Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 517.98

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЕРЦА С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Лю Ляньчжэ

Аннотация: Получена непрерывность в пространствах Харди некоторых полилинейных операторов, связанных с интегральными операторами, для случая экстремальных показателей. Такие операторы включают операторы Литтлвуда — Пэли и операторы Марцинкевича.

Ключевые слова: полилинейный оператор, оператор Литтлвуда — Пэли, класс BMO, интегральный оператор Марцинкевича, пространство Герца, пространство Харди типа Герца.

1. Введение

Пусть T — сингулярный интегральный оператор Кальдерона — Зигмунда. Классический результат Койфмана, Рохберга и Вейсса (см. [1]) утверждает, что коммутатор $[b,T] = T(bf) - bTf$ (где $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$) ограничен на $L^p(\mathbb{R}^n)$ для $1 < p < \infty$. В [2] получены свойства ограниченности для коммутаторов при экстремальных значениях p. В последнее время разрабатывалась теория пространств Герца и пространств Харди типа Герца как локальных версий пространств Лебега и Харди (см. [3–6]). Основная цель данной работы — установить свойства весовой поточечной непрерывности некоторых полилинейных операторов, связанных с интегральными операторами на пространствах Герца и пространствах Харди типа Герца. К таким операторам относятся операторы Литтлвуда — Пэли и Марцинкевича.

Вначале введем некоторые понятия (см. [3–8]). Всюду далее A_p означают веса Макенхаупта для $1 \le p < \infty$ (см. [7]), Q — куб в $\mathbb{R}^n$ с ребрами, параллельными осям. Для куба Q и локально интегрируемой функции f положим

$$f(Q) = \int_Q f(x)\,dx, \quad f_Q = |Q|^{-1}\int_Q f(x)\,dx, \quad f^{\#}(x) = \sup_{x\in Q}|Q|^{-1}\int_Q |f(y) - f_Q|\,dy.$$

Будем говорить, что f *принадлежит классу* $BMO(\mathbb{R}^n)$, если $f^{\#} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, и определим норму $\|f\|_{BMO} = \|f^{\#}\|_{L^\infty}$.

Для неотрицательных весовых функций w определим центральное весовое BMO-пространство $CMO(w)$ (см. [4]), составив его из всех таких функций $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, что

$$\|f\|_{CMO(w)} = \sup_{r>1} w(Q(0,r))^{-1}\int_Q |f(x) - f_Q|w(x)\,dx < \infty.$$

Supported by the NNSF (Grant 10271071).

Известно (см. [4, 7]), что

$$\|f\|_{CMO(w)} \approx \sup_{r>1} \inf_{c\in C} w(Q(0,r))^{-1} \int\limits_{Q} |f(x)-c| w(x)\,dx.$$

Пусть $S(\mathbb{R}^n)$ — класс Шварца и $S'(\mathbb{R}^n)$ — пространство медленно растущих распределений, состоящее из всех непрерывных линейных функционалов на $S(\mathbb{R}^n)$ (см. [8, с. 262]). Для $k \in \mathbb{Z}$ положим $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 2^k\}$ и $C_k = B_k \setminus B_{k-1}$. Обозначим через χ_k характеристическую функцию множества C_k, через $\tilde{\chi}_k$ — характеристическую функцию множества C_k при $k \ge 1$ и через $\tilde{\chi}_0$ — характеристическую функцию множества B_0.

Определение 1 (см. [4–6]). Пусть $1 < p < \infty$ и w_1, w_2 — две неотрицательные весовые функции на $\mathbb{R}^n$.

(1) Однородное весовое пространство Герца определяется как

$$\dot{K}_p(w_1, w_2; \mathbb{R}^n) = \big\{f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}_p(w_1,w_2)} < \infty\big\},$$

где

$$\|f\|_{\dot{K}_p(w_1,w_2)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [w_1(B_k)]^{1-1/p} \|f\chi_k\|_{L^p(w_2)}.$$

(2) Неоднородное весовое пространство Герца определяется как

$$K_p(w_1, w_2; \mathbb{R}^n) = \big\{f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_p(w_1,w_2)} < \infty\big\},$$

где

$$\|f\|_{K_p} = \sum_{k=0}^{\infty} [w_1(B_k)]^{(1-1/p)} \|f\tilde{\chi}_k\|_{L^p(w_2)}.$$

(3) Однородное весовое пространство Харди типа Герца определяется как

$$H\dot{K}_p(w_1, w_2; \mathbb{R}^n) = \{f \in S'(\mathbb{R}^n) : G(f) \in \dot{K}_p(w_1, w_2; \mathbb{R}^n)\},$$

где $\|f\|_{H\dot{K}_p(w_1,w_2)} = \|G(f)\|_{\dot{K}_p(w_1,w_2)}$.

(4) Неоднородное весовое пространство Харди типа Герца определяется как

$$HK_p(w_1, w_2; \mathbb{R}^n) = \{f \in S'(\mathbb{R}^n) : G(f) \in K_p(w_1, w_2; \mathbb{R}^n)\},$$

где $\|f\|_{HK_p(w_1,w_2)} = \|G(f)\|_{K_p(w_1,w_2)}$. Здесь (см. [6])

$$G(f)(x) = \sup_{\Phi\in K_m} \Phi(f)(x),$$

$$\Phi(f)(x) = \sup_{|x-y|\le t} |(f * \Phi_t)(y)|,$$

$$K_m = \{\Phi \in S(\mathbb{R}^n) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, |\alpha|\le m} (1+|x|)^{m+n} |D^\alpha \Phi(x)| \le 1\}.$$

Пространства Харди типа Герца имеют атомическую декомпозиционную характеризацию.

Определение 2. Пусть $1 < p < \infty$ и $w_1, w_2 \in A_1$. Функцию $a(x)$ на $\mathbb{R}^n$ называют *центральным* $(n(1-1/p), p; w_1, w_2)$*-атомом* (или *центральным* $(n(1-1/p), p; w_1, w_2)$*-атомом ограниченного типа*), если

1) $\operatorname{supp} a \subset B(0,r)$ для некоторого $r > 0$ (или для некоторого $r \ge 1$);
2) $\|a\|_{L^p(w_2)} \le [w_1(B(0,r))]^{1/p-1}$,
3) $\int a(x)\,dx = 0$.

Лемма 1 [4,6]. *Пусть* $w_1, w_2 \in A_1$ *и* $1 < p < \infty$. *Распределение медленного роста* f *принадлежит* $H\dot{K}_p(w_1, w_2; \mathbb{R}^n)$ (*или* $HK_p(w_1, w_2; \mathbb{R}^n)$) *тогда и только тогда, когда существуют центральные* $(n(1-1/p), p; w_1, w_2)$*-атомы* (*или центральные* $(n(1-1/p), p; w_1, w_2)$*-атомы ограниченного типа*) a_j *с носителями в* $B_j = B(0, 2^j)$ *и константы* λ_j, $\sum\limits_j |\lambda_j| < \infty$, *такие, что* $f = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j a_j$ (*или* $f = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j$) *в смысле* $S'(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\|f\|_{H\dot{K}_p(w_1,w_2)} \text{ (или } \|f\|_{HK_p(w_1,w_2)}) \approx \sum_j |\lambda_j|.$$

Определение 3. Пусть $1 < p < \infty$ и w — неотрицательная весовая функция на $\mathbb{R}^n$. Символом $B_p(w)$ будем обозначать пространство таких функций f на $\mathbb{R}^n$, для которых

$$\|f\|_{B_p(w)} = \sup_{r>1} [w(Q(0,r))]^{-1/p} \|f\chi_{Q(0,r)}\|_{L^p(w)} < \infty.$$

2. Формулировки теорем

Пусть m — натуральное число и A — функция, имеющая производные до порядка m, принадлежащие $BMO(\mathbb{R}^n)$. Обозначим

$$R_{m+1}(A; x, y) = A(x) - \sum_{|\alpha| \le m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha A(y)(x-y)^\alpha$$

и

$$Q_{m+1}(A; x, y) = R_m(A; x, y) - \sum_{|\alpha| = m} D^\alpha A(x)(x-y)^\alpha.$$

Обозначим $\Gamma(x) = \{(y,t) \in R_+^{n+1} : |x-y| < t\}$; характеристическую функцию $\Gamma(x)$ обозначим через $\chi_{\Gamma(x)}$.

Определение 4. Пусть $\varepsilon > 0$ и ψ — фиксированная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) $|\psi(x)| \le C(1+|x|)^{-(n+1)}$,

(2) $|\psi(x+y) - \psi(x)| \le C|y|^\varepsilon (1+|x|)^{-(n+1+\varepsilon)}$ когда $2|y| < |x|$.

Полилинейный оператор Литтлвуда — Пэли определяется как

$$g_S^A(f)(x) = \left[\iint\limits_{\Gamma(x)} |F_t^A(f)(x,y)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right]^{1/2},$$

где

$$F_t^A(f)(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m+1}(A; x, z)}{|x-z|^m} f(z) \psi_t(y-z)\, dz$$

и $\psi_t(x) = t^{-n}\psi(x/t)$ для $t > 0$. Заметим, что $F_t(f) = f * \psi_t$. Определим также оператор

$$g_S(f)(x) = \left(\iint\limits_{\Gamma(x)} |F_t(f)(y)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right)^{1/2},$$

являющийся оператором Литтлвуда — Пэли (см. [9]).

Пусть H — гильбертово пространство,

$$H = \left\{ h : \|h\| = \left(\iint\limits_{R_+^{n+1}} |h(t)|^2 \, dydt/t^{n+1} \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Тогда $F_t^A(f)(x,y)$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ может рассматриваться как отображение из $(0,+\infty)$ в H и очевидно, что

$$g_S^A(f)(x) = \left\| \chi_{\Gamma(x)} F_t^A(f)(x,y) \right\|, \quad g_S(f)(x) = \|\chi_{\Gamma(x)} F_t(f)(y)\|.$$

Рассмотрим также отображение g_S^A, определяемое равенством

$$\tilde{g}_S^A(f)(x) = \left[\iint\limits_{\Gamma(x)} \left| \widetilde{F}_t^A(f)(x,y) \right|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}} \right]^{1/2},$$

где

$$\widetilde{F}_t^A(f)(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{Q_{m+1}(A;x,z)}{|x-z|^m} \psi_t(y-z) f(z) dz.$$

Определение 5. Пусть S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, $0 < \gamma \le 1$ и Ω — однородная нулевой степени функция на $\mathbb{R}^n$ такая, что

$$\int\limits_{S^{n-1}} \Omega(x') \, d\sigma(x') = 0.$$

Допустим, что $\Omega \in \mathrm{Lip}_\gamma(S^{n-1})$, т. е. существует константа $M > 0$ такая, что $|\Omega(x) - \Omega(y)| \le M|x-y|^\gamma$ для любых $x, y \in S^{n-1}$. Полилинейный оператор Марцинкевича и его аналог определяются так:

$$\mu_S^A(f)(x) = \left[\iint\limits_{\Gamma(x)} \left| F_t^A(f)(x,y) \right|^2 \frac{dydt}{t^{n+3}} \right]^{1/2},$$

$$\tilde{\mu}_S^A(f)(x) = \left(\iint\limits_{\Gamma(x)} \left| \widetilde{F}_t^A(f)(x,y) \right|^2 \frac{dydt}{t^{n+3}} \right)^{1/2},$$

где

$$F_t^A(f)(x,y) = \int\limits_{|y-z| \le t} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} \frac{R_{m+1}(A;x,z)}{|x-z|^m} f(z) \, dz,$$

$$\widetilde{F}_t^A(f)(x,y) = \int\limits_{|y-z| \le t} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} \frac{Q_{m+1}(A;x,z)}{|x-z|^m} f(z) \, dz.$$

Положим также

$$F_t(f)(y) = \int\limits_{|y-z| \le t} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f(z) \, dz,$$

$$\mu_S(f)(x) = \left(\iint\limits_{\Gamma(x)} |F_t(f)(y)|^2 \frac{dydt}{t^{n+3}} \right)^{1/2};$$

это интегральный оператор Марцинкевича (см. [10]).

Пусть H — гильбертово пространство

$$H = \left\{ h : \|h\| = \left(\iint\limits_{R_+^{n+1}} |h(t)|^2 \, dydt/t^{n+3} \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

тогда $F_t^A(f)(x,y)$ для каждого фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ может быть рассмотрено как отображение из $(0,+\infty)$ в H, и очевидно, что

$$\mu_S^A(f)(x) = \left\| \chi_{\Gamma(x)} F_t^A(f)(x,y) \right\|, \quad \mu_S(f)(x) = \|\chi_{\Gamma(x)} F_t(f)(y)\|.$$

Мы рассмотрим также следующие полилинейные операторы, связанные с некоторыми операторами свертки.

Определение 6. Для заданной на $\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$ функции $F(x,t)$ определим

$$F_t(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(x-y,t) f(y) \, dy$$

и

$$F_t^A(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m+1}(A;x,y)}{|x-y|^m} F(x-y,t) f(y) \, dy.$$

Для каждого фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ отображения $F_t(f)(x)$ и $F_t^A(f)(x)$ могут рассматриваться как отображения из $[0,+\infty)$ в H. Определим связанный с F_t полилинейный оператор

$$T^A(f)(x) = \left\| F_t^A(f)(x) \right\|;$$

Положим также $T(f)(x) = \|F_t(f)(x)\|$.

Ясно, что определения 4 и 5 являются частными случаями определения 6. Заметим, что если $m = 0$, то T^A является коммутатором T и A (см. [10, 11]). Известно, что полилинейный оператор как нетривиальное распространение коммутатора представляет большой интерес в гармоническом анализе и подробно изучался многими авторами (см. [12–14]). В [15] установлена весовая L^p-ограниченность ($p > 1$) полилинейного оператора, связанного с некоторым сингулярным оператором. В [16] получена слабая (H^1, L^1)-ограниченность полилинейного оператора, связанного с некоторым сингулярным интегральным оператором. В данной статье мы установим весовую поточечную непрерывность полилинейных операторов g_S^A и $\tilde{g}_S^A$, μ_S^A и $\tilde{\mu}_S^A$ на пространствах Герца и пространствах Харди типа Герца.

В разд. 3 будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_1$ и $D^\alpha A \in BMO(\mathbb{R}^n)$ для любого α с $|\alpha| = m$. Тогда g_S^A и μ_S^A отображают $B_p(w)$ непрерывно на $CMO(w)$.*

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$, $w_1, w_2 \in A_1$ и $D^\alpha A \in BMO(\mathbb{R}^n)$ для любого α с $|\alpha| = m$. Тогда $\tilde{g}_S^A$ и $\tilde{\mu}_S^A$ отображает $\dot{H}K_p(w_1,w_2;\mathbb{R}^n)$ (или $HK_p(w_1,w_2;\mathbb{R}^n)$) непрерывно в $\dot{K}_p(w_1,w_2;\mathbb{R}^n)$ (или $K_p(w_1,w_2;\mathbb{R}^n)$).*

Теорема 3. *Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_1$ и $D^\alpha A \in BMO(\mathbb{R}^n)$ для любого α с $|\alpha| = m$.*

(i) *Если для любых куба Q и точки $u \in 3Q \setminus 2Q$ имеет место неравенство*

$$\frac{1}{w(Q)} \int\limits_{Q} \bigg\| \chi_{\Gamma(x)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha A(x) - (D^\alpha A)_Q) \\ \times \int\limits_{(4Q)^c} \frac{(u-z)^\alpha}{|u-z|^m} \psi_t(y-z) f(z)\, dz \bigg\| w(x)\, dx \le C \|f\|_{B_p(w)},$$

то $\tilde{g}_S^A$ *отображает* $B_p(w)$ *непрерывно в* $CMO(w)$.

(ii) *Если для любых куба Q и точки $u \in 3Q \setminus 2Q$ выполнено неравенство*

$$\frac{1}{w(Q)} \int\limits_{Q} \bigg\| \chi_{\Gamma(x)} \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha A(x) - (D^\alpha A)_Q) \\ \times \int\limits_{(4Q)^c} \frac{(u-z)^\alpha}{|u-z|^m} \frac{\Omega(y-z)\chi_{\Gamma(z)}(y,t)}{|y-z|^{n-1}} f(z)\, dz \bigg\| w(x)\, dx \le C \|f\|_{B_p(w)},$$

то $\tilde{\mu}_S^A$ *отображает* $B_p(w)$ *непрерывно в* $CMO(w)$.

3. Доказательства теорем

Основная теорема. *Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_1$ и $D^\alpha A \in BMO(\mathbb{R}^n)$ для любого α с $|\alpha| = m$. Предположим, что T^A — оператор из определения 6 такой, что T ограничен на $L^p(w)$ для любых $1 < p < \infty$ и $w \in A_1$. Если T удовлетворяет условию отклонения*

$$\big\| F_t^A(f)(x) - F_t^A(f)(0) \big\| \le C \|f\|_{B_p(w)}$$

для любого куба $Q = Q(0,d)$ с $d > 1$, $\operatorname{supp} f \subset (2Q)^c$ и $x \in Q$, то T^A отображает $B_p(w)$ непрерывно в $CMO(w)$.

Лемма 2 (см. [14]). *Пусть A — функция на $\mathbb{R}^n$ и $D^\alpha A \in L^q(\mathbb{R}^n)$ для $|\alpha| = m$ и некоторого $q > n$. Тогда*

$$|R_m(A; x, y)| \le C|x-y|^m \sum_{|\alpha|=m} \Bigg(\frac{1}{|\widetilde{Q}(x,y)|} \int\limits_{\widetilde{Q}(x,y)} |D^\alpha A(z)|^q\, dz \Bigg)^{1/q},$$

где $\widetilde{Q}(x,y)$ — куб с центром в x, имеющий длину ребра $5\sqrt{n}|x-y|$.

Доказательство основной теоремы. Надо доказать лишь существование константы C_Q такой, что

$$\frac{1}{w(Q)} \int\limits_{Q} |T^A(f)(x) - C_Q| w(x)\, dx \le C \|f\|_{B_p(w)}$$

для любого куба $Q = Q(0,d)$ с $d > 1$. Фиксируем куб $Q = Q(0,d)$ с $d > 1$. Пусть $\widetilde{Q} = 5\sqrt{n}Q$ и

$$\widetilde{A}(x) = A(x) - \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha A)_{\widetilde{Q}} x^\alpha.$$

Тогда $R_m(A;x,y) = R_m(\widetilde{A};x,y)$ и $D^\alpha \widetilde{A} = D^\alpha A - (D^\alpha A)_{\widetilde{Q}}$ для всех α с $|\alpha| = m$. Для $f_1 = f\chi_{\widetilde{Q}}$ и $f_2 = f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \widetilde{Q}}$ запишем

$$F_t^A(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{R_{m+1}(\widetilde{A};x,y)}{|x-y|^m} F(x-y,t) f_2(y)\,dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{R_m(\widetilde{A};x,y)}{|x-y|^m} F(x-y,t) f_1(y)\,dy - \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{F(x-y,t)(x-y)^\alpha}{|x-y|^m} D^\alpha \widetilde{A}(y) f_1(y)\,dy.$$

Тогда

$$|T^A(f)(x) - T^{\widetilde{A}}(f_2)(0)| = \big|\|F_t^A(f)(x)\| - \|F_t^{\widetilde{A}}(f)(0)\|\big| \le \|F_t^A(f)(x) - F_t^{\widetilde{A}}(f)(0)\|$$
$$\le \left\| F_t\left(\frac{R_m(\widetilde{A};x,\cdot)}{|x-\cdot|^m} f_1\right)(x) \right\| + \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \left\| F_t\left(\frac{(x-\cdot)^\alpha}{|x-\cdot|^m} D^\alpha \widetilde{A} f_1\right)(x) \right\| + \|F_t^{\widetilde{A}}(f_2)(x) - F_t^{\widetilde{A}}(f_2)(0)\| = I(x) + II(x) + III(x),$$

так что

$$\frac{1}{w(Q)} \int\limits_Q |T^A(f)(x) - T^{\widetilde{A}}(f_2)(0)| w(x)\,dx \le \frac{1}{w(Q)} \int\limits_Q I(x) w(x)\,dx + \frac{1}{w(Q)} \int\limits_Q II(x) w(x)\,dx + \frac{1}{w(Q)} \int\limits_Q III(x) w(x)\,dx := I + II + III.$$

Оценим I, II и III. Во-первых, для $x \in Q$ и $y \in \widetilde{Q}$, используя лемму 2, имеем

$$R_m(\widetilde{A};x,y) \le C|x-y|^m \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO},$$

тем самым ввиду $L^p(w)$-ограниченности T для $1 < p < \infty$ и $w \in A_1$ получим

$$I \le \frac{C}{w(Q)} \int\limits_Q \left| T\Big(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} f_1\Big)(x) \right| w(x)\,dx$$
$$\le C\left(\frac{1}{w(Q)} \int\limits_Q |T(f_1)(x)|^p w(x)\,dx\right)^{1/p} \le Cw(\widetilde{Q})^{-1/p} \|f\chi_{\widetilde{Q}}\|_{L^p(w)} \le C\|f\|_{B_p(w)}.$$

Во-вторых, поскольку $w \in A_1$, то w удовлетворяет обратному неравенству Гёльдера:

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w(x)^r\,dx\right)^{1/r} \le \frac{C}{|Q|} \int\limits_Q w(x)\,dx$$

для любого куба Q и некоторого $1 < r < \infty$ (см. [7]). Взяв $q, s > 1$ так, что $qs < p$ и $r = (ps - qs)/(p - qs)$, ввиду $L^q(w)$-ограниченности T и неравенства Гёльдера, заметив, что $1/s + 1/s' = 1$, имеем

$$II \le \frac{C}{w(Q)} \int\limits_Q \left| T\Big(\sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha A - (D^\alpha A)_{\widetilde{Q}}\Big) f_1)(x) \right| w(x)\,dx$$

$$\leq C \sum_{|\alpha|=m} \left(\frac{1}{w(Q)} \int\limits_{Q} |T((D^\alpha A - (D^\alpha A)_{\widetilde{Q}}) f_1)(x)|^q w(x)\, dx \right)^{1/q}$$

$$\leq C \sum_{|\alpha|=m} \left(\frac{1}{w(Q)} \int |(D^\alpha A(x) - (D^\alpha A)_{\widetilde{Q}}) f_1(x)|^q w(x)\, dx \right)^{1/q}$$

$$\leq C \sum_{|\alpha|=m} w(Q)^{-1/q} \left(\int\limits_{\widetilde{Q}} |D^\alpha A(x) - (D^\alpha A)_{\widetilde{Q}}|^{qs'}\, dx \right)^{1/(qs')}$$

$$\times \left(\int\limits_{\widetilde{Q}} |f_1(x)|^{qs} w(x)^s\, dx \right)^{1/(qs)} \leq C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} |Q|^{1/(qs')} w(Q)^{-1/q}$$

$$\times \left(\int\limits_{\widetilde{Q}} |f_1(x)|^p w(x)\, dx \right)^{1/p} \left(\int\limits_{\widetilde{Q}} w(x)^r\, dx \right)^{(p-q)/(rpq)}$$

$$\leq C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} |Q|^{1/(qs')} w(Q)^{-1/q} \|f \chi_{\widetilde{Q}}\|_{L^p(w)}$$

$$\times \left(\frac{w(Q)}{|Q|} \right)^{(p-q)/(pq)} |Q|^{(p-q)/(pqr)}$$

$$\leq C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} w(\widetilde{Q})^{-1/p} \|f \chi_{\widetilde{Q}}\|_{L^p(w)} \leq C \|f\|_{B_p(w)}.$$

Для слагаемого III, используя условие отклонения на T, имеем $III \leq C\|f\|_{B_p(w)}$. Это завершает доказательство основной теоремы.

Для доказательства теорем 1–3 нам понадобится следующая

Лемма 3. *Пусть $w \in A_1$, $1 < p < \infty$ и $D^\alpha A \in BMO(\mathbb{R}^n)$ для каждого α с $|\alpha| = m$. Тогда g_S^A и μ_S^A ограничены в $L^p(w)$.*

Доказательство. Для g_S^A из неравенства Минковского (см. [17, с. 271]) и условия на ψ вытекает, что

$$g_S^A(f)(x) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(z)|\, |R_{m+1}(A; x, z)|}{|x - z|^m} \left(\int\limits_{\Gamma(x)} |\psi_t(y - z)|^2 \frac{dydt}{t^{1+n}} \right)^{1/2} dz$$

$$\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(z)|\, |R_{m+1}(A; x, z)|}{|x - z|^m} \left(\int\limits_0^\infty \int\limits_{|x-y| \leq t} \frac{t^{-2n}}{(1 + |y - z|/t)^{2n+2}} \frac{dydt}{t^{1+n}} \right)^{1/2} dz$$

$$\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(z)|\, |R_{m+1}(A; x, z)|}{|x - z|^m} \left(\int\limits_0^\infty \int\limits_{|x-y| \leq t} \frac{2^{2n+2} t^{1-n}}{(2t + |y - z|)^{2n+2}}\, dydt \right)^{1/2} dz.$$

Учитывая, что $2t + |y - z| \geq 2t + |x - z| - |x - y| \geq t + |x - z|$, когда $|x - y| \leq t$, и

$$\int\limits_0^\infty \frac{t\, dt}{(t + |x - z|)^{2n+2}} = C|x - z|^{-2n},$$

получим

$$g_S^A(f)(x) \le C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(z)|\,|R_{m+1}(A;x,z)|}{|x-z|^m} \left(\int\limits_0^\infty \frac{t\,dt}{(t+|x-z|)^{2n+2}} \right)^{1/2} dz$$
$$= C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(z)|\,|R_{m+1}(A;x,z)|}{|x-z|^{m+n}}\, dz.$$

Для μ_S^A, заметив, что $|x-z| \le 2t$, $|y-z| \ge |x-z|-t \ge |x-z|-3t$ при $|x-y| \le t$, $|y-z| \le t$, имеем

$$\mu_S^A(f)(x)$$
$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\iint\limits_{|x-y|\le t} \left(\frac{|\Omega(y-z)|\,|R_{m+1}(A;x,z)|\,|f(z)|}{|y-z|^{n-1}|x-z|^m} \right)^2 \chi_{\Gamma(z)}(y,t) \frac{dydt}{t^{n+3}} \right]^{1/2} dz$$
$$\le C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|R_{m+1}(A;x,z)|\,|f(z)|}{|x-z|^m} \left[\iint\limits_{|x-y|\le t} \frac{\chi_{\Gamma(z)}(y,t)t^{-n-3}}{(|x-z|-3t)^{2n-2}}\, dydt \right]^{1/2} dz$$
$$\le C \int\limits_{R_n} \frac{|R_{m+1}(A;x,z)|\, f(z)|}{|x-z|^{m+3/2}} \left[\int\limits_{|x-z|/2}^\infty \frac{dt}{(|x-z|-3t)^{2n-2}} \right]^{1/2} dz$$
$$\le C \int\limits_{R_n} \frac{|R_{m+1}(A;x,z)|}{|x-z|^{m+n}} |f(z)|\, dz.$$

Теперь результат леммы вытекает из [15].

Доказательство теоремы 1. Из доказательства леммы 3 мы знаем, что g_S и μ_S $L^p(w)$-ограничены для $p>1$. Тем самым достаточно проверить, что g_S^A и μ_S^A удовлетворяют условию отклонения из основной теоремы, т. е.

$$\left\| \chi_{\Gamma(x)} F_t^A(f)(x,y) - \chi_{\Gamma(0)} F_t^A(f)(0,y) \right\| \le C\|f\|_{B_p(w)}.$$

Пусть $\operatorname{supp} f \subset (2Q(0,d))^c$ и

$$\widetilde{A}(x) = A(x) - \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha A)_Q x^\alpha.$$

Для g_S^A и $x \in Q$ запишем

$$\chi_{\Gamma(x)}(y,t) F_t^{\widetilde{A}}(f)(x,y) - \chi_{\Gamma(0)}(y,t) F_t^{\widetilde{A}}(f)(0,y)$$
$$= \int \left[\frac{1}{|x-z|^m} - \frac{1}{|z|^m} \right] \chi_{\Gamma(x)}(y,t)\psi_t(y-z) R_m(\widetilde{A};x,z) f(z)\, dz$$
$$+ \int \frac{\chi_{\Gamma(x)}(y,t)\psi_t(y-z)f(z)}{|z|^m} [R_m(\widetilde{A};x,z) - R_m(\widetilde{A};0,z)]\, dz$$
$$+ \int (\chi_{\Gamma(x)}(y,t) - \chi_{\Gamma(0)}(y,t)) \frac{\psi_t(y-z) R_m(\widetilde{A};0,z) f(z)}{|z|^m}\, dz$$
$$- \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \int \left[\frac{\chi_{\Gamma(x)}(y,t)(x-z)^\alpha}{|x-z|^m} - \frac{\chi_{\Gamma(0)}(y,t)(-z)^\alpha}{|z|^m} \right] \psi_t(y-z) D^\alpha \widetilde{A}(z) f(z)\, dz$$

$$:= I_1^t(x) + I_2^t(x) + I_3^t(x) + I_4^t(x).$$

Отметим, что $|x - z| \sim |z|$ при $x \in Q$ и $z \in \mathbb{R}^n \setminus 2Q$. Учитывая лемму 2 и следующее неравенство (см. [8, с. 141]):

$$|b_{Q_1} - b_{Q_2}| \le C \log(|Q_2|/|Q_1|)\|b\|_{BMO} \quad \text{для} \quad Q_1 \subset Q_2,$$

заключаем, что

$$|R_m(\widetilde{A}; x, y)| \le C|x - y|^m \sum_{|\alpha|=m} (\|D^\alpha A\|_{BMO} + |(D^\alpha A)_{Q(x,y)} - (D^\alpha A)_Q|)$$
$$\le Ck|x - y|^m \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO}$$

для $x \in Q$ и $y \in 2^{k+1}Q \setminus 2^k Q$. Тем самым, как и в доказательстве леммы 3, приходим к оценкам

$$\|I_1^t(x)\| \le C \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \frac{|x|\,|f(z)|}{|z|^{n+m+1}} |R_m(\widetilde{A}; x, z)|\, dz$$
$$= C \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{2^{k+1}Q \setminus 2^k Q} \frac{|x|\,|f(z)|}{|z|^{n+m+1}} |R_m(\widetilde{A}; x, z)|\, dz$$
$$\le C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{2^{k+1}Q \setminus 2^k Q} k \frac{|x|}{|z|^{n+1}} |f(z)|\, dz$$
$$\le C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-k} w(2^{k+1}Q)^{-1/p} \Bigg(\int\limits_{2^{k+1}Q} |f(z)|^p w(z)\, dz \Bigg)^{1/p}$$
$$\times \Bigg(\frac{1}{|2^{k+1}Q|} \int\limits_{2^{k+1}Q} w(z)\, dz \Bigg)^{1/p} \Bigg(\frac{1}{|2^{k+1}Q|} \int\limits_{2^{k+1}Q} w(z)^{-1/(p-1)}\, dz \Bigg)^{(p-1)/p}$$
$$\le C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-k} w(2^{k+1}Q)^{-1/p} \|f \chi_{2^{k+1}Q}\|_{L^p(w)}$$
$$\le C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-k} \|f\|_{B_p(w)} \le C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \|f\|_{B_p(w)}.$$

Для $I_2^t(x)$, используя равенство (см. [14])

$$R_m(\widetilde{A}; x, y) - R_m(\widetilde{A}; 0, y) = \sum_{|\beta|<m} \frac{1}{\beta!} R_{m-|\beta|}(D^\beta \widetilde{A}; x, 0)(x - y)^\beta$$

и лемму 2, получим

$$|R_m(\widetilde{A}; x, z) - R_m(\widetilde{A}; x_0, z)|$$
$$\le C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \Big(|x - x_0|^m + \sum_{0<|\beta|<m} |x_0 - z|^{m-|\beta|} |x - x_0|^{|\beta|} \Big).$$

Отсюда аналогично оценкам $I_1^t(x)$ и лемме 3 для $x \in Q$ выводим, что

$$\|I_2^t(x)\| \le C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{2^{k+1}Q \setminus 2^k Q} \frac{|x|}{|z|^{n+1}} |f(z)|\, dz$$

$$\leq C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \|f\|_{B_p(w)}.$$

Для $I_3^t(x)$ заметим, что $|x-z| \sim |z|$ для $x \in Q$ и $z \in \mathbb{R}^n \setminus 2Q$, так что $|x+y-z| \sim |y-z|$ при $|y| \leq t$, $x \in Q$ и $z \in \mathbb{R}^n \setminus 2Q$. Аналогично доказательству леммы 3 и оценкам $I_1^t(x)$ имеем

$$\begin{aligned}
\left\|I_3^t(x)\right\| \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \Bigg(\iint\limits_{R_+^{n+1}} \Bigg[\frac{|\psi_t(y-z)|\,|f(z)|\,|R_m(\widetilde{A};0,z)|}{|z|^m} \\
\times |\chi_{\Gamma(x)}(y,t) - \chi_{\Gamma(0)}(y,t)|\Bigg]^2 \frac{dydt}{t^{n+1}}\Bigg)^{1/2} dz \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \frac{|f(z)|\,|R_m(\widetilde{A};0,z)|}{|z|^m} \\
\times \left|\iint\limits_{\Gamma(x)} \frac{t^{1-n}\,dydt}{(t+|y-z|)^{2n+2}} - \iint\limits_{\Gamma(0)} \frac{t^{1-n}\,dydt}{(t+|y-z|)^{2n+2}}\right|^{1/2} dz \\
\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \frac{|f(z)|\,|R_m(\widetilde{A};0,z)|}{|z|^m} \\
\times \Bigg(\iint\limits_{|y|\leq t} \left|\frac{1}{(t+|x+y-z|)^{2n+2}} - \frac{1}{(t+|y-z|)^{2n+2}}\right| \frac{dydt}{t^{n-1}}\Bigg)^{1/2} dz \\
\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \frac{|f(z)|\,|R_m(\widetilde{A};0,z)|}{|z|^m} \Bigg(\iint\limits_{|y|\leq t} \frac{|x| t^{1-n}\,dydt}{(t+|x+y-z|)^{2n+3}}\Bigg)^{1/2} dz \\
\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \frac{|f(z)|\,|x|^{1/2} |R_m(\widetilde{A};0,z)|}{|z|^{m+n+1/2}}\, dz \\
\leq C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-k/2} w(2^{k+1}Q)^{-1/p} \Bigg(\int\limits_{2^{k+1}Q} |f(z)|^p w(z)\,dz\Bigg)^{1/p} \\
\leq C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \|f\|_{B_p(w)}.
\end{aligned}$$

Для $I_4^t(x)$, беря $1 < s < p$ и $r > 1$ такими, что $1/r + 1/s = 1$, используя неравенство Гёльдера и замечая, что $w \in A_1 \subset A_{p/s}$, аналогично оценкам $I_1^t(x)$ и $I_3^t(x)$ получаем

$$\begin{aligned}
\left\|I_4^t(x)\right\| \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \left(\frac{|x|}{|z|^{n+1}} + \frac{|x|^{1/2}}{|z|^{n+1/2}}\right) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \widetilde{A}(z)|\,|f(z)|\,dz \\
\leq C \sum_{|\alpha|=m} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d}{(2^k d)^{n+1}} + \frac{d^{1/2}}{(2^k d)^{n+1/2}}\right) \Bigg(\int\limits_{2^{k+1}Q} |f(y)|^s\,dy\Bigg)^{1/s} \\
\times (2^k d)^{n/r} \Bigg(|2^{k+1}Q|^{-1} \int\limits_{2^{k+1}Q} |D^\alpha A(y) - (D^\alpha A)_Q|^r\,dy\Bigg)^{1/r} \\
\leq C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{d}{(2^k d)^{n+1}} + \frac{d^{1/2}}{(2^k d)^{n+1/2}}\right) (2^k d)^{n(1-1/s)}
\end{aligned}$$

$$\times \left(\int\limits_{2^{k+1}Q} |f(y)|^p w(y)\,dy \right)^{1/p} \left(\int\limits_{2^{k+1}Q} w(y)^{-s/(p-s)}\,dy \right)^{(p-s)/ps}$$

$$\le C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \sum_{k=1}^{\infty} k(2^{-k} + 2^{-k/2}) w(2^{k+1}Q)^{-1/p} \|f\chi_{2^{k+1}Q}\|_{L^p(w)}$$

$$\times \left(\frac{1}{|2^{k+1}Q|} \int\limits_{2^{k+1}Q} w(y)\,dy \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|2^{k+1}Q|} \int\limits_{2^{k+1}Q} w(y)^{-s/(p-s)}\,dy \right)^{(p-s)/ps}$$

$$\le C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \|f\|_{B_p(w)}.$$

Соединяя эти оценки, получаем

$$\left\| \chi_{\Gamma(x)} F_t^{\widetilde{A}}(f)(x) - \chi_{\Gamma(0)} F_t^{\widetilde{A}}(f)(0) \right\| \le C\|f\|_{B_p(w)}.$$

Для μ_S^A при $x \in Q$ запишем

$$\chi_{\Gamma(x)}(y,t) F_t^{\widetilde{A}}(f)(x,y) - \chi_{\Gamma(x)}(y,t) F_t^{\widetilde{A}}(f)(0,y)$$

$$= \int\limits_{|y-z|\le t} \left[\frac{1}{|x-z|^m} - \frac{1}{|z|^m} \right] \frac{\chi_{\Gamma(x)}(y,t)\Omega(y-z) R_m(\widetilde{A};x,z) f(z)}{|y-z|^{n-1}}\,dz$$

$$+ \int\limits_{|y-z|\le t} \frac{\chi_{\Gamma(x)}(y,t)\Omega(y-z) f(z)}{|y-z|^{n-1}|z|^m} [R_m(\widetilde{A};x,z) - R_m(\widetilde{A};0,z)]\,dz$$

$$+ \int\limits_{|y-z|\le t} (\chi_{\Gamma(x)}(y,t) - \chi_{\Gamma(0)}(y,t)) \frac{\Omega(y-z) R_m(\widetilde{A};0,z) f(z)}{|y-z|^{n-1}|z|^m}\,dz$$

$$- \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \int\limits_{|y-z|\le t} \left[\frac{\chi_{\Gamma(x)}(y,t)(x-z)^\alpha}{|x-z|^m} - \frac{\chi_{\Gamma(0)}(y,t)(-z)^\alpha}{|z|^m} \right] \frac{\Omega(y-z) D^\alpha \widetilde{A}(z) f(z)}{|y-z|^{n-1}}\,dz$$

$$:= J_1^t(x) + J_2^t(x) + J_3^t(x) + J_4^t(x).$$

Аналогично оценкам g_S^A из доказательства леммы 3 имеем

$$\left\| J_1^t(x) \right\| \le C \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \frac{|x|\,|f(z)|}{|z|^{n+m+1}} |R_m(\widetilde{A};x,z)|\,dz \le C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \|f\|_{B_p(w)}$$

и

$$\|J_2^t(x)\| \le C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{2^{k+1}Q\setminus 2^kQ} \frac{|x|}{|z|^{n+1}} |f(z)|\,dz$$

$$\le C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha A\|_{BMO} \|f\|_{B_p(w)}.$$

Для $J_3^t(x)$ аналогично оценкам $I_3^t(x)$ и оценкам из доказательства леммы 3 получим

$$\left\| J_3^t(x) \right\| \le C \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} \left(\int\limits_{R_+^{n+1}} \left[\frac{|f(z)|\,|\Omega(y-z)| \chi_{\Gamma(z)}(y,t) |R_m(\widetilde{A};0,z)|}{|y-z|^{n-1}|z|^m} \right.\right.$$

$$\times \left(\chi_{\Gamma(x)}(y,t)-\chi_{\Gamma(0)}(y,t)\right)\Big]^2\frac{dydt}{t^{n+3}}\bigg)^{1/2}dz \le C\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus 2Q}\frac{|f(z)|\,|R_m(\widetilde{A};0,z)|}{|z|^m}$$

$$\times\left|\iint\limits_{|x-y|\le t}\frac{t^{-n-3}\chi_{\Gamma(z)}(y,t)}{|y-z|^{2n-2}}\,dydt-\iint\limits_{|y|\le t}\frac{t^{-n-3}\chi_{\Gamma(z)}(y,t)}{|y-z|^{2n-2}}\,dydt\right|^{1/2}dz$$

$$\le C\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus 2Q}\frac{|f(z)|\,|R_m(\widetilde{A};0,z)|}{|z|^m}$$

$$\times\left(\iint\limits_{|y|\le t,|x+y-z|\le t}\left|\frac{1}{|x+y-z|^{2n-2}}-\frac{1}{|y-z|^{2n-2}}\right|\frac{dydt}{t^{n+3}}\right)^{1/2}dz$$

$$\le C\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus 2Q}\frac{|f(z)|\,|R_m(\widetilde{A};0,z)|}{|z|^m}\left(\iint\limits_{|y|\le t,|x+y-z|\le t}\frac{|x|}{|x+y-z|^{2n+2}}t^{-n}\,dydt\right)^{1/2}dz$$

$$\le C\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus 2Q}\frac{|f(z)|\,|x|^{1/2}|R_m(\widetilde{A};0,z)|}{|z|^{m+n+1/2}}\,dz$$

$$\le C\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha A\|_{BMO}\sum_{k=1}^{\infty}k2^{-k/2}w(2^{k+1}Q)^{-1/p}\|f\chi_{2^{k+1}Q}\|_{L^p(w)}$$

$$\le C\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha A\|_{BMO}\|f\|_{B_p(w)}.$$

Для $J_4^t(x)$ аналогично оценкам $J_1^t(x)$, $J_3^t(x)$ и $I_4^t(x)$ имеем

$$\left\|J_4^t(x)\right\|\le C\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus 2Q}\left(\frac{|x|}{|z|^{n+1}}+\frac{|x|^{1/2}}{|z|^{n+1/2}}\right)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\widetilde{A}(z)\|f(z)|\,dz$$

$$\le C\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha A\|_{BMO}\sum_{k=1}^{\infty}k(2^{-k}+2^{-k/2})w(2^{k+1}Q)^{-1/p}\|f\chi_{2^{k+1}Q}\|_{L^p(w)}$$

$$\le C\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha A\|_{BMO}\|f\|_{B_p(w)}.$$

Тем самым

$$\left\|\chi_{\Gamma(x)}F_t^{\widetilde{A}}(f)(x)-\chi_{\Gamma(0)}F_t^{\widetilde{A}}(f)(0)\right\|\le C\|f\|_{B_p(w)}.$$

Это обеспечивает требуемый результат и завершает доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Мы проведем доказательство только на однородных весовых пространствах Герца и пространствах Харди типа Герца. Для простоты возьмем $\widetilde{T}^A=\tilde{g}_S^A$ или $\tilde{\mu}_S^A$. Пусть $f\in H\dot{K}_p(w_1,w_2;\mathbb{R}^n)$. По лемме 1 $f=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\lambda_j a_j$, где $a_j's$ — центральные $(n(1-1/p),p;w_1,w_2)$-атомы с $\operatorname{supp}a_j\subset B_j=B(0,2^j)$ и $\|f\|_{H\dot{K}_p(w_1,w_2)}\sim\sum\limits_j|\lambda_j|$. Имеем

$$\|\widetilde{T}^A(f)\|_{\dot{K}_p(w_1,w_2)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[w_1(B_k)]^{1-1/p}\|\chi_k\widetilde{T}^A(f)\|_{L^p(w_2)}$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty}[w_1(B_k)]^{1-1/p}\sum_{j=-\infty}^{k-1}|\lambda_j|\,\|\chi_k\widetilde{T}^A(a_j)\|_{L^p(w_2)}$$
$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty}[w_1(B_k)]^{1-1/p}\sum_{j=k}^{\infty}|\lambda_j|\,\|\chi_k\widetilde{T}^A(a_j)\|_{L^p(w_2)} = L + LL.$$

Для LL ввиду равенства

$$Q_{m+1}(A;x,y) = R_{m+1}(A;x,y) + \sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(x-y)^\alpha(D^\alpha A(x) - D^\alpha A(y))$$

аналогично доказательству леммы 3 имеем

$$\widetilde{T}^A(f)(x) \leq T^A(f)(x) + C\sum_{|\alpha|=m}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|D^\alpha A(x) - D^\alpha A(y)|}{|x-y|^n}|f(y)|\,dy.$$

Тем самым $\widetilde{T}^A$ $L^p(w_2)$-ограничен по лемме 3 и [1]. Отсюда

$$LL \leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}[w_1(B_k)]^{1-1/p}\sum_{j=k}^{\infty}|\lambda_j|\,\|a_j\|_{L^p(w_2)}$$
$$\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}[w_1(B_k)]^{1-1/p}\sum_{j=k}^{\infty}|\lambda_j|[w_1(B_j)]^{-(1-1/p)}$$
$$\leq C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|\sum_{k=-\infty}^{j}\left[\frac{w_1(B_k)}{w_1(B_j)}\right]^{1-1/p} \leq C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j| \leq C\|f\|_{H\dot{K}_p(w_1,w_2)}.$$

Для получения оценки L заметим, что

$$\widetilde{A}(x) = A(x) - \sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha A)_{2B_j}x^\alpha.$$

Тогда $Q_m(A;x,z) = Q_m(\widetilde{A};x,z)$ и

$$Q_{m+1}(\widetilde{A};x,z) = R_m(\widetilde{A};x,z) - \sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(x-z)^\alpha D^\alpha\widetilde{A}(x).$$

Для $\tilde{g}_S^A$ с учетом сходимости a к нулю для $x\in B_k$ с $k\geq j+1$ имеем

$$\widetilde{F}_t^A(a_j)(x,y) = \int\frac{\psi_t(y-z)R_m(\widetilde{A};x,z)}{|x-z|^m}a_j(z)\,dz$$
$$-\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\int\frac{\psi_t(y-z)D^\alpha\widetilde{A}(x)(x-z)^\alpha}{|x-z|^m}a_j(z)\,dz$$
$$= \int\left[\frac{\psi_t(y-z)R_m(\widetilde{A};x,z)}{|x-z|^m} - \frac{\psi_t(y)R_m(\widetilde{A};x,0)}{|x|^m}\right]a_j(z)\,dz$$
$$-\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\int\left[\frac{\psi_t(y-z)(x-z)^\alpha}{|x-z|^m} - \frac{\psi_t(y)x^\alpha}{|x|^m}\right]D^\alpha\widetilde{A}(x)a_j(z)\,dz.$$

Тогда аналогично доказательствами леммы 3 и теоремы 1 получим

$$\left\|\widetilde{F}_t^A(a_j)(x,y)\right\| \leq C\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{|z|}{|x|^{m+n+1}} + \frac{|z|^{1/2}}{|x|^{m+n+1/2}}\right]|R_m(\widetilde{A};x,z)|\,|a_j(z)|\,dz$$

$$+ C\sum_{|\alpha|=m}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{|z|}{|x|^{n+1}}+\frac{|z|^{1/2}}{|x|^{n+1/2}}\right]|D^\alpha\widetilde{A}(x)|\,|a_j(z)|\,dz$$

$$\le C\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha A\|_{BMO}\left[\frac{2^j}{2^{k(n+1)}}+\frac{2^{j/2}}{2^{k(n+1/2)}}\right]\|a_j\|_{L^p(w_2)}$$

$$\times\left(\int\limits_{B_j}w_2(z)^{-1/(p-1)}\,dz\right)^{(p-1)/p}$$

$$+ C\sum_{|\alpha|=m}\left[\frac{2^j}{2^{k(n+1)}}+\frac{2^{j/2}}{2^{k(n+1/2)}}\right]|D^\alpha\widetilde{A}(x)|\,\|a_j\|_{L^p(w_2)}\left(\int\limits_{B_j}w_2(z)^{-1/(p-1)}\,dz\right)^{(p-1)/p}$$

$$\le C\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha A\|_{BMO}\left[\frac{2^j}{2^{k(n+1)}}+\frac{2^{j/2}}{2^{k(n+1/2)}}\right][w_1(B_j)]^{-(1-1/p)}$$

$$\times\left(\int\limits_{B_j}w_2(z)^{-1/(p-1)}\,dz\right)^{(p-1)/p}$$

$$+ C\sum_{|\alpha|=m}\left[\frac{2^j}{2^{k(n+1)}}+\frac{2^{j/2}}{2^{k(n+1/2)}}\right]|D^\alpha\widetilde{A}(x)|[w_1(B_j)]^{-(1-1/p)}$$

$$\times\left(\int\limits_{B_j}w_2(z)^{-1/(p-1)}\,dz\right)^{(p-1)/p}.$$

Отметим, что если $w\in A_1$, то $\frac{w(B_2)}{|B_2|}\frac{|B_1|}{w(B_1)}\le C$ для любых шаров B_1, B_2 таких, что $B_1\subset B_2$, и ввиду обратного неравенства Гёльдера (см. [7, 16]) имеем

$$\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w(x)^r\,dx\right)^{1/r}\le\frac{C}{|B|}\int\limits_B w(x)\,dx$$

для любого шара B и некоторого $1<r<\infty$. Тем самым

$$L\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty}[w_1(B_k)]^{1-1/p}\sum_{j=-\infty}^{k-1}|\lambda_j|\left[\frac{2^j}{2^{k(n+1)}}+\frac{2^{j/2}}{2^{k(n+1/2)}}\right][w_1(B_j)]^{-(1-1/p)}$$

$$\times\left(\int\limits_{B_j}w_2(z)^{-1/(p-1)}\,dz\right)^{(p-1)/p}$$

$$\times\left[[w_2(B_k)]^{1/p}+\sum_{|\alpha|=m}\left(\int\limits_{B_k}|D^\alpha\widetilde{A}(x)|^p w_2(x)\,dx\right)^{1/p}\right]$$

$$\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty}[w_1(B_k)]^{1-1/p}\sum_{j=-\infty}^{k-1}|\lambda_j|\left[\frac{2^j}{2^{k(n+1)}}+\frac{2^{j/2}}{2^{k(n+1/2)}}\right]$$

$$\times[w_1(B_j)]^{-(1-1/p)}\left(\int\limits_{B_j}w_2(z)^{-1/(p-1)}\,dz\right)^{(p-1)/p}$$

$$\times\left[[w_2(B_k)]^{1/p}+\sum_{|\alpha|=m}\left(\frac{1}{|B_k|}\int\limits_{B_k}|D^\alpha\widetilde{A}(x)|^{r'p}\,dx\right)^{1/(r'p)}\right.$$

$$\times \left(\frac{1}{|B_k|}\int\limits_B w_2(z)^r\,dz\right)^{1/(rp)}|B_k|^{1/p}\Bigg]$$

$$\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{k-1}|\lambda_j|\left[\frac{2^j}{2^{k(n+1)}}+\frac{2^{j/2}}{2^{k(n+1/2)}}\right]\left[\frac{w_1(B_k)}{w_1(B_j)}\right]^{1-1/p}$$

$$\times\left(\int\limits_{B_j} w_2(z)^{-1/(p-1)}\,dz\right)^{(p-1)/p}[w_2(B_k)]^{1/p}$$

$$\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{k-1}|\lambda_j|\left[\frac{2^j}{2^{k(n+1)}}+\frac{2^{j/2}}{2^{k(n+1/2)}}\right]\left[\frac{w_1(B_k)}{w_1(B_j)}\right]^{1-1/p}\left[\frac{w_2(B_k)}{w_2(B_j)}\right]^{1/p}$$

$$\times\left(\frac{1}{|B_j|}\int\limits_{B_j} w_2(z)\,dz\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|B_j|}\int\limits_{B_j} w_2(z)^{-1/(p-1)}\,dz\right)^{(p-1)/p}|B_j|$$

$$\le C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|\sum_{k=j+1}^{\infty}\left[\frac{2^j}{2^{k(n+1)}}+\frac{2^{j/2}}{2^{k(n+1/2)}}\right]$$

$$\times\left[\frac{w_1(B_k)}{w_1(B_j)}\frac{|B_j|}{|B_k|}\right]^{1-1/p}\left[\frac{w_2(B_k)}{w_2(B_j)}\frac{|B_j|}{|B_k|}\right]^{1/p}|B_k|$$

$$\le C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|\sum_{k=j+1}^{\infty}[2^{j-k}+2^{(j-k)/2}]\le C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|\le C\|f\|_{H\dot K_p(w_1,w_2)}.$$

Рассуждая, как в доказательстве теоремы 1, можно оценить $\tilde\mu_S^A$; детали мы опустим. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Дадим лишь оценку $\tilde g_S^A$. Для любого куба $Q=Q(0,d)$ с $d>1$ пусть $f\in B_p(w)$ и

$$\widetilde A(x)=A(x)-\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha A)_{\widetilde Q}x^\alpha.$$

Для $f=f\chi_{4Q}+f\chi_{(4Q)^c}=f_1+f_2$ и $u\in 3Q\setminus 2Q$ имеем

$$\widetilde F_t^A(f)(x,y)=\widetilde F_t^A(f_1)(x,y)+\int\limits_{\mathbb R^n}\frac{R_m(\widetilde A;x,z)}{|x-z|^m}\psi_t(y-z)f_2(z)\,dz$$

$$-\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha A(x)-(D^\alpha A)_Q)\int\limits_{\mathbb R^n}\left[\frac{(x-z)^\alpha}{|x-z|^m}\psi_t(y-z)-\frac{(u-z)^\alpha}{|u-z|^m}\psi_t(u-z)\right]f_2(z)\,dz$$

$$-\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha A(x)-(D^\alpha A)_Q)\int\limits_{\mathbb R^n}\frac{(u-z)^\alpha}{|u-z|^m}\psi_t(u-z)f_2(z)\,dz.$$

Тогда

$$\left|\tilde g_S^A(f)(x)-g_S\left(\frac{R_m(\widetilde A;0,\cdot)}{|\cdot|^m}f_2\right)(0)\right|$$

$$=\left|\left\|\chi_{\Gamma(x)}\widetilde F_t^A(f)(x,y)\right\|-\left\|\chi_{\Gamma(0)}F_t\left(\frac{R_m(\widetilde A;0,\cdot)}{|\cdot|^m}f_2\right)(0)\right\|\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left\|\chi_{\Gamma(x)}\widetilde{F}_t^A(f)(x,y) - \chi_{\Gamma(0)}F_t\left(\frac{R_m(\widetilde{A};0,\cdot)}{|\cdot|^m}f_2\right)(0)\right\| \\
&\le \left\|\chi_{\Gamma(x)}\widetilde{F}_t^A(f_1)(x,y)\right\| + \left\|\left[\chi_{\Gamma(x)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{R_m(\widetilde{A};x,z)}{|x-z|^m}\psi_t(y-z) - \chi_{\Gamma(0)}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{R_m(\widetilde{A};0,z)}{|z|^m}\psi_t(-z)\right]f_2(z)\,dz\right\| \\
&+ \left\|\chi_{\Gamma(x)}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha A(x) - (D^\alpha A)_Q)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{(y-z)^\alpha}{|y-z|^m}\psi_t(y-z) - \frac{(u-z)^\alpha}{|u-z|^m}\psi_t(u-z)\right]\right. \\
&\left.\times f_2(z)\,dz\right\| + \left\|\chi_{\Gamma(x)}\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha A(x) - (D^\alpha A)_Q)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{(u-z)^\alpha}{|u-z|^m}\psi_t(u-z)f_2(z)\,dz\right\| \\
&\qquad = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x,u) + I_4(x,u).
\end{aligned}
$$

Ввиду $L^p(w)$-ограниченности $\tilde{g}_S^A$ получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{w(Q)}\int\limits_Q I_1(x)w(x)\,dx &\le C\left(\frac{1}{w(Q)}\int\limits_Q |\tilde{g}_S^A(f_1)(x)|^p w(x)\,dx\right)^{1/p} \\
&\le Cw(Q)^{-1/p}\|f_1\|_{L^p(w)} \le C\|f\|_{B_p(w)}.
\end{aligned}
$$

Аналогично доказательству теоремы 1 имеем

$$
\frac{1}{w(Q)}\int\limits_Q I_2(x)w(x)\,dx \le C\|f\|_{B_p(w)}
$$

и

$$
\frac{1}{w(Q)}\int\limits_Q I_3(x,u)w(x)\,dx \le C\|f\|_{B_p(w)}.
$$

В итоге, используя оценки $I_4(x,u)$, получим

$$
\frac{1}{w(Q)}\int\limits_Q \left|\tilde{g}_S^A(x) - g_S\left(\frac{R_m(\widetilde{A};0,\cdot)}{|\cdot|^m}f_2\right)(0)\right|w(x)\,dx \le C\|f\|_{B_p(w)}.
$$

Теорема 3 доказана.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Coifman R., Rochberg R., Weiss G.* Factorization theorems for Hardy spaces in several variables // Ann. Math. 1976. V. 103. P. 611–635.
2. *Harboure E., Segovia C., Torrea J. L.* Boundedness of commutators of fractional and singular integrals for the extreme values of p // Illinois J. Math. 1997. V. 41. P. 676–700.
3. *Garcia-Cuerva J.* Hardy spaces and Beurling algebras // J. London Math. Soc. 1989. V. 39. P. 499–513.
4. *Garcia-Cuerva J., Herrero M. L.* A theory of Hardy spaces associated to the Herz spaces // Proc. London Math. Soc. 1994. V. 69. P. 605–628.
5. *Lu S. Z., Yang D. C.* The decomposition of the weighted Herz spaces and its applications // Sci. China. Ser. A. 1995. V. 38. P. 147–158.

6. *Lu S. Z., Yang D. C.* The weighted Herz type Hardy spaces and its applications // Sci. China. Ser. A. 1995. V. 38. P. 662–673.
7. *Garcia-Cuerva J., Rubio de Francia J. L.* Weighted norm inequalities and related topics. Amsterdam: North-Holland, 1985.
8. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals. Princeton NJ: Princeton Univ. Press, 1993.
9. *Torchinsky A.* The real variable methods in harmonic analysis. New York: Acad. Press, 1986. (Pure Appl. Math.; 123).
10. *Torchinsky A., Wang S.* A note on the Marcinkiewicz integral // Colloq. Math. 1990. V. 60/61. P. 235–243.
11. *Liu Lanzhe.* Continuity for commutators of Littlewood–Paley operator on certain Hardy spaces // J. Korean Math. Soc. 2003. V. 40. P. 41–60.
12. *Cohen J.* A sharp estimate for a multilinear singular integral on $\mathbb{R}^n$ // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30. P. 693–702.
13. *Cohen J., Gosselin J.* On multilinear singular integral operators on $\mathbb{R}^n$ // Studia Math. 1982. V. 72. P. 199–223.
14. *Cohen J., Gosselin J.* A BMO estimate for multilinear singular integral operators // Illinois J. Math. 1986. V. 30. P. 445–465.
15. *Ding Y., Lu S. Z.* Weighted boundedness for a class rough multilinear operators // Acta Math. Sinica. 2001. V. 3. P. 517–526.
16. *Chen W., Hu G.* Weak type (H^1, L^1) estimate for multilinear singular integral operator // Adv. Math. (China). 2001. V. 30. P. 63–69.
17. *Stein E. M.* Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton NJ: Princeton Univ. Press, 1970.

Статья поступила 14 августа 2003 г.

Liu Lanze
College of Mathematics and Computer
Changsha University of Science and Technology
Changsha 410077, P. R. of China
lanzheliu@263.net