Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 512.534.2+510.227

О СООТНОШЕНИИ КОММУТАТИВНОСТИ В СИММЕТРИЧЕСКОЙ ПОЛУГРУППЕ

В. А. Колмыков

Аннотация: Вычисляется мощность централизатора в случае, когда элемент — инъекция или сюръекция, а основное множество счетно. Доказывается формула для мощности множества классов сопряженных элементов в бесконечной симметрической группе.

Ключевые слова: полугруппа, централизатор, граф.

Соотношение коммутативности $ab = ba$ — одно из самых интересных и плодотворных в абстрактной алгебре. Между тем, наши знания по этому вопросу далеки от полноты.

Централизатор $C_{\mathscr{T}(M)}(g)$ элемента g полугруппы $\mathscr{T}(M)$ всех преобразований множества M до сих пор почти не изучен (см., например, работы [1, 2] и библиографию к ним). Не определена даже такая его простая характеристика, как мощность. В теореме 1 эта мощность вычислена в ситуации, когда g — инъекция или сюръекция, а множество M счетно.

Если же M несчетно, то удалось рассмотреть лишь случай (теорема 2), когда конфинальный характер $cf(M)$ этого множества больше $\aleph_0$, а g — инъекция. Допуская вольность речи, можно сказать, что «большинство» множеств имеет конфинальный характер, больший чем $\aleph_0$. Интересно отметить, что если $cf(M) > \aleph_0$, а $g : M \to M$ — инъекция, отличная от тождественного отображения, то коммутативность (вопреки интуиции) не является «редкостью»: множество функций, коммутирующих с g, равномощно множеству некоммутирующих.

Симметрическая группа $S(M)$ естественно разбивается на классы сопряженных элементов. Какова мощность множества $\widehat{S}(M)$ этих классов? Иными словами, сколько существует по сути различных симметрий множества M? Оказывается, ответ на этот простой вопрос связан с совсем непростым вопросом о плотности шкалы кардинальных чисел (теорема 3) и поэтому фактически закрыт от нас.

1. Формулировка результатов. Действие отображения $g : M \to M$ на множестве M хорошо представляется ориентированным графом O_g с множеством вершин M и множеством стрелок $E = \{(x, g(x))\}_{x \in M} \subseteq M^2$. Мощность множества компонент связности этого графа обозначим через $k(g)$ (имеется в виду отношение связности, являющееся тончайшим отношением эквивалентности, для которого $x \sim g(x)$ $\forall x \in M$).

Степенью вершины ориентированного графа называется сумма мощности множества входящих в нее стрелок и мощности множества выходящих из нее стрелок (стрелка-петля принадлежит обоим множествам). Вершина степени ≥ 3

называется *узлом.* *Ветвлением* $\tau(g)$ *отображения* g назовем сумму степеней узлов O_g; если в O_g нет узлов (т. е. g — инъекция), то положим $\tau(g) = 2$.

Теорема 1. *Если* M *счетно и* $g : M \to M$ *— инъекция или сюръекция, то мощность централизатора* $C_{\mathscr{T}(M)}(g)$ *равна* $\aleph_0^{k(g)\tau(g)}$.

Пример. Пусть $M = \mathbb{N}$. Если $g : n \mapsto n + 1$, то $k(g) = 1$, $\tau(g) = 2$ и $|C_{\mathscr{T}(M)}(g)| = \aleph_0^2 = \aleph_0$. Если $g : n \mapsto n^2$, то $k(g) = \aleph_0$, $\tau(g) = 2$ и $|C_{\mathscr{T}(M)}(g)| = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Конфинальным характером $cf(\mathfrak{m})$ *кардинального числа* $\mathfrak{m}$ называется наименьшее из кардинальных чисел $\mathfrak{t}$ таких, что $\mathfrak{m} = \sum\{\mathfrak{l}_t : t \in T\}$, где $\mathfrak{l}_t < \mathfrak{m}\ \forall t \in T$ и $|T| = \mathfrak{t}$. *Конфинальным характером множества* называется конфинальный характер его мощности.

Теорема 2. *Если* $cf(M) > \aleph_0$ *и* $g : M \to M$ *— инъекция, то централизатор* $C_{\mathscr{T}(M)}(g)$ *равномощен всей полугруппе* $\mathscr{T}(M)$.

Замечание. Пусть $|M| \geq 3$ и $g : M \to M$ — не тождественное отображение. Легко доказать, что дополнение централизатора $C_{\mathscr{T}(M)}(g)$ до полугруппы $\mathscr{T}(M)$ имеет мощность, не меньшую чем мощность самого этого централизатора.

Через $\widehat{S}(M)$ обозначим множество классов сопряженных элементов в симметрической группе $S(M)$. Если $\mathfrak{m} = |M|$, то положим $\hat{s}(\mathfrak{m}) = |\widehat{S}(M)|$. Через $h(\mathfrak{m})$ обозначим мощность множества $[1, \mathfrak{m}]$ (отрезок в структуре кардинальных чисел).

Теорема 3[1]**.** *Если* $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, *то* $\hat{s}(\mathfrak{m}) = (h(\mathfrak{m}))^{\aleph_0}$.

Любопытным следствием этой теоремы является возможность дать определение кардинального числа $\mathfrak{c}$ как одной из «неподвижных точек отображения $\hat{s}$».

Следствие. *Имеет место равенство* $\inf\{\mathfrak{m} : \mathfrak{m} \geq \aleph_0,\ \hat{s}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}\} = \mathfrak{c}$.

Замечание. Существует всего три конечных кардинальных числа таких, что $\hat{s}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$, а именно 1, 2 и 3.

2. Доказательства теорем. Исследование коммутативности функций удобно проводить на языке теории графов. Ориентированный граф (орграф) — это пара (V, E), где $E \subseteq V^2$. Элемент $\overrightarrow{uv} = (u, v) \in E$ называется *стрелкой с началом* u *и концом* v.

Эндоморфизмом орграфа называется отображение множества его вершин в себя $v \mapsto \tilde{v}$ такое, что наличие стрелки $\overrightarrow{uv}$ влечет наличие стрелки $\overrightarrow{\tilde{u}\tilde{v}}$. Множество всех эндоморфизмов орграфа G обозначается через $\mathrm{End}(G)$. Очевидно, что централизатор $C_{\mathscr{T}(M)}(g)$ — это $\mathrm{End}(O_g)$.

Упомянутые в предыдущем пункте компоненты связности орграфа O_g на теоретико-графовом языке называются *компонентами слабой связности* (две вершины орграфа *слабо связаны*, если они связаны в неориентированном графе, получающемся заменой стрелок ребрами). *Ветвлением орграфа* назовем сумму степеней его узлов (понятие узла орграфа введено в предыдущем пункте); если же узлов нет, то ветвление положим равным двум. Число компонент слабой связности и ветвление орграфа G обозначим соответственно через $k(G)$ и $\tau(G)$.

[1]В соавторстве с В. Ф. Субботиным.

Множество всех вершин орграфа G обозначается через $V(G)$. Если $V(G)$ счетно, то орграф G называется *счетным.*

Функциональный граф — это орграф, в котором из каждой вершины выходит ровно одна стрелка (на число входящих стрелок ограничений не накладывается, стрелки-петли допускаются). Если v — вершина функционального графа, то через v^+ обозначается вершина, являющаяся концом стрелки, выходящей из v. Функциональный граф назовем *сюръективным* (соответственно *инъективным) графом*, если отображение $v \mapsto v^+$ сюръективно (соответственно инъективно).

Лемма 1. *Если G — счетный функциональный граф и $k(G) = \aleph_0$, то* $|\mathrm{End}(G)| = \mathfrak{c}$.

Доказательство. Очевидно, что $|\mathrm{End}(G)| \leq \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Через k_1 обозначим мощность множества одновершинных компонент орграфа G, а через k_2 — мощность множества компонент, имеющих не менее двух вершин.

Если компонента имеет более одной вершины, то множество ее эндоморфизмов имеет более одного элемента (отображения $v \mapsto v$ и $v \mapsto v^+$). Пусть некоторое отображение переводит множество вершин всех одновершинных компонент в себя, а на вершинах любой другой компоненты действует как эндоморфизм этой компоненты. Описанное отображение является эндоморфизмом орграфа G. Множество таких эндоморфизмов имеет мощность, не меньшую чем $k_1^{k_1} 2^{k_2}$ (считается, что $0^0 = 1$). Так как $k_1 + k_2 = \aleph_0$, то $|\mathrm{End}(G)| \geq k_1^{k_1} 2^{k_2} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. $\square$

Гомоморфизмом f орграфов называется отображение соответствующих множеств вершин такое, что наличие стрелки $\overrightarrow{uv}$ влечет наличие стрелки $\overrightarrow{f(u)f(v)}$. Множество всех гомоморфизмов орграфа G в орграф H обозначается через $\mathrm{Hom}(G, H)$.

Нитью назовем нумерованное подмножество $\{u_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \subseteq V(G)$ такое, что $(u_i)^+ = u_{i+1}$ для любого i. Нумерованное подмножество $\{u_i\}_{i\leq 0}$ этой нити назовем соответствующей *полунитью* или *полунитью вершины* u_0, или *хвостом вершины* u_0. Множество всех вершин, принадлежащих какому-либо хвосту вершины u, обозначим через $T(u)$. Хвост $\{u_i\}_{i\leq 0}$ назовем *простым*, если ни одна из вершин $u_{-1}, u_{-2}, \dots$ не принадлежит контуру орграфа (если таковой имеется). Пусть $\{u_i\}_{i\leq 0}$ — простой хвост. *Расстоянием* $r(u_i, u_j)$ от u_i до u_j назовем $|i - j|$.

Пусть A и B — функциональные графы, $v \in V(A)$ и зафиксировано несколько простых хвостов вершины v. Через $\widetilde{T}(v)$ обозначим множество всех вершин, входящих хотя бы в один из зафиксированных хвостов. Пусть $\{u_i\}_{i\leq 0}$ — некоторый хвост в B. Будем говорить, что отображение $g : V(A) \to V(B)$ *схлопывает* $\widetilde{T}(v)$ в $\{u_i\}_{i\leq 0}$, если g переводит вершину $w \in \widetilde{T}(v)$ в $u_{-r(w,v)}$.

Лемма 2. *Если A и B — связные функциональные графы конечного ветвления, то* $|\mathrm{Hom}(A, B)| \leq \aleph_0$.

Доказательство. Если связный функциональный граф имеет конечное ветвление, то множество его узлов конечно. Поэтому множество его вершин не более чем счетно. Не более чем счетно и множество хвостов в этом орграфе.

Через V_1 обозначим множество всех вершин орграфа A степени один. Построим множество V_2 следующим образом. Если в A нет узлов и A не нить, то V_2 пусто. Если A — нить, то V_2 состоит из одной вершины, выбранной произвольно. В остальных случаях в A есть узел. Множество V_2 составим из всех тех узлов, у которых существует простой хвост, все вершины которого, имеющие отрицательный индекс, не являются узлами. Множество $V_1 \cup V_2$ конечно.

Если отображение $f : V_1 \cup V_2 \to V(B)$ можно продолжить до гомоморфизма, то множество таких продолжений не более чем счетно. Действительно, на множество вершин, достижимых из $V_1 \cup V_2$ движением вдоль стрелок, гомоморфизм продолжается однозначно, а простой хвост вершины $v \in V_2$ (таких хвостов конечное число) схлопывается в некоторый хвост вершины $f(v)$ и множество таких хвостов не более чем счетно.

Множество же отображений из $V_1 \cup V_2$ в $V(B)$ не более чем счетно. Поэтому $\mathrm{Hom}(A, B)$ не более чем счетно. $\square$

Лемма 3. *Если G — счетный функциональный граф и $k(G)\tau(G) < \aleph_0$, то $|\mathrm{End}(G)| = \aleph_0$.*

Доказательство. 1. Покажем, что $|\mathrm{End}(G)| \geq \aleph_0$. Среди компонент орграфа G имеется компонента (обозначим ее через H) со счетным множеством вершин. Рассмотрим эту компоненту. Все итерации отображения $f : v \mapsto v^+$ являются эндоморфизмами H. Эти итерации различны (действительно, предположим, что $m \neq n$ и $f^m = f^n$; ветвление H конечно, а множество вершин H бесконечно, поэтому в H найдется вершина u такая, что вершины $u, f(u), \ldots, f^{\max(m,n)}(u)$ попарно различны; тогда $f^m(u) \neq f^m(u)$).

2. Если H — орграф, то имеется естественная биекция

$$\mathrm{Hom}(H, H) \simeq \prod_{A \in \mathscr{K}} \coprod_{B \in \mathscr{K}} \mathrm{Hom}(A, B), \tag{1}$$

где $\mathscr{K}$ — множество всех компонент орграфа H. Совмещая это с утверждением леммы 2, заключаем, что $|\mathrm{End}(G)| \leq \aleph_0$. $\square$

Лемма 4. *Если G — счетный сюръективный граф и $\tau(G) = \aleph_0$, то $|\mathrm{End}(G)| = \mathfrak{c}$.*

Доказательство. Очевидно, что $|\mathrm{End}(G)| \leq \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Построим некоторое множество эндоморфизмов, имеющее мощность $\mathfrak{c}$.

Если $k(G) = \aleph_0$, то воспользуемся леммой 1.

Пусть множество компонент конечно. Из условий леммы следует, что в орграфе есть компонента A бесконечного ветвления. Если U — некоторое множество вершин, то положим $T(U) = \bigcup\limits_{u \in U} T(u)$.

Случай 1. Предположим, что в A существует вершина v бесконечной степени. Пусть U — счетное множество вершин таких, что ни одна из них не принадлежит контуру и из каждой направлена стрелка в v. Ясно, что никакая вершина из $T(U)$ не принадлежит контуру. Для каждой $u \in U$ зафиксируем некий хвост, обозначим его через $T_*(u)$. Для каждого отображения $\phi : U \to U$ построим эндоморфизм g_ϕ следующим образом. Он не меняет вершин вне $T(U)$. Если $u \in U$, то g_ϕ схлопывает $T(u)$ в $T_*(\phi(u))$.

Случай 2. Предположим, что в A нет вершин бесконечной степени.

Пусть $L = \{u_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ — нить (соответственно $L = \{u_i\}_{i \leq 0}$ — полунить) и $w_0 = u_m$, где m — целое (соответственно целое неположительное) число. Через $L^{(w)}$ обозначим нить $\{w_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ (соответственно полунить $\{w_i\}_{i \leq 0}$), в которой $w_i = u_{i+m}$.

Если в A есть контур (соответственно нет контура), то существует вершина v такая, что в $T(v)$ нет вершин, принадлежащих контуру, и некоторый ее хвост

L содержит бесконечно много узлов (соответственно существует нить L такая, что она содержит бесконечно много узлов).

Пусть U — множество всех узлов из L. Для $u \in U$ через $\widehat{T}(u)$ обозначим множество всех вершин, принадлежащих какому-либо хвосту вершины u, не содержащему вершины индекса -1 полунити $L^{(u)}$ (полунити, соответствующей нити $L^{(u)}$).

Для каждого $M \subseteq U$ построим эндоморфизм g_M следующим образом. Для всякого $u \in M$ он схлопывает $\widehat{T}(u)$ в полунить $L^{(u)}$ (в полунить, соответствующую нити $L^{(u)}$). Остальные вершины орграфа отображаются в себя. $\square$

Доказательство теоремы 1 следует из лемм 1, 3 и 4. $\square$

Доказательство теоремы 2. Положим $\mathfrak{m} = |M|$. Множество всех попарно не изоморфных связных инъективных функциональных графов счетно. Параметризуем его натуральными числами: $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Пусть $\mathfrak{m}_i$ — мощность множества компонент орграфа O_g, изоморфных E_i. Тогда $\mathfrak{m} = \sum \mathfrak{m}_i |V(E_i)|$. Поскольку $cf(\mathfrak{m}) > \aleph_0$, имеем $\mathfrak{m}_j |V(E_j)| = \mathfrak{m}$ для некоторого j. Так как $|V(E_j)| \le \aleph_0$, то $\mathfrak{m}_j = \mathfrak{m}$. Параметризуем множество компонент вида E_j индексами $l \in A$, где $|A| = \mathfrak{m}$. Для всякого $\phi : A \to A$ построим отображение $g_\phi : M \to M$, которое на вершинах компонент вида E_i $(i \ne j)$ действует как тождественное, а для каждой компоненты K_l вида E_j оно осуществляет некоторое ее изоморфное наложение на компоненту $K_{\phi(l)}$. Отображение g_ϕ является эндоморфизмом орграфа O_g. Множество таких эндоморфизмов имеет мощность $\mathfrak{m}^{\mathfrak{m}}$. $\square$

Доказательство теоремы 3. Пусть $|M| = \mathfrak{m}$ и $\sigma \in S(M)$. Рассмотрим действие группы $\{\sigma^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ на M. Всякую орбиту $\mathscr{O}$ можно отождествить с одной из групп $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$, причем так, что $\sigma|_{\mathscr{O}}$ совпадет со сдвигом $i_n^+ : \overline{k} \mapsto \overline{k} + \overline{1}$. *Цикловым типом* $z(\sigma)$ подстановки σ называется последовательность $\{\mathfrak{m}_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $\mathfrak{m}_n$ — мощность множества, элементами которого являются орбиты типа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Сопряженность подстановок равносильна совпадению их цикловых типов. Поэтому множество $\widehat{S}(M)$ равномощно образу отображения z.

Множество $\operatorname{Im} z$ совпадает с множеством решений уравнения $(l, y) = \mathfrak{m}$, здесь $(\ ,\ )$ — «скалярное произведение» $((x, y) = \sum\limits_n x_n y_n)$, а l — последовательность длин орбит $(l_n = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}|)$. Действительно, $(l, z(\sigma)) = |M| = \mathfrak{m}$. Обратно, пусть $(l, g) = \mathfrak{m}$. Положим $M' = \coprod\limits_n \coprod\limits^{g_n} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Так как $|M'| = \mathfrak{m}$, существует биекция $i : M' \to M$. Ясно, что

$$z\left(i \circ \left(\coprod_n \coprod^{g_n} i_n^+ \right) \circ i^{-1} \right) = g.$$

Итак, $\hat{s}(\mathfrak{m}) = |\{y : (l, y) = \mathfrak{m}\}|$.

Поскольку $\{y : (l, y) = \mathfrak{m}\} \supseteq \{y : y_0 = \mathfrak{m}\}$, имеем

$$(h(\mathfrak{m}))^{\aleph_0} \ge |\{y : (l, y) = \mathfrak{m}\}| \ge |\{y : y_0 = \mathfrak{m}\}| = |[1, \mathfrak{m}]^{\mathbb{N}}| = (h(\mathfrak{m}))^{\aleph_0}.$$

Таким образом, $\hat{s}(\mathfrak{m}) = |\{y\ :\ (l, y) = \mathfrak{m}\}| = (h(\mathfrak{m}))^{\aleph_0}$. $\square$

Доказательство следствия. Если $\aleph_0 \le \mathfrak{m} \le \mathfrak{c}$, то $\aleph_0 \le h(\mathfrak{m}) \le \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{c} = (\aleph_0)^{\aleph_0} \le (h(\mathfrak{m}))^{\aleph_0} \le \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Отсюда 1) если $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$, то $\hat{s}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$, 2) если $\aleph_0 \le \mathfrak{m} < \mathfrak{c}$, то $\hat{s}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{c} > \mathfrak{m}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скорняков Л. А.* Групповые унары // Вестн. МГУ. Математика и механика. 1977. № 5. С. 65–69.

2. *Бочкин А. М.* Унары с сепаративным моноидом эндоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 1983. № 5. С. 71–74.

Статья поступила 2 июня 2003 г., окончательный вариант — 30 апреля 2004 г.

Колмыков Владислав Алексеевич
Воронежский гос. университет, НИИ математики при ВГУ,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
kolmykov@vak.vsu.ru