где выражение в фигурных скобках понимается как произведение (формальных) рядов Лорана, причем $1/P(\lambda)$ *разлагается в ряд в фиксированной вершине многогранника Ньютона* N_P, *удовлетворяющей условию* (2), *а* $M(\lambda) \in \mathscr{M}_A$.

Отметим, что если ряд Лорана (4) сходится в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $U(\infty) = \{\lambda \in \mathbb{C}^n : |\lambda_j| > R_j, j = 1, \ldots, n\}$, то из утверждений (i) и (ii), а также условия $\dim\bigl(C_\nu \cap \mathbb{R}^n_+\bigr) = n$ следует, что решение $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_\gamma \frac{M(\lambda)}{P(\lambda)}\lambda^x\, d\lambda, \quad x \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{6}$$

где $\gamma = \operatorname{Log}^{-1} v$, а $v \in E_\nu$ такое, что ряд (4) сходится на остове γ.

Укажем связь между разностным уравнением (1) и дифференциальным уравнением вида

$$P(D)u(t) =: \sum_{\alpha \in A} c_\alpha D^\alpha u(t) = 0. \tag{7}$$

Пусть $u(t)$ — степенной ряд (формальный) вида

$$u(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n_+} \frac{f(x)}{x!}t^x. \tag{8}$$

Лемма. *Степенной ряд* (8) *является решением дифференциального уравнения* (7) *тогда и только тогда, когда* $f(x)$ *является решением разностного уравнения* (1).

Из теоремы 1 и леммы следует

Теорема 2. *Всякое решение* $u(t)$ *вида* (8) *дифференциального уравнения* (7) *можно представить в виде*

$$u(t) = \operatorname{Res}_\lambda\left\{\frac{1}{P(\lambda)}M(\lambda)e^{\lambda t}\right\}, \tag{9}$$

где $M(\lambda) \in \mathscr{M}_A$, *а выражение в фигурных скобках понимается как произведение рядов Лорана* $1/P(\lambda)$, $M(\lambda)$ *и степенного ряда для* $e^{\lambda t}$. *При этом* $1/P(\lambda)$ *разлагается в ряд Лорана в фиксированной вершине многогранника Ньютона, удовлетворяющей* (2).

Отметим, что если ряд (4) сходится в некоторой окрестности $U(\infty) = \{\lambda \in \mathbb{C}^n : |\lambda_j| > R_j, j = 1, \ldots, n\}$ бесконечно удаленной точки, то из утверждения (ii) и условия (2) вытекает, что всякое целое экспоненциального типа решение $u(t)$ можно представить в виде

$$u(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_\gamma \frac{M(\lambda)}{P(\lambda)}e^{\lambda t}\, d\lambda, \tag{10}$$

где $\gamma = \operatorname{Log}^{-1} u$, а $u \in E_\nu$ такое, что ряд $M(\lambda)$ сходится на остове γ.

В случае $n = 1$ получим, что $M(\lambda)$ — это многочлен степени на единицу меньше, чем степень m характеристического многочлена $P(\lambda)$, вершина ν многогранника N_P совпадает с m, а связная компонента дополнения амебы E_m — луч на вещественной оси. Если $v \in E_m$, то внутри окружности $\gamma = \operatorname{Log}^{-1} v$ лежат все корни характеристического многочлена. По теореме о полной сумме вычетов из формулы (5) легко получаются результаты об общем виде решений соответственно разностного и дифференциального уравнений с постоянными коэффициентами.

Для $n > 1$ оказывается, что $M(\lambda)$ уже не является многочленом, и даже в случае сходимости ряда (4) вычисление интегралов (6) и (10) является трудной задачей теории многомерных вычетов, не решенной в общем случае. Для дифференциального уравнения (7) известен так называемый фундаментальный принцип [6, 7], утверждающий, что всякое решение допускает «экспоненциальное» представление вида $\int\limits_V e^{\lambda t}\,d\mu(\lambda)$, где $\mu(\lambda)$ — мера, сосредоточенная на характеристическом множестве V. В формулах же (6) и (10) интегрирование происходит по n-мерному циклу γ из дополнения $\mathbb{C}^n \setminus V$.

Формулы вида (10) были выведены автором в частных случаях в связи с решением задачи Коши в работах [8, 9]. Формула вида (6) для многогранника Ньютона N_P специального вида получена в [10].

§ 2. Доказательства

Для произвольной функции $f(x)$ целочисленного аргумента $x \in \mathbb{Z}^n_+$ определим ее λ-преобразование $F(\lambda)$ (см. [4]) следующим образом:

$$F(\lambda) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n_+} \frac{f(x)}{\lambda^{x+I}}, \tag{11}$$

где $I = (1, \dots, 1)$.

Замечание. Ряды (8) и (11) являются ассоциированными по Борелю (см. [11]).

Отметим, что функционал Res позволяет определить обратное преобразование:

$$f(x) = \operatorname{Res}(F(\lambda)\lambda^x), \quad x \in \mathbb{Z}^n_+. \tag{12}$$

В случае, если ряд (11) сходится в некоторой окрестности бесконечности $U(\infty) = \{\lambda \in \mathbb{C}^n : |\lambda_j| > R_j,\ j = 1, \dots, n\}$, преобразование (12) можно представить в виде интеграла

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_\gamma F(\lambda)\lambda^x\,d\lambda, \quad x \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{13}$$

где $\gamma = \{\lambda : |\lambda_j| = \rho_j,\ j = 1, \dots, n\}$, причем $\gamma \subset U(\infty)$.

Каждой функции $f(x)$, $x \in \mathbb{Z}^n_+$, поставим в соответствие ряд Лорана вида

$$K_f(\lambda) =: \sum_{x \in \mathbb{Z}^n_A} \Bigl(\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \tilde{f}(x+\alpha)\Bigr)\lambda^{-x-I},$$

где $\tilde{f}$ — продолжение функции f с множества $\mathbb{Z}^n_+$ на множество $\mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{Z}^n_+$ нулем: $\tilde{f}(x) = 0$ для $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{Z}^n_+$.

Предложение 1. *Справедлива формула*

$$P(\lambda)F(\lambda) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n_+}\Big(\sum_{\alpha\in A} c_\alpha f(x+\alpha)\Big)\lambda^{-x-I} + K_f(\lambda). \tag{14}$$

Доказательство. Умножим многочлен $P(\lambda)$ на ряд (11) и сгруппируем по степеням λ. Учитывая определение $\tilde{f}$ и равенство множеств $\mathbb{Z}^n_A = \{x \in \mathbb{Z}^n :$ $x \notin \mathbb{Z}^n_+$ и существует $\alpha \in A$ такое, что $x+\alpha \in A\}$, получим (14).

Предложение 2. *Функция $f(x)$, $x \in \mathbb{Z}^n_+$, является решением разностного уравнения* (1) *тогда и только тогда, когда ее λ-преобразование $F(\lambda)$ удовлетворяет условию $P(\lambda)F(\lambda) = K_f(\lambda)$.*

Доказательство следует из формулы (14) и единственности разложения в ряд Лорана.

Предложение 3. *Всякое решение $f(x)$ разностного уравнения* (1) *можно представить в виде*

$$f(x) = \operatorname{Res}\Big(\frac{K_f(\lambda)}{P(\lambda)}\lambda^x\Big), \quad x \in \mathbb{Z}^n_+. \tag{15}$$

Доказательство следует из (12) и предложения 2.

В случае, когда λ-преобразование (11) решения f уравнения (1) сходится в некоторой окрестности бесконечности, $K_f(\lambda)$ в силу (14) также сходится в этой окрестности и $f(x)$ представляется интегралом вида (13), где $F(\lambda) = K_f(\lambda)/P(\lambda)$ — мероморфная функция, а цикл γ следует выбрать так, чтобы $\gamma \subset (\mathbb{C}^n \setminus V) \cap U(\infty)$.

Одна из задач, возникающая при изучении уравнения (1), состоит в том, чтобы оценить «запас» его решений.

Формула (15) ответа на данный вопрос не дает, но, с другой стороны, очевидно, что $\mathscr{K}_A = \{K_f(\lambda), f$ — решение $\} \subset \mathscr{M}_A$ и в этом смысле «количество» решений уравнения (1) не превосходит «количества» рядов Лорана вида (4).

Отметим, что для $n=1$ имеем $\mathscr{K}_A = \mathscr{M}_A$, но при $n>1$ это, вообще говоря, не так. Например, для двумерного разностного уравнения

$$f(x_1+1,x_2) - f(x_1,x_2+1) = 0, \quad x \in \mathbb{Z}^2_+,$$

получим, что $A = \{(1,0),(0,1)\}$ и $\mathbb{Z}^2_A = \{(-1,m),(m,-1),\ m=1,2,3,\dots\}$. Для каждого решения f уравнения соответствующий ряд K_f имеет вид $K_f(\lambda_1,\lambda_2) = \Phi(1/\lambda_2) - \Phi(1/\lambda_1)$, где Φ — произвольный степенной ряд такой, что $\Phi(0)=0$. Но из определения (4) видно, что ряд $M(\lambda)$ можно записать в виде $M(\lambda) = \Phi(1/\lambda_1) + \Psi(1/\lambda_2)$, где Φ,Ψ — произвольные степенные ряды такие, что $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$, следовательно, включение $\mathscr{K}_A \subset \mathscr{M}_A$ строгое.

Предложение 4. *Пусть ν — вершина многогранника Ньютона характеристического многочлена $P(\lambda)$ такая, что $\dim(C_\nu \cap \mathbb{R}^n_+) = n$. Тогда функция f, определяемая равенством* (5), *удовлетворяет следующим свойствам:*

1) *для $x \in \mathbb{Z}^n$ значение функции $f(x)$ выражается через конечное число коэффициентов рядов $1/P(\lambda)$ и $M(\lambda)$,*

2) *функция f определена на подмножестве целочисленной решетки, содержащем $\mathbb{Z}^n_+$,*

3) *функция* $f(x)$ *удовлетворяет разностному уравнению* (1).

Доказательство. Перемножим ряды $1/P(\lambda)$ и (4) и обозначим через $f(x)$ коэффициент при мономе $1/\lambda^{x+I}$. Положим

$$X = \{x \in \mathbb{Z}^n : x = \nu + \beta + y,\ \beta \in K_\nu,\ y \in \mathbb{Z}^n_A\}.$$

Так как $y \in \mathbb{Z}^n_A$, найдется $\alpha_0 \in A$ такое, что $y + \alpha_0 =: w \in \mathbb{Z}^n_+$, тогда $x = (\nu - \alpha_0) + \beta + w$. Таким образом, любой вектор $x \in X$ является линейной комбинацией (с неотрицательными коэффициентами) векторов $\nu - \alpha$, $\alpha \in A$, и единичных векторов $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $j = 1, \dots, n$.

Пусть s — внутренняя точка конуса $C_\nu \cap \mathbb{R}^n_+$. Тогда $\langle s, \nu - \alpha\rangle > 0$, $\alpha \in A \setminus \{\nu\}, \langle s, e_j\rangle > 0$, $j = 1, \dots, n$. Это означает, что векторы $\nu - \alpha$, $\alpha \in A$ и e_j, $j = 1, \dots, n$, принадлежат полупространству $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle s, x\rangle > 0\}$.

Известно (см., например, [12]), что в этом случае существует конечное число способов, которыми вектор $x \in \mathbb{Z}^n$ можно представить в виде линейной комбинации этих векторов с целочисленными неотрицательными коэффициентами. Это доказывает первое утверждение предложения 4.

Пусть $x \in X$. Как показано выше, $x = (\nu - \alpha_0) + \beta + w$, где $\nu - \alpha_0 \in K_\nu$, $\beta \in K_\nu$, $w \in \mathbb{Z}^n_+$. Для произвольного $s \in C_\nu \cap \mathbb{R}^n_+$ справедливы неравенства $\langle s, \nu - \alpha_0\rangle \geq 0$, $\langle s, \beta\rangle \geq 0$, $\langle s, w\rangle \geq 0$, тогда $\langle s, x\rangle \geq 0$. Это означает, что множество X содержится в пересечении полупространств $\{x : \langle s, x\rangle \geq 0\}$:

$$X \subset \bigcap_{s \in C_\nu \cap \mathbb{R}^n_+} \{x : \langle s, x\rangle \geq 0\}.$$

Очевидно, что каждое из этих полупространств содержит $\mathbb{Z}^n_+$, следовательно, доказано второе утверждение предложения 4.

Подставим $f(x)$ из формулы (5) в уравнение (1), воспользуемся линейностью функционала Res и получим $\sum\limits_\alpha c_\alpha f(x_\alpha) = \mathrm{Res}(M(\lambda)\lambda^x)$, $x \in \mathbb{Z}^n_+$, но по определению $\mathscr{M}_A$, ряд $M(\lambda)\lambda^x$ не содержит мономов λ^{-I}, поэтому для всех $x \in \mathbb{Z}^n_+$ будет $\mathrm{Res}(M(\lambda)\lambda^x) = 0$.

Доказательство теоремы 1 следует из предложений 3 и 4.

Доказательство леммы вытекает из равенства

$$P(D)u(t) = P(D)\Bigg(\sum_{x \in \mathbb{Z}^n_+} \frac{f(x)}{x!} t^x\Bigg) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n_+} \Bigg[\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha)\Bigg] \frac{t^x}{x!}$$

и единственности разложения функции в степенной ряд.

Доказательство теоремы 2. Если $u(t)$ — решение вида (8) дифференциального уравнения (7), то $f(x)$ — решение разностного уравнения (1) и по теореме 1 его можно представить в виде (5). Умножив (5) на $\frac{t^x}{x!}$ и просуммировав по $x \in \mathbb{Z}^n_+$, получим (9).

Если решение $u(t)$ является целой функцией экспоненциального типа, то ассоциированная с ней по Борелю функция $F(\lambda)$ сходится в $U(\infty)$ (см. [11]) и для этого решения можно записать формулу (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959.

2. *Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A.* Discriminants, resultants and multidimentional determinants. Boston: Birkhäuser, 1994.

3. *Forsberg M., Passare M., Tsikh A.* Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas // Adv. Math. 2000. V. 151. P. 45–70.

4. *Даджион Д., Мерсеро О.* Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир, 1988.

5. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1972.

6. *Ehrenpreis L.* A fundamental principle for system of linear differential equations with constant coefficients and some of it applications // Proc. Intern. sympos. on linear spaces. Jerusalem. 1960. P. 161–174.

7. *Паламодов В. П.* Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.

8. *Лейнартас Е. К.* Задача Коши и амеба характеристического многочлена // Многомерный комплексный анализ: Межвуз. сб. 2002. С. 115–119.

9. *Leinartas E.* On the Cauchy problem in a class of entire functions in several variables // Banach Center Publications. Warsaw: Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, 1996. V. 33. P. 189–192.

10. *Лейнартас Д. Е.* О задаче Коши для многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2002. № 1. С. 79–80.

11. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1971.

12. *Brion M., Vergne M.* Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes // J. Amer. Math. Soc. 1997. V. 10, N 4. P. 797–833.

Статья поступила 19 мая 2003 г.

Лейнартас Евгений Константинович
Красноярский гос. университет, математический факультет,
кафедра теории функций, пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
`lein@au.ru`