Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 517.98

НЕСКОЛЬКО КЛАССОВ БАНАХОВЫХ РАССЛОЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМИ СЛАБО НЕПРЕРЫВНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ

А. В. Коптев

Аннотация: Продолжается изучение вопроса о непрерывности слабо непрерывных сечений непрерывных банаховых расслоений. Получены некоторые признаки непрерывности таких сечений в точке и найдены новые классы расслоений с совпадающими пространствами слабо непрерывных и непрерывных сечений.

Ключевые слова: непрерывное банахово расслоение, непрерывное сечение, гомоморфизм, слабо непрерывное сечение.

Концепция двойственности играет существенную роль во многих вопросах функционального анализа. Как следствие, в анализе при развитии той или иной теории традиционно исследуются двойственные объекты и связанные с ними понятия. В теории непрерывных банаховых расслоений (НБР) с основными двойственными объектами тесно связано понятие слабо непрерывного сечения. Например, в этой теории элементы некоторых «внутренних вторых сопряженных» пространств могут быть представлены как слабо непрерывные сечения (см. [1, разд. 20; 2–5]). При рассмотрении таких сечений естественно поставить вопрос об их непрерывности, в частности, потому, что в рамках теории НБР привычно и удобно иметь дело с непрерывными сечениями, свойства которых хорошо изучены. Более того, в некоторых ситуациях этот вопрос возникает сам собою (см., например, [1, п. 20.3] и [4, предложение 3]).

Если $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q, то пространство $C(Q,\mathscr{X})$ всех непрерывных глобальных сечений $\mathscr{X}$ всегда является векторным подпространством соответствующего пространства $C_w(Q,\mathscr{X})$ слабо непрерывных сечений. В работах [2, 3, 5] предлагаются условия совпадения этих пространств, в том числе для конкретных классов НБР. Там же приведены примеры слабо непрерывных разрывных сечений. Настоящая заметка частично дополняет эти работы. Автором найдены некоторые новые конкретные классы НБР, для которых имеет место равенство $C_w(Q,\mathscr{X}) = C(Q,\mathscr{X})$ (пп. 2.5–2.7, 2.11), что и дает основной материал данной статьи.

Статья состоит из двух параграфов. В § 1 собраны вспомогательные утверждения, касающиеся непрерывных банаховых расслоений и не затрагивающие понятия слабо непрерывного сечения. Здесь самостоятельный интерес представляет теорема 1.1, в силу которой через любой элемент любого слоя произвольного НБР проходит непрерывное глобальное сечение. Основной материал содержится в § 2. Все результаты этого параграфа касаются непрерывности слабо непрерывных сечений. Самым нетривиальным результатом является теорема 2.3.

Говоря о банаховых расслоениях, мы имеем дело с терминологией [2, 6] (см. также [3, 5, 7]). Непрерывные банаховы расслоения соответствуют банаховым расслоениям с непрерывной нормой в [1]. Все необходимые сведения об этих расслоениях можно найти в [1, 6, 7]. Мы используем обозначения, принятые в [2] (см. также [3, 5]), за исключением следующего: для элемента x банахова пространства X и функционала x' в X' мы обозначаем $x'(x)$ через $\langle x, x'\rangle$. Все рассматриваемые векторные пространства предполагаются над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

Так, если $\mathscr{X}$ — НБР над Q, то гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ представляет собой функциональнозначное отображение $H\colon q \in Q \mapsto H(q) \in \mathscr{X}(q)'$, переводящее любое непрерывное сечение u расслоения $\mathscr{X}$ в непрерывную вещественную функцию $\langle u|H\rangle : q \in \operatorname{dom} u \mapsto \langle u(q), H(q)\rangle$. Мы говорим, что $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ *нормирует* $\mathscr{X}$, если для любых $q \in Q$ и $x \in \mathscr{X}(q)$ выполнено равенство

$$\|x\| = \sup\{\langle x, H(q)\rangle : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}),\ \|\!|H|\!\| \le 1\}.$$

Как показано в [2, п. 4.4] (см. также [3, 5]), расслоения, удовлетворяющие этому условию нормировки, встречаются очень часто. Наконец, сечение u над $P \subset Q$ расслоения $\mathscr{X}$ называется *слабо непрерывным*, если для любого гомоморфизма $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ непрерывна функция $\langle u|H\rangle : P \to \mathbb{R}$, которая определена равенством $\langle u|H\rangle(q) = \langle u(q), H(q)\rangle$ для всех $q \in P$. Из определения немедленно следует, что совокупность $C_w(P, \mathscr{X})$ всех таких сечений является векторным подпространством пространства $\prod\limits_{q \in P} \mathscr{X}(q)$ всех сечений над P расслоения $\mathscr{X}$ и что $C_w(P, \mathscr{X})$ содержит $C(P, \mathscr{X})$ в качестве векторного подпространства.

§ 1. Вспомогательные результаты

1.1. Следующее утверждение является обобщением теоремы [6, п. 2.3.5] (M. J. Dupré) на случай произвольного топологического пространства (см. также [1, п. 2.10]).

Теорема. *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *над произвольным топологическим пространством* Q. *Для любого элемента* x *любого слоя* $\mathscr{X}(q)$ $(q \in Q)$ *существует сечение* $u \in C(Q, \mathscr{X})$ *такое, что* $u(q) = x$ *и* $\|\!|u|\!\| \le \|x\|$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $q \in Q$ и произвольный элемент $x \in \mathscr{X}(q)$. Поскольку множество $C(Q, \mathscr{X})$ послойно плотно в $\mathscr{X}$, для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется сечение $u_n \in C(Q, \mathscr{X})$, удовлетворяющее неравенству

$$\|u_n(q) - x\| \le 1/2^n.$$

Положим $v_1 = u_1$ и $v_n = u_n - u_{n-1}$ для каждого натурального $n \ge 2$. В таком случае имеем

$$\|v_n(q)\| \le \|u_n(q) - x\| + \|x - u_{n-1}(q)\| \le 1/2^n + 1/2^{n-1} \le 2/2^{n-1} = 1/2^{n-2}$$

для всех $n \ge 2$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(q) = \lim_{n\to\infty} u_n(q) = x.$$

Воспользовавшись леммой [6, п. 2.3.9], для каждого $n \in \mathbb{N}$ возьмем сечение $w_n \in C(Q, \mathscr{X})$ такое, что $w_n(q) = v_n(q)$ и $\|\!|w_n|\!\| \le \|v_n(q)\|$.

Пространство ограниченных непрерывных сечений $C^b(Q,\mathscr{X})$, снабженное равномерной нормой $w \in C^b(Q,\mathscr{X}) \mapsto \|w\|_\infty = \sup\limits_{p\in Q}\|w(p)\|$, является банаховым (см., например, [6, п. 2.3.6]). Поскольку $|\!|\!|w_n|\!|\!| \le \|v_n(q)\| \le 1/2^{n-2}$ для всех $n \ge 2$, в банаховом пространстве $C^b(Q,\mathscr{X})$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ абсолютно сходится и тем самым сходится к некоторому элементу w. Последнее означает, что сечение w является поточечной суммой этого ряда, в частности,

$$w(q) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(q) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(q) = x.$$

Для завершения доказательства остается еще раз воспользоваться леммой [6, п. 2.3.9].

Таким образом, на языке [1] можно утверждать следующее: *всякое банахово расслоение с непрерывной нормой является полным* (т. е. любой элемент любого слоя такого расслоения есть значение некоторого глобального непрерывного ограниченного сечения в соответствующей точке).

1.2. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q, и пусть $q \in Q$. В дальнейшем для произвольного подмножества $\mathscr{U} \subset C(Q,\mathscr{X})$ символом $\mathscr{U}(q)$ обозначается совокупность значений $\{u(q) : u \in \mathscr{U}\}$.

Лемма. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathscr{U}$ — линейная оболочка сечений $u_1,\dots,u_n \in C(Q,\mathscr{X})$ с линейно независимыми значениями $u_1(q),\dots,u_n(q)$.*

(1) *Для любого $\delta > 0$ существует окрестность точки q, в которой*

$$(1-\delta)|\!|\!|u|\!|\!|(q) \le |\!|\!|u|\!|\!| \le (1+\delta)|\!|\!|u|\!|\!|(q) \quad \text{для всех } u \in \mathscr{U}.$$

(2) *Пусть $0 \le r_1 < r_2$. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют окрестность W точки q и конечное подмножество $\mathscr{W} \subset \mathscr{U}$ такие, что совокупность $\mathscr{W}(p)$ служит ε-сетью для множества $\{u(p) : u \in \mathscr{U},\ r_1 \le \|u(p)\| \le r_2\}$ в любой точке $p \in W$ и, кроме того, $r_1 \le |\!|\!|w|\!|\!| \le r_2$ на W для всех $w \in \mathscr{W}$.*

Доказательство. (1) Без ограничения общности можно считать, что

$$\|u_1(q)\| = \dots = \|u_n(q)\| = 1.$$

Как следует из леммы [8, п. 7(1)], для любого $\delta > 0$ существует окрестность точки q, в которой $1-\delta \le |\!|\!|u|\!|\!| \le 1+\delta$, как только $u \in \mathscr{U}$ и $\|u(q)\| = 1$. Отсюда видно, что справедливо наше утверждение.

(2) Пусть $\varepsilon > 0$. В слое $\mathscr{X}(q)$ рассмотрим компактное множество

$$A = \left\{u(q) : u \in \mathscr{U},\ r_1 - \frac{\varepsilon}{4} \le \|u(q)\| \le r_2 + \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

и множество

$$B = \{u(q) : u \in \mathscr{U},\ r_1 < \|u(q)\| < r_2\}.$$

Понятно, что открытые шары радиуса $\varepsilon/2$ с центрами в B составляют открытое покрытие множества A. Поэтому B содержит конечную $(\varepsilon/2)$-сеть для A, т. е. существует конечное подмножество $\mathscr{W} \subset \mathscr{U}$ такое, что совокупность $\mathscr{W}(q)$ содержится в B и служит $(\varepsilon/2)$-сетью для A.

Подберем число $\delta > 0$ так, чтобы

$$\frac{r_1}{1+\delta} \ge r_1 - \frac{\varepsilon}{4}, \quad \frac{r_2}{1-\delta} \le r_2 + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{и} \quad \delta < 1.$$

Для этого δ возьмем окрестность U точки q, о которой говорится в (1).

Пусть $p \in U$. Предположим, что элемент $u \in \mathscr{U}$ удовлетворяет неравенствам $r_1 \leq \|u(p)\| \leq r_2$. Тогда

$$\|u(q)\| = |\!|\!|u|\!|\!|(q) \geq \frac{|\!|\!|u|\!|\!|(p)}{1+\delta} \geq \frac{r_1}{1+\delta} \geq r_1 - \frac{\varepsilon}{4}$$

и

$$\|u(q)\| = |\!|\!|u|\!|\!|(q) \leq \frac{|\!|\!|u|\!|\!|(p)}{1-\delta} \leq \frac{r_2}{1-\delta} \leq r_2 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда $u(q) \in A$, а значит, при подходящем сечении $w \in \mathscr{W}$ имеем

$$\|u(p) - w(p)\| = |\!|\!|u - w|\!|\!|(p) \leq (1+\delta)|\!|\!|u - w|\!|\!|(q) \leq 2\|u(q) - w(q)\| \leq 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Следовательно, совокупность $\mathscr{W}(p)$ служит ε-сетью для множества $\{u(p) : u \in \mathscr{U},\ r_1 \leq \|u(p)\| \leq r_2\}$ в произвольной точке $p \in U$.

Поскольку $\mathscr{W}(q) \subset B$ и множество $\mathscr{W}$ конечно, существует окрестность V точки q, в которой $r_1 \leq |\!|\!|w|\!|\!| \leq r_2$ для всех $w \in \mathscr{W}$. Остается положить $W = U \cap V$.

1.3. Лемма. *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q такое, что $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$, и пусть $q \in Q$.*

(1) *Пусть $Y \subset \mathscr{X}(q)$ — конечномерное подпространство. Тогда множество функционалов $\{H(q)|_Y : H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}),\ |\!|\!|H|\!|\!| \leq 1\}$ содержит открытый единичный шар пространства Y'.*

(2) *Если расстояние между конечномерным подпространством $X \subset \mathscr{X}(q)$ и элементом $y \in \mathscr{X}(q)$ больше, чем $\delta > 0$, то существует гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, $|\!|\!|H|\!|\!| \leq 1\}$ такой, что $\langle x, H(q)\rangle = 0$ для всех $x \in X$ и $\langle y, H(q)\rangle = \delta$.*

Доказательство. (1) Рассматриваемое множество функционалов обозначим через A. Очевидно, A является непустым абсолютно выпуклым подмножеством замкнутого единичного шара $B_{Y'}$ пространства Y'. Поскольку

$$\|y\| = \sup\{\langle y, H(q)\rangle : H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}),\ |\!|\!|H|\!|\!| \leq 1\} = \sup\{\langle y, a\rangle : a \in A\}$$

для любого элемента $y \in Y$, абсолютная поляра A° множества A совпадает с замкнутым единичным шаром пространства $Y \cong Y''$. Значит, $A^{\circ\circ} = B_{Y'}$. Вместе с тем по теореме об абсолютной биполяре $A^{\circ\circ}$ является замыканием $\operatorname{cl} A$ множества A. Таким образом, $\operatorname{cl} A = B_{Y'}$. Остается заметить, что, как выпуклое подмножество конечномерного пространства, A содержит внутренность своего замыкания (см., например, [9, пп. 7.1.2, 7.1.1 (4)]).

(2) Предположим, что указанное расстояние больше, чем $\delta > 0$. Рассмотрим банахово подпространство $Y = \{x + \lambda y : x \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathscr{X}(q)$ и, кроме того, функционал $y' \in Y'$, определенный равенствами $y' = 0$ на X и $\langle y, y'\rangle = \delta$. Из соотношений $|\langle x + \lambda y, y'\rangle| = |\lambda|\delta < \|x + \lambda y\|$, справедливых для всех $x \in X$ и всех $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, вытекает, что $\|y'\| < 1$. Тогда в силу (1) найдется гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, $|\!|\!|H|\!|\!| \leq 1$, удовлетворяющий соотношению $H(q)\big|_Y = y'$, что и требовалось доказать.

1.4. В этом пункте описывается ситуация, в которой для сходящейся последовательности точек (q_n) и последовательности гомоморфизмов (H_n) существует гомоморфизм H такой, что $H(q_n) = H_n(q_n)$ для всех n.

Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над вполне регулярным топологическим пространством Q, точка $q \in Q$ обладает счетной базой окрестностей и слой $\mathscr{X}(q)$ является сепарабельным. Кроме того, пусть $q_n \to q$ при $n \to \infty$, где $(q_n) \subset Q \backslash \{q\}$, $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$, и пусть $(H_n) \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, $\|H_n\| \le 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\langle u \mid H_n\rangle(q_n) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого элемента u некоторого подмножества $\mathscr{U} \subset C(Q, \mathscr{X})$ такого, что множество $\mathscr{U}(q)$ всюду плотно в $\mathscr{X}(q)$. Тогда существует гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, $\|H\| \le 1$, удовлетворяющий равенствам $H(q_n) = H_n(q_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $H(q) = 0$.*

Доказательство. Вследствие теоремы [6, п. 2.4.9] ограниченное отображение $H : p \in Q \mapsto H(p) \in \mathscr{X}(p)'$ принадлежит $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, если существует послойно плотное в $\mathscr{X}$ подмножество $\mathscr{V} \subset C(Q, \mathscr{X})$ такое, что $\langle v \mid H\rangle \in C(Q)$ для всех $v \in \mathscr{V}$. Сначала введем удобное для нас подмножество $\mathscr{V} \subset C(Q, \mathscr{X})$, послойно плотное в $\mathscr{X}$.

Поскольку в сепарабельном банаховом пространстве любое всюду плотное множество содержит счетное всюду плотное, $\mathscr{U}$ содержит множество $\mathscr{U}_0 = \{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ такое, что $\mathrm{cl}\{u_k(q) : k \in \mathbb{N}\} = \mathscr{X}(q)$. Согласно [2, лемма 2.5 (1)] существует последовательность (W_n) открытых подмножеств Q, удовлетворяющая следующим условиям:

$$q_n \in W_n, \quad \mathrm{cl}\, W_n \cap \mathrm{cl} \bigcup_{k \neq n} W_k = \varnothing$$

для всех $n \in \mathbb{N}$;

$$\Bigl(\mathrm{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n\Bigr) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{cl}\, W_n = \{q\}.$$

Рассмотрим множество сечений

$$\mathscr{W} = \Bigl\{ w \in C(Q, \mathscr{X}) : w = 0 \text{ на } \mathrm{cl} \bigcup_{k \neq n} W_k \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N} \Bigr\}.$$

Пусть $p \in Q$ и $p \neq q$. Как легко видеть, либо $p \notin \mathrm{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$, либо $p \in \mathrm{cl}\, W_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Во всяком случае существует непрерывная функция $f : Q \to [0, 1]$ такая, что $f(p) = 1$ и $f = 0$ на $\mathrm{cl} \bigcup_{k \neq n} W_k$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, ибо пространство Q вполне регулярно. Если $x \in \mathscr{X}(p)$, то по теореме 1.1 найдется сечение $u \in C(Q, \mathscr{X})$ со значением $u(p) = x$, откуда $x = w(p)$, где $w = fu \in \mathscr{W}$. Значит, $\mathscr{W}(p) = \mathscr{X}(p)$, и тем самым объединение $\mathscr{V} = \mathscr{U}_0 \cup \mathscr{W}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$.

В силу нашего предположения для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется номер n_m такой, что

$$|\langle u_1 \mid H_n\rangle(q_n)| < 1/m, \dots, |\langle u_m \mid H_n\rangle(q_n)| < 1/m$$

для всех $n \ge n_m$. Можно считать, что $n_1 < n_2 < \cdots$. С каждым $n \in \mathbb{N}$ свяжем окрестность V_n точки q_n следующим образом: если $n < n_1$, то положим $V_n := W_n$; если же $n_m \le n < n_{m+1}$, то возьмем V_n так, чтобы

$$|\langle u_1 \mid H_n\rangle| \le 1/m, \dots, |\langle u_m \mid H_n\rangle| \le 1/m \quad \text{на } V_n$$

и $V_n \subset W_n$. В частности, множества V_n попарно не пересекаются. Поскольку пространство Q вполне регулярно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует непрерывная функция $f_n : Q \to [0,1]$ такая, что $f_n(q_n) = 1$ и $f_n = 0$ вне V_n. По нашему построению для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|f_n\langle u_k \mid H_n\rangle\|_\infty \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Теперь рассмотрим отображение $H : p \in Q \mapsto H(p) \in \mathscr{X}(p)'$, определенное формулой

$$H(p) = \begin{cases} f_n(p)H_n(p), & p \in V_n, \\ 0, & p \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n. \end{cases}$$

Очевидно, $\|H\| \le 1$. Проверим, что $\langle v \mid H\rangle \in C(Q)$ для всех $v \in \mathscr{V}$. Если $v \in \mathscr{W}$, то $v = 0$ на $\mathrm{cl} \bigcup\limits_{k\ne n} W_k \supset \bigcup\limits_{k\ne n} V_k$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, откуда $\langle v \mid H\rangle = f_n\langle v \mid H_n\rangle \in C(Q)$. Наконец, пусть $v \in \mathscr{U}_0$. В этом случае

$$\|f_n\langle v \mid H_n\rangle\|_\infty = \|f_n\langle u_k \mid H_n\rangle\|_\infty \to 0$$

при $n \to \infty$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\langle v \mid H_n\rangle$$

сходится равномерно, так как его члены имеют попарно не пересекающиеся носители. Ясно, что функция $\langle v \mid H\rangle$ является поточечной суммой этого ряда и тем самым принадлежит $C(Q)$.

Итак, в силу теоремы [6, п. 2.4.9] $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$. Остается заметить, что $H(q_n) = H_n(q_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $H(q) = 0$. Доказательство завершено.

Замечание. В доказанном предложении расслоение $\mathscr{R}$ можно заменить произвольным НБР $\mathscr{Y}$ над Q, переписав выражение $\langle u \mid H_n\rangle(q_n) \to 0$ в виде $\|H_n(q_n)u(q_n)\| \to 0$. В самом деле, в доказательстве ссылка на теорему [6, п. 2.4.9] остается верной также для отображения $H : p \in Q \mapsto H(p) \in B(\mathscr{X}(p), \mathscr{Y}(p))$. То, что поточечная сумма равномерно сходящегося ряда в $C(Q, \mathscr{Y})$ принадлежит $C(Q, \mathscr{Y})$, следует из [6, п. 2.3.6].

1.5. Напомним, что НБР $\mathscr{X}_0$ над топологическим пространством Q называется (*непрерывным*) *подрасслоением* НБР $\mathscr{X}$ над Q, если каждый слой $\mathscr{X}_0(q)$ $(q \in Q)$ является банаховым подпространством слоя $\mathscr{X}(q)$ и $C(Q, \mathscr{X}_0) = C(Q, \mathscr{X}) \cap \prod\limits_{q\in Q} \mathscr{X}_0(q)$.

Предложение. *Пусть* $\mathscr{Y}$ — НБР *над топологическим пространством* $\overline{Q}$, $\mathscr{Y}_0$ — *подрасслоение* $\mathscr{Y}$ *и* $Q \subset \overline{Q}$. *Тогда ограничение* $\mathscr{Y}_0|_Q$ *подрасслоения* $\mathscr{Y}_0$ (см. [6, п. 2.2.5]) *является подрасслоением ограничения* $\mathscr{Y}|_Q$ *расслоения* $\mathscr{Y}$.

Доказательство. Пусть u — произвольное сечение над Q подрасслоения $\mathscr{Y}_0$. По теореме 1.1 для произвольной точки $\bar{q} \in Q$ найдется сечение $v \in C(\overline{Q}, \mathscr{Y}_0)$, принимающее значение $v(\bar{q}) = u(\bar{q})$. Поскольку $v \in C(\overline{Q}, \mathscr{Y}_0) \subset C(\overline{Q}, \mathscr{Y})$, согласно [6, предложение 2.3.4] равносильны следующие три утверждения:

u непрерывно в $\bar{q}$ как сечение $\mathscr{Y}_0$,

функция $\|u - v\big|_Q\| : Q \to \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху в точке $\bar{q}$,

u непрерывно в $\bar{q}$ как сечение $\mathscr{Y}$.

Отсюда

$$C(Q, \mathscr{Y}_0) = C(Q, \mathscr{Y}) \cap \prod_{q\in Q} \mathscr{Y}_0(q).$$

Кроме того, $C(Q,\mathscr{Y}_0)=C(Q,\mathscr{Y}_0|_Q)$ и $C(Q,\mathscr{Y})=C(Q,\mathscr{Y}|_Q)$ (см. [6, п. 2.2.5]). Следовательно,

$$C(Q,\mathscr{Y}_0|_Q)=C(Q,\mathscr{Y}|_Q)\cap\prod_{q\in Q}\mathscr{Y}_0\big|_Q(q),$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Непрерывность слабо непрерывных сечений

2.1. Рассмотрим НБР $\mathscr{X}$ над топологическим пространством Q такое, что $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$.

В этом случае если глобальное сечение u расслоения $\mathscr{X}$ слабо непрерывно, то множество $\{|\!|\!|u|\!|\!|>\lambda\}$ открыто в Q для любого $\lambda\in\mathbb{R}$, так как поточечная норма $|\!|\!|u|\!|\!|$ является поточечным супремумом множества непрерывных функций $\{\langle u|H\rangle : H\in\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R}),\ |\!|\!|H|\!|\!|\le 1\}$.

Лемма (о слабо непрерывном разрывном сечении). *Пусть $v\in C_w(Q,\mathscr{X})$ и $q\in Q$, причем $v(q)=0$ и $|\!|\!|v|\!|\!|\le 1$. Кроме того, пусть $\mathscr{U}\subset C(Q,\mathscr{X})$ либо $\{0\}$, либо линейная оболочка сечений $u_1,\dots,u_n$ ($n\in\mathbb{N}$) с линейно независимыми значениями $u_1(q),\dots,u_n(q)$. Предположим, что для числа $\varepsilon>0$ не существует окрестности точки q, в которой $|\!|\!|v|\!|\!|<\varepsilon$. Тогда в любой окрестности точки q найдется точка p такая, что $\|u(p)-v(p)\|\ge\varepsilon/3$ для всех $u\in\mathscr{U}$.*

Доказательство. Случай $\mathscr{U}=\{0\}$ в пояснении не нуждается. Рассмотрим второй случай.

Воспользовавшись леммой 1.2 (2), возьмем окрестность W точки q и конечное подмножество $\mathscr{W}\subset\mathscr{U}$ такие, что совокупность $\mathscr{W}(p)$ служит $(\varepsilon/6)$-сетью для множества $\{u(p) : u\in\mathscr{U},\ 2\varepsilon/3\le\|u(p)\|\le 1+\varepsilon/3\}$ в любой точке $p\in W$, и такие, что $2\varepsilon/3\le|\!|\!|w|\!|\!|\le 1+\varepsilon/3$ на W для всех $w\in\mathscr{W}$. В силу замечания перед леммой для каждого элемента $w\in\mathscr{W}$ существует окрестность V_w точки q, в которой $|\!|\!|w-v|\!|\!|>|\!|\!|w-v|\!|\!|(q)-\varepsilon/6$. Тогда для любых $p\in V:=\bigcap\limits_{w\in\mathscr{W}}V_w$ и $w\in\mathscr{W}$ имеем

$$|\!|\!|w-v|\!|\!|(p)\ge|\!|\!|w-v|\!|\!|(q)-\varepsilon/6=|\!|\!|w|\!|\!|(q)-\varepsilon/6\ge 2\varepsilon/3-\varepsilon/6=\varepsilon/2.$$

Пусть U — произвольная окрестность q. Согласно нашему предположению $|\!|\!|v|\!|\!|(p)\ge\varepsilon$ для некоторой точки $p\in U\cap V\cap W$. Если сечение $u\in\mathscr{U}$ удовлетворяет неравенствам $2\varepsilon/3\le\|u(p)\|\le 1+\varepsilon/3$, то при подходящем элементе $w\in\mathscr{W}$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\|u(p)-v(p)\|&\ge\|w(p)-v(p)\|-\|u(p)-w(p)\|\\&\ge|\!|\!|w-v|\!|\!|(p)-\varepsilon/6\ge\varepsilon/2-\varepsilon/6=\varepsilon/3.\end{aligned}$$

Наконец, если $u\in\mathscr{U}$ и либо $\|u(p)\|<2\varepsilon/3$, либо $\|u(p)\|>1+\varepsilon/3$, то

$$\|u(p)-v(p)\|\ge|\,\|u(p)\|-\|v(p)\|\,|\ge\varepsilon/3,$$

так как $\varepsilon\le\|v(p)\|\le 1$. Таким образом, произвольная окрестность U точки q содержит точку p такую, что $\|u(p)-v(p)\|\ge\varepsilon/3$ для всех $u\in\mathscr{U}$. Лемма доказана.

2.2. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q и $q\in Q$.

Лемма. *При выполнении любого из следующих двух условий всякое слабо непрерывное глобальное сечение $\mathscr{X}$ непрерывно в точке q:*

(1) *для любого элемента $u \in C_w(Q, \mathscr{X})$ со значением $u(q) = 0$ функция $\|u\|$ непрерывна в точке q;*

(2) *пространство Q вполне регулярно, всякое сечение из $C_w(Q, \mathscr{X})$ ограничено в некоторой окрестности точки q, и для любого элемента $v \in C_w(Q, \mathscr{X})$, $\|v\| \le 1$, со значением $v(q) = 0$ функция $\|v\|$ непрерывна в точке q.*

Доказательство. (1) Вследствие [6, предложение 2.3.4] глобальное сечение v расслоения $\mathscr{X}$ непрерывно в q, если найдется элемент $c \in C(Q, \mathscr{X})$ со значением $c(q) = v(q)$ такой, что поточечная норма $\|u\|$ разности $u = v - c$ непрерывна в q. Напомним, что элемент $C(Q, \mathscr{X})$ со значением $v(q)$ в точке q существует по теореме 1.1 и что $C(Q, \mathscr{X}) \subset C_w(Q, \mathscr{X})$.

(2) Предположим, что сечение $u \in C_w(Q, \mathscr{X})$ принимает значение $u(q) = 0$. По нашим условиям существует окрестность U точки q, в которой поточечная норма $\|u\|$ ограничена некоторым числом $n \in \mathbb{N}$, и существует непрерывная функция $f : Q \to [0, 1]$, удовлетворяющая равенствам $f(q) = 1$ и $f = 0$ вне U. Очевидно, слабо непрерывное сечение $v = (1/n)fu$ таково, что $v(q) = 0$ и $\|v\| \le 1$. Значит, функция $\|v\|$ непрерывна в q. Поскольку $\|u\| = n(1/f)\|v\|$ в окрестности $\{f > 1/2\}$ точки q, функция $\|u\|$ также непрерывна в q. Тем самым выполняется условие (1). Лемма доказана.

2.3. Теорема. *Пусть Q — вполне регулярное топологическое пространство и $\mathscr{X}$ — НБР над Q такое, что $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$. Если точка $q \in Q$ обладает счетной базой окрестностей и слой $\mathscr{X}(q)$ является сепарабельным, то всякое слабо непрерывное глобальное сечение расслоения $\mathscr{X}$ непрерывно в q.*

Доказательство. Предположим, что точка $q \in Q$ обладает счетной базой окрестностей $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и что слой $\mathscr{X}(q)$ является сепарабельным. Зафиксируем произвольный элемент $v \in C_w(Q, \mathscr{X})$, удовлетворяющий условиям $v(q) = 0$ и $\|v\| \le 1$. Как легко видеть из доказательства [2, п. 5.4 (a)], всякое слабо непрерывное глобальное сечение $\mathscr{X}$ ограничено в некоторой окрестности точки q. Поэтому в силу леммы 2.2 (2) для доказательства нашей теоремы достаточно убедиться в непрерывности функции $\|v\|$ в точке q.

Имеет место один из двух случаев: банахово пространство $\mathscr{X}(q)$ бесконечномерно или $\mathscr{X}(q)$ имеет некоторую конечную размерность n_0. В первом случае можно выделить множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ линейно независимых элементов пространства $\mathscr{X}(q)$, имеющее всюду плотную линейную оболочку. По теореме 1.1 для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется сечение $u_n \in C(Q, \mathscr{X})$ со значением $u_n(q) = x_n$. В конечномерном случае для каждого натурального $n > n_0$ положим $u_n := 0 \in C(Q, \mathscr{X})$. Если $n_0 \ne 0$, то, воспользовавшись теоремой 1.1, подберем сечения $u_1, \dots, u_{n_0} \in C(Q, \mathscr{X})$ такие, что $(u_1(q), \dots, u_{n_0}(q))$ — базис пространства $\mathscr{X}(q)$. В любом случае для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathscr{U}_n$ линейную оболочку сечений $u_1, \dots, u_n$ и положим $\mathscr{U} := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{U}_n$. Заметим, что подмножество $\mathscr{U}(q) \subset \mathscr{X}(q)$ является всюду плотным.

Теперь допустим противное: пусть поточечная норма $\|v\|$ разрывна в q, т. е. для некоторого числа $\varepsilon > 0$ не существует окрестности точки q, в которой $\|v\| < \varepsilon$. Тогда по лемме о слабо непрерывном разрывном сечении (2.1) для $n = 1$ найдется точка $q_1 \in U_1$ и по индукции для каждого $n = 2, 3, \dots$ найдется точка q_n в окрестности $(U_1 \cap \dots \cap U_n) \backslash \{q_1, \dots, q_{n-1}\}$ точки q такая, что

$$\|u(q_n) - v(q_n)\| \geq \varepsilon/3 \quad \text{для всех } u \in \mathscr{U}_n.$$

Как легко видеть, $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$, последовательность (q_n) сходится к q, и $q_n \neq q$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Далее, в силу утверждения 1.3 (2) для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует гомоморфизм $H_n \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, $\|\!|H_n|\!\| \leq 1$, такой, что

$$\langle u(q_n), H_n(q_n) \rangle = 0 \text{ для всех } u \in \mathscr{U}_n \text{ и } \langle v(q_n), H_n(q_n) \rangle = \varepsilon/4.$$

Поскольку любое сечение $u \in \mathscr{U}$ принадлежит $\mathscr{U}_n$ для любого n начиная с некоторого номера, $\langle u(q_n), H_n(q_n) \rangle = 0$ для всех n начиная с того же номера. В частности, $\langle u \mid H_n \rangle(q_n) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого элемента $u \in \mathscr{U}$. В таком случае по предложению 1.4 существует гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, удовлетворяющий равенствам $H(q_n) = H_n(q_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $H(q) = 0$. Но тогда $\langle v \mid H \rangle(q_n) = \langle v(q_n), H_n(q_n) \rangle = \varepsilon/4$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\langle v \mid H \rangle(q) = 0$. Это противоречит слабой непрерывности сечения v, так как $q_n \to q$ и $\varepsilon > 0$.

Итак, поточечная норма $\|\!|v|\!\|$ непрерывна в точке q. Теорема доказана.

2.4. Замечание. Как показывает пример слабо непрерывного разрывного сечения в [2, п. 5.1], требование сепарабельности слоя $\mathscr{X}(q)$ в теореме 2.3 является существенным.

2.5. Следующее утверждение непосредственно вытекает из теоремы 2.3.

Следствие. *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР с сепарабельными слоями над вполне регулярным топологическим пространством Q, удовлетворяющим первой аксиоме счетности. Предположим, что $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$. Тогда $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$.*

2.6. Следствие. *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над метризуемым локально компактным пространством Q. Если все слои расслоения $\mathscr{X}$ конечномерны или $\mathscr{X}$ имеет счетное послойно плотное множество непрерывных глобальных сечений, то $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$.*

Доказательство. При любом из двух указанных условий согласно [2, п. 4.4 (6)] и [2, п. 4.4 (5)] соответственно $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$ и тем самым можно применить 2.5.

2.7. Следствие. *Пусть $Q = \overline{\mathbb{N}}$ — одноточечная компактификация натурального ряда. Для всякого НБР $\mathscr{X}$ над Q с сепарабельным слоем в точке ∞ имеет место равенство $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$.*

Доказательство. Поскольку ∞ является единственной неизолированной точкой топологического пространства Q, можно воспользоваться утверждением 4.4 (9) из [2] и применить теорему 2.3 при $q = \infty$.

2.8. Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q и $\mathscr{X}_0$ — подрасслоение $\mathscr{X}$.*

(1) *Имеет место включение $C_w(Q, \mathscr{X}_0) \subset C_w(Q, \mathscr{X})$.*

(2) *Если $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$, то и $C_w(Q, \mathscr{X}_0) = C(Q, \mathscr{X}_0)$.*

Доказательство. (1) Зафиксируем произвольное сечение $v \in C_w(Q, \mathscr{X}_0)$ и произвольный гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$. Достаточно показать, что $\langle v \mid H \rangle \in C(Q)$.

Рассмотрим отображение $H_0 : q \in Q \mapsto H_0(q) \in \mathscr{X}_0(q)'$, определенное формулой $H_0(q) = H(q)|_{\mathscr{X}_0(q)}$ для всех $q \in Q$. Ясно, что $\|H_0\| \leq \|H\|$ и что $\langle u \mid H_0\rangle = \langle u \mid H\rangle$ для любого сечения u подрасслоения $\mathscr{X}_0$. Отсюда по теореме [6, п. 2.4.4] получаем $H_0 \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_0, \mathscr{R})$, потому что $C(Q, \mathscr{X}_0) \subset C(Q, \mathscr{X})$. Следовательно, $\langle v \mid H\rangle = \langle v \mid H_0\rangle \in C(Q)$.

(2) Предположим, что $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$. Тогда ввиду (1) $C_w(Q, \mathscr{X}_0) \subset C(Q, \mathscr{X})$, откуда

$$C_w(Q, \mathscr{X}_0) = C_w(Q, \mathscr{X}_0) \cap \prod_{q\in Q} \mathscr{X}_0(q) \subset C(Q, \mathscr{X}) \cap \prod_{q\in Q} \mathscr{X}_0(q) = C(Q, \mathscr{X}_0).$$

Поскольку всегда имеет место включение $C(Q, \mathscr{X}_0) \subset C_w(Q, \mathscr{X}_0)$, предложение доказано.

2.9. Как показывает следующее предложение вместе с примером слабо непрерывного разрывного сечения в [2, п. 5.1] или вместе с теоремой 5.12 из [2], в общем случае в равенстве

$$C(Q, \mathscr{X}_0) = C(Q, \mathscr{X}) \cap \prod_{q\in Q} \mathscr{X}_0(q),$$

где $\mathscr{X}$ — НБР над Q и $\mathscr{X}_0$ — подрасслоение $\mathscr{X}$, пространства непрерывных сечений не могут быть заменены соответствующими пространствами слабо непрерывных сечений.

Напомним, что топологическое пространство Q называется *пространством Фреше — Урысона*, если для любой точки $q \in Q$ и для любого подмножества $P \subset Q$ из включения $q \in \operatorname{cl} P$ следует существование последовательности элементов P, сходящейся к q.

Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q. Предположим, что Q вполне регулярно и выполнено одно из следующих условий:*

(1) *Q удовлетворяет первой аксиоме счетности, и $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$;*

(2) *Q — пространство Фреше — Урысона, и $\mathscr{X}$ — постоянное расслоение.*

Тогда равенство $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$ равносильно тому, что

$$C_w(Q, \mathscr{X}_0) = C_w(Q, \mathscr{X}) \cap \prod_{q\in Q} \mathscr{X}_0(q) \quad \text{для любого подрасслоения } \mathscr{X}_0 \text{ НБР } \mathscr{X}. \tag{$*$}$$

Доказательство. Необходимость очевидным образом следует из утверждения 2.8 (2) и определения подрасслоения.

Для доказательства достаточности предположим, что имеет место $(*)$.

(1) Сначала заметим, что $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}_0, \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}_0$, каково бы ни было подрасслоение $\mathscr{X}_0$ НБР $\mathscr{X}$. Действительно, пусть $\mathscr{X}_0$ — подрасслоение $\mathscr{X}$. Как отмечено в доказательстве 2.8 (1), для любого гомоморфизма $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ отображение $H_0\colon q \in Q \mapsto H(q)|_{\mathscr{X}_0(q)}$ принадлежит $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}_0, \mathscr{R})$, причем $\|H_0\| \leq \|H\|$. Поэтому для любых $q \in Q$ и $x_0 \in \mathscr{X}_0(q)$ имеем

$$\begin{aligned}\|x_0\| &= \sup\{\langle x_0, H(q)\rangle : H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}),\ \|H\| \leq 1\}\\ &\leq \sup\{\langle x_0, H_0(q)\rangle : H_0 \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_0, \mathscr{R}),\ \|H_0\| \leq 1\} \leq \|x_0\|.\end{aligned}$$

Значит, $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}_0, \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}_0$.

Мы доказываем включение $C_w(Q,\mathscr{X})\subset C(Q,\mathscr{X})$, ибо всегда $C(Q,\mathscr{X})\subset C_w(Q,\mathscr{X})$. В силу леммы 2.2 (1) достаточно убедиться в том, что для произвольной точки $q_0\in Q$ и произвольного сечения $v\in C_w(Q,\mathscr{X})$ со значением $v(q_0)=0$ функция $\|v\|$ непрерывна в q_0.

Для каждого элемента $p\in Q\backslash\{q_0\}$ по теореме 1.1 найдется сечение $u_p\in C(Q,\mathscr{X})$, принимающее значение $u_p(p)=v(p)$, и поскольку пространство Q вполне регулярно, найдется функция $f_p\in C(Q)$ такая, что $f_p(p)=1$ и $f_p(q_0)=0$. Линейная оболочка множества сечений $\{f_pu_p : p\in Q\backslash\{q_0\}\}$ индуцирует некоторое подрасслоение $\mathscr{X}_0$ НБР $\mathscr{X}$ (см. [6, п. 2.2.2]). При этом для любой точки $q\in Q$ слой $\mathscr{X}_0(q)$ есть замыкание линейной оболочки множества $\{(f_pu_p)(q) : p\in Q\backslash\{q_0\}\}$. В частности, $v\in\prod_{q\in Q}\mathscr{X}_0(q)$ и $\mathscr{X}_0(q_0)=\{0\}$. Тогда

$$v\in C_w(Q,\mathscr{X})\cap\prod_{q\in Q}\mathscr{X}_0(q)=C_w(Q,\mathscr{X}_0)$$

и в силу теоремы 2.3 сечение v расслоения $\mathscr{X}_0$ непрерывно в точке q_0. Следовательно, функция $\|v\|$ непрерывна в q_0.

(2) В доказательстве нуждается только случай, когда топологическое пространство Q не дискретно. В этом случае существует неизолированная точка $q_0\in Q$ и существует последовательность (q_n) попарно различных элементов $Q\backslash\{q_0\}$, сходящаяся к q_0.

Пусть X — слой расслоения $\mathscr{X}$. Согласно теореме [2, п. 5.12] равенство $C_w(Q,\mathscr{X})=C(Q,\mathscr{X})$ равносильно тому, что банахово пространство X обладает свойством WS (ослабленным свойством Шура), т. е. в X всякая w-w^*-сходящаяся к нулю последовательность сходится к нулю по норме. (Напомним, что последовательность (x_n) в X называется w-w^*-сходящейся к нулю, если $\langle x_n,x_n'\rangle\to 0$ при $n\to\infty$ для любой слабо* сходящейся последовательности $(x_n')\subset X'$; ср. [2, п. 1.7] или [3, п. 3.1.5].)

Возьмем произвольную w-w^*-сходящуюся к нулю последовательность (x_n) в X. Рассмотрим сепарабельное банахово подпространство $X_0\subset X$, содержащее (x_n), и обозначим через $\mathscr{X}_0$ постоянное НБР со слоем X_0 над Q. НБР $\mathscr{X}_0$ является подрасслоением $\mathscr{X}$, так как

$$C(Q,\mathscr{X}_0)=C(Q,X_0)=C(Q,X)\cap\prod_{q\in Q}X_0=C(Q,\mathscr{X})\cap\prod_{q\in Q}\mathscr{X}_0(q),$$

где $C(Q,X_0)$ и $C(Q,X)$ — пространства непрерывных функций на Q, действующих в X_0 и X соответственно. Существует сечение $u\in C_w(Q,\mathscr{X})$, принимающее значения в X_0 и удовлетворяющее равенствам $u(q_n)=x_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $u(q_0)=0$ (см. доказательство [2, п. 5.2 (3)]). Стало быть,

$$u\in C_w(Q,\mathscr{X})\cap\prod_{q\in Q}X_0=C_w(Q,\mathscr{X})\cap\prod_{q\in Q}\mathscr{X}_0(q)=C_w(Q,\mathscr{X}_0).$$

Тогда по лемме 5.2 (1) из [2] последовательность (x_n) w-w^*-сходится к нулю в X_0. Поскольку сепарабельные банаховы пространства обладают свойством WS (см. [2, п. 1.8 (2)]), $\|x_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, X обладает свойством WS.

Итак, в силу теоремы [2, п. 5.12] $C_w(Q,\mathscr{X})=C(Q,\mathscr{X})$. Доказательство завершено.

2.10. Предложение. *Рассмотрим* НБР $\mathscr{Y}$ *над топологическим пространством* $\overline{Q}$, *подмножество* $Q \subset \overline{Q}$ *и ограничение* $\mathscr{Y}|_Q$ *расслоения* $\mathscr{Y}$ *на* Q.

(1) *Имеет место включение* $C_w(Q, \mathscr{Y}|_Q) \subset C_w(Q, \mathscr{Y})$.

(2) *Если* $C_w(Q, \mathscr{Y}) = C(Q, \mathscr{Y})$, *то* $C_w(Q, \mathscr{Y}|_Q) = C(Q, \mathscr{Y}|_Q)$.

(3) *Пусть* $\mathscr{X}$ — *ограничение на* Q *некоторого подрасслоения* НБР $\mathscr{Y}$. *Если* $C_w(Q, \mathscr{Y}) = C(Q, \mathscr{Y})$, *то* $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$.

Доказательство. Из определений гомоморфизма и ограничения НБР (см. [6, пп. 2.4.2, 2.2.5]) вытекает, что для любого элемента $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{Y}, \mathscr{R}_{\overline{Q}})$ его ограничение $H|_Q$ принадлежит $\mathrm{Hom}(\mathscr{Y}|_Q, \mathscr{R}_Q)$. Отсюда следует утверждение (1).

Утверждение (2) непосредственно вытекает из (1), равенства $C(Q, \mathscr{Y}) = C(Q, \mathscr{Y}\big|_Q)$ (см. [6, 2.2.5]) и того факта, что всякое непрерывное сечение является слабо непрерывным.

Наконец, ввиду (2) и предложений 1.5 и 2.8 (2) справедливо утверждение (3). Доказательство окончено.

2.11. Важную роль играют непрерывные банаховы расслоения над экстремально несвязными компактными хаусдорфовыми пространствами: в 1991 г. А. Е. Гутман получил аналитическое представление абстрактного решеточно нормированного пространства, в частности абстрактного пространства Банаха — Канторовича, посредством такого (просторного) расслоения (см. [6, 7]).

Напомним, что топологическое пространство Q называется *экстремально несвязным*, если замыкание $\mathrm{cl}\, U$ любого открытого подмножества $U \subset Q$ является открытым.

Теорема. *Пусть* Q — *экстремально несвязное регулярное топологическое пространство. Для всякого* НБР $\mathscr{X}$ *над* Q *имеет место равенство* $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$.

Доказательство. Легко видеть, что пространство Q является вполне регулярным. Поэтому мы можем рассмотреть экстремально несвязное компактное хаусдорфово пространство $\overline{Q}$, содержащее Q как всюду плотное подмножество (см., например, [10, пп. 6.2.27, 3.5]).

Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над Q. Как следует из леммы 2.5.10 и теорем 3.1.5 и 3.3.7 (1) в [6], существует НБР $\mathscr{Y}$ над $\overline{Q}$ такое, что, с одной стороны, $\mathscr{X}$ является ограничением некоторого подрасслоения НБР $\mathscr{Y}$ на Q; с другой стороны, $C_w(Q, \mathscr{Y} = C(Q, \mathscr{Y})$. В таком случае применение предложения 2.10 (3) завершает доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gierz G.* Bundles of topological vector spaces and their duality. Berlin etc.: Springer-Verl., 1982. (Lecture Notes in Math.; 955).
2. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* О понятии сопряженного банахова расслоения // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 1. С. 8–71.
3. *Gutman A. E., Koptev A. V.* Dual Banach bundles // Nonstandard analysis and vector lattices. Dordrecht etc.: Kluwer, 2000. P. 105–160.
4. *Koptev A. V., Robbins D. A.* A note on the space of weakly continuous sections of a Banach bundle // Siberian Adv. Math. 2002. V. 12, N 1. P. 51–62.
5. *Gutman A. E., Koptev A. V.* On the notion of a dual Banach bundle // Siberian Adv. Math. 1999. V. 9, N 1. P. 46–98.
6. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Тр. Ин-та математики СО РАН им. С. Л. Соболева. 1995. Т. 29. С. 63–211.
7. *Gutman A. E.* Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. I // Siberian Adv. Math. 1993. V. 3, N 3. P. 1–55.

8. *Коптев А. В.* Критерий рефлексивности слоев банахова расслоения // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 4. С. 851–856.
9. *Kutateladze S. S.* Fundamentals of functional analysis. Dordrecht etc.: Kluwer, 1996.
10. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.

Статья поступила 19 сентября 2003 г.

Коптев Александр Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
koptev@math.nsc.ru