Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 512.54+512.55

МАТРИЧНАЯ НЕПРЕДСТАВИМОСТЬ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ НЕКОТОРЫХ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР

В. А. Романьков, И. В. Чирков, М. А. Шевелин

Аннотация: Доказано, что группы ручных автоморфизмов свободной алгебры Ли (свободной ассоциативной алгебры, абсолютно свободной алгебры, алгебры многочленов) ранга не меньше четырех над полем характеристики нуль не допускают точного представления матрицами ни над каким полем.

Ключевые слова: свободная алгебра, группа автоморфизмов, матричная представимость.

Введение

Целью работы является изучение возможности точной представимости матрицами над полем групп автоморфизмов свободных алгебр Ли и некоторых других свободных алгебр.

Мы ограничиваемся рассмотрением классических объектов (индекс $n \geq 2$ обозначает ранг, т. е. мощность множества свободных порождающих): свободной алгебры Ли L_n, свободной ассоциативной алгебры A_n, абсолютно свободной алгебры F_n и алгебры многочленов P_n. Для данной работы не имеет значения, рассматриваются ли алгебры A_n, F_n, P_n с 1 или без нее. Методы доказательств применимы также для ряда других алгебр.

Хорошо известно [1–5], что группы автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры A_2 и кольца многочленов P_2 состоят только из ручных автоморфизмов. Для алгебр L_n, F_n можно утверждать большее: при любом $n \geq 2$ группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} L_n$, $\operatorname{Aut} F_n$ состоят только из ручных автоморфизмов [6, 7]. Совсем недавно И. П. Шестаков и У. У. Умирбаев доказали [8], что известный автоморфизм Нагаты алгебры P_3 над полем характеристики нуль ручным не является. Все упомянутые работы касаются в основном вопроса о совпадении рассматриваемых групп автоморфизмов с подгруппами ручных автоморфизмов.

В то же время мало что известно о структуре этих групп автоморфизмов. Основной результат нашей работы — теорема о матричной непредставимости над произвольным полем группы ручных автоморфизмов алгебры $L_n(A_n, F_n, P_n)$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00489) и гранта Минобразования РФ (код проекта Е–02–1.0–191).

при $n \geq 4$, если основное поле алгебры имеет характеристику нуль. Наше исследование инициировано вопросом В. Н. Ремесленникова о матричной представимости групп автоморфизмов свободных алгебр Ли.

В случае свободной алгебры Ли L_2 из того, что все ее автоморфизмы ручные, легко следует, что группа $\mathrm{Aut}\, L_2$ естественно изоморфна группе $GL_2(K)$ (K — основное поле алгебры L_2). Вопрос о матричной представимости групп $\mathrm{Aut}\, A_2$, $\mathrm{Aut}\, F_2$, $\mathrm{Aut}\, P_2$, по-видимому, открыт. Наш основной результат не затрагивает случай ранга $n = 3$ для всех типов рассматриваемых алгебр. Также остается открытым вопрос о матричной представимости групп автоморфизмов рассматриваемых свободных алгебр, если их основное поле имеет положительную характеристику.

Мы опираемся на хорошо известную теорему А. И. Мальцева [9] о почти триангулируемости разрешимой матричной группы над алгебраически замкнутым полем. Из этой теоремы следует необходимое для данной работы утверждение: любая разрешимая матричная группа содержит подгруппу конечного индекса, коммутант которой нильпотентен.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Группа ручных автоморфизмов свободной алгебры Ли L_n (свободной ассоциативной алгебры A_n, абсолютно свободной алгебры F_n, алгебры многочленов P_n) ранга $n \geq 4$ над полем K нулевой характеристики не допускает точного представления матрицами ни над каким полем.*

Более точно, мы устанавливаем во всех указанных случаях, что группа ручных автоморфизмов содержит такую разрешимую подгруппу U_n, зависящую от типа алгебры (мы называем ее группой унитреугольных автоморфизмов), в которой коммутант любой подгруппы конечного индекса не нильпотентен. В матричных группах по упомянутой теореме А. И. Мальцева эта ситуация невозможна.

Предварительная лемма

Напомним, что *элементарным автоморфизмом* произвольной свободной алгебры C_n с множеством свободных порождающих $x_1, \dots, x_n$ называется автоморфизм вида

$$\tau_j(y_j) = (x_j \to x_j + y_j, x_i \to x_i,\ i \neq j),$$

где y_j принадлежит подалгебре, порожденной $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$. По определению автоморфизм алгебры C_n называется *ручным*, если он принадлежит подгруппе $T\,\mathrm{Aut}\, C_n$, порожденной в группе $\mathrm{Aut}\, C_n$ всеми элементарными автоморфизмами и всеми невырожденными линейными заменами порождающих элементов. Соответственно $T\,\mathrm{Aut}\, C_n$ называется *подгруппой ручных автоморфизмов.*

Группа $T\,\mathrm{Aut}\, C_n$ содержит подгруппу U_n, по определению порожденную автоморфизмами вида

$$\tau_j(y_j) = (x_j \to x_j + y_j, x_i \to x_i,\ i \neq j),$$

где y_j принадлежит подалгебре, порожденной $x_{j+1}, \dots, x_n$, и не имеет свободного члена (если в алгебре C_n есть 1). Эта подгруппа U_n, которую мы называем *группой унитреугольных автоморфизмов алгебры C_n*, играет ключевую роль в нашем доказательстве теоремы. Вообще говоря, U_n зависит от типа свободной алгебры, но мы не загромождаем обозначение, поскольку для данной работы это не существенно. Легко видеть, что группа U_n состоит из всех автоморфизмов вида

$$\tau(y_1, \dots, y_{n-1}) = (x_j \to x_j + y_j, j = 1, \dots, n-1, x_n \to x_n),$$

где для любого $j = 1, \dots, n-1$ элемент y_j принадлежит подалгебре, порожденной $x_{j+1}, \dots, x_n$.

Как обычно, для произвольной группы G через $(g_1, g_2) = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2$ обозначим коммутатор ее элементов g_1, g_2. Полагаем также $(g_1, g_2; 1) = (g_1, g_2)$ и рекуррентно $(g_1, g_2; r) = ((g_1, g_2; r-1), g_2)$. Через $G^{(k)}$ обозначим k-й член ряда коммутантов группы G.

Итак, рассмотрим подгруппу U_n группы $\operatorname{Aut} C_n$. Сначала заметим, что группа U_n разрешима для любого n. При этом основное поле K алгебры можно считать произвольным.

Лемма. *Для группы унитреугольных автоморфизмов U_n произвольной свободной алгебры C_n над любым полем справедливо равенство*

$$U_n^{(n-1)} = 1.$$

Доказательство проводится индукцией по n. Очевидно, что группа U_2 изоморфна аддитивной группе алгебры C_1 и поэтому абелева. Предположим, что $U_{n-1}^{(n-2)} = 1$. Рассмотрим в алгебре C_n свободную подалгебру C_{n-1}, порожденную $x_2, \dots, x_n$. Из вида элементов группы U_n следует, что C_{n-1} инвариантна относительно U_n, причем ограничение U_n на подалгебру C_{n-1} совпадает с U_{n-1}. Значит, автоморфизмы подгруппы $U_n^{(n-2)}$ действуют на C_{n-1} тождественно. Простое вычисление показывает, что такие («однострочные», потому что они фиксируют все порождающие элементы, кроме, возможно, одного) автоморфизмы перестановочны. Поэтому $U_n^{(n-1)} = 1$, что и требовалось.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы

Итак, согласно известной уже упомянутой нами теореме А. И. Мальцева [9] каждая разрешимая группа G матриц над полем является конечным расширением нормальной подгруппы, коммутант которой нильпотентен. Отсюда следует, что в G для некоторых натуральных чисел l, r выполнено тождество $(x^l, (y^l, z^l); r) = 1$.

Мы приведем подробное доказательство теоремы в случае алгебры P_n. Далее мы объясним, как получается доказательство теоремы в случае алгебры L_n. Доказательства для оставшихся случаев алгебр A_n, F_n проводятся аналогичным образом и легко восстанавливаются повторением представленных рассуждений с очевидными изменениями.

Для $n = 2, 3, \dots$ имеется естественное вложение групп $\operatorname{Aut} P_{n-1} \to \operatorname{Aut} P_n$, при котором автоморфизму $\phi \in \operatorname{Aut} P_{n-1}$ отвечает такой автоморфизм $\psi \in \operatorname{Aut} P_n$, который на первых $n-1$ порождающих действует, как ϕ, а последний порождающий оставляет на месте. Поэтому при доказательстве матричной непредставимости групп $\operatorname{Aut} P_n$ для $n \geq 4$ мы ограничимся случаем $n = 4$. То же самое можно сказать во всех остальных рассматриваемых случаях.

Пусть R — подгруппа в U_4, порожденная двумя автоморфизмами — «трансвекциями»:

$$\phi = (x_2 \to x_2 + x_3, x_i \to x_i, i = 1, 3, 4), \quad \psi = (x_3 \to x_3 + x_4, x_i \to x_i, i = 1, 2, 4),$$

а также всеми автоморфизмами χ_t, $t = 1, 2, \dots$, такими, что

$$\chi_t = \big(x_1 \to x_1 + x_2^t, x_i \to x_i, i = 2, 3, 4\big).$$

Докажем теперь, что для любых двух натуральных чисел l и r найдется такое натуральное число t, что $\big(\chi_t^l, (\phi^l, \psi^l); r\big) \neq 1$. Это означает, в частности, что любая подгруппа индекса l группы R имеет ненильпотентный коммутант. Значит, уже группа R не представима матрицами ни над каким полем.

Возьмем произвольно числа l и r. Положим для краткости $\alpha(l) = (\phi^l, \psi^l) = (x_2 \to x_2 + l^2 x_4, x_i \to x_i, i = 1, 3, 4)$, $\xi(t, l, r) = \big(\chi_t^l, \alpha(l); r\big)$.

Заметим, что автоморфизм $\xi(t, l, r)$ является однострочным, т. е. фиксирует порождающие x_2, x_3, x_4. Проследим, как он действует на порождающий элемент x_1. Легко видеть, что

$$\xi(t, l, r) : x_1 \to x_1 + y(t, l, r),$$

где $y(t, l, r)$ — однородный многочлен от переменных x_2, x_4 степени t. Одночлены одинаковой степени от x_2, x_4 упорядочим лексикографически, считая старшим одночлен с бо́льшим вхождением x_2. Обозначим через $\bar{y}(t, l, r)$ старший одночлен из $y(t, l, r)$. Произведя начальное вычисление, видим, что

$$\bar{y}(t, l, 1) = t l^3 x_2^{t-1} x_4.$$

Заметим, что при каждом новом коммутировании с элементом $\alpha(l)$ (при увеличении r) старший член $\bar{y}(t, l, r)$ полностью определяется через старший член $\bar{y}(t, l, r-1)$. Действительно, вклад каждого одночлена при вычислении очередного коммутирования представляет собой сумму одночленов, старший из которых имеет в точности на одно вхождение элемента x_2 меньше. По индукции легко доказывается, что при $r \leq t$

$$\bar{y}(t, l, r) = t \dots (t - r + 1) l^{1+2r} x_2^{t-r} x_4^r.$$

Дальнейшее коммутирование с $\alpha(l)$ дает 1. Если основное поле K имеет характеристику нуль, то все коэффициенты перед старшим членом $\bar{y}(t, l, r)$ при $r \leq t$ отличны от нуля. Это доказывает теорему в случае алгебры P_4, откуда следует утверждение теоремы для алгебры P_n произвольного ранга $n \geq 4$.

Рассмотрим теперь случай свободной алгебры Ли L_4. Для произвольных элементов f, g этой алгебры через $[f, g]$ будем обозначать их произведение. Для любого натурального k положим $[f, g; k] = f(adg)^k$.

Автоморфизмы ϕ, ψ и $\alpha(l)$ определяются своим действием на порождающие элементы алгебры точно так же, как и в случае алгебры P_4. Следующий автоморфизм несколько отличается от автоморфизма с тем же обозначением из предыдущего случая:

$$\chi_t = (x_1 \to x_1 + [[x_2, x_4], x_2; t], x_i \to x_i, i = 2, 3, 4).$$

Тогда

$$\chi_t^l = (x_1 \to x_1 + l[[x_2, x_4], x_2; t], x_i \to x_i, i = 2, 3, 4).$$

Полагаем, как и в предыдущем случае, $\xi(t, l, r) = \big(\chi_t^l, \alpha(l); r\big)$.

Снова заметим, что автоморфизм $\xi(t, l, r)$ является однострочным, т. е. фиксирует порождающие x_2, x_3, x_4. Проследим, как он действует на порождающий элемент x_1. Легко видеть, что $\xi(t, l, r) : x_1 \to x_1 + z(t, l, r)$, где $z(t, r, l)$ — однородный элемент из L_4^{t+2}. Аналогично предыдущему случаю докажем, что при $r \leq t$ элемент $z(t,l,r)$ отличен от нуля. Для этого рассмотрим как естественный гомоморфный образ алгебры L_4 свободную метабелеву алгебру Ли M_4, сохраняя для нее обозначения порождающих элементов. Введенные в рассмотрение автоморфизмы индуцируют автоморфизмы алгебры M_4 с теми же обозначениями.

Заметим, что элемент $c = [x_2, x_4]$ инвариантен относительно действия автоморфизма $\alpha(l)$. Коммутант M_4' алгебры M_4 является модулем над алгеброй многочленов P_4 от естественных переменных x_i, $i = 1, \dots, 4$, над основным полем K. Элемент c порождает свободный модуль над алгеброй многочленов от переменных x_2, x_4. Все элементы $z(t,r,l)$ принадлежат этому модулю. Более точно, $z(t,l,r) = c^{y(t,l,r)}$. Остается воспользоваться уже доказанным выше неравенством $y(t,l,r) \neq 0$ при $r \leq t$. Теорема доказана для алгебры L_4, а значит, и для любой алгебры L_n при $n \geq 4$.

Оставшиеся случаи свободных ассоциативных алгебр A_n и абсолютно свободных алгебр F_n при $n \geq 4$ рассматриваются аналогично. Можно также воспользоваться сведением доказательства для алгебр A_n к случаю алгебр L_n, рассматривая L_n в ее естественном вложении в A_n и используя соответствующую инвариантность относительно действия фигурирующих в доказательстве автоморфизмов. Для F_n можно использовать естественный гомоморфизм на A_n подобно тому, как это сделано выше для L_n и M_n.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Czerniakiewicz A. J.* Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 160. P. 393–401.
2. *Czerniakiewicz A. J.* Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. II // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 171. P. 309–315.
3. *Jung H. W. E.* Uber ganze birationale Transformationen der Ebene // J. Reine Angew. Math. 1942. Bd 184. S. 161–174
4. *van der Kulk W.* On polynomial rings in two variables // Nieuw Arch. Wisk. (4). 1953. V. 3, N 1. P. 33–41.
5. *Макар-Лиманов Л. Г.* Автоморфизмы свободной алгебры от двух порождающих // Функцион. анализ и его прил. 1970. Т. 4. С. 107–108.
6. *Cohn P.* Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc. 1964. V. 14. P. 618–632.
7. *Кукин Г. П.* Примитивные элементы свободных алгебр Ли // Алгебра и логика. 1970. Т. 9. С. 458–472.
8. *Умирбаев У. У., Шестаков И. П.* Подалгебры и автоморфизмы колец многочленов // Докл. РАН. 2002. Т. 386, № 6. С. 745–748.
9. *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб. 1951. Т. 28, № 3. С. 567–588.

Статья поступила 14 ноября 2003 г.

Романьков Виталий Анатольевич, Чирков Игорь Викторович
Омский гос. университет, кафедра информационных систем,
пр. Мира 55-А, Омск 644077
romankov@math.omsu.omskreg.ru, chirkov@math.omsu.omskreg.ru

Шевелин Михаил Александрович
Омский гос. университет, кафедра алгебры, пр. Мира, 55-А, Омск 644077
shevelin@math.omsu.omskreg.ru