Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 517.958

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

В. Г. Романов

Аннотация: Рассматривается задача об определении коэффициентов диэлектрической проницаемости и проводимости, входящих в систему уравнений Максвелла. В качестве информации задаются следы касательных компонент электромагнитного поля на боковой поверхности цилиндрической области. Установлены оценка устойчивости решения рассматриваемой обратной задачи и теорема единственности.

Ключевые слова: обратная задача, уравнения электродинамики, устойчивость, единственность.

§ 1. Постановка задачи, формулировка основных результатов

Вопросы единственности и устойчивости решения обратных задач электродинамики рассматривались ранее в работах [1–12] (см. также цитированную в них литературу). В настоящей статье продолжено изучение вопросов устойчивости решения трехмерных обратных задач. Рассмотрена задача об определении двух коэффициентов, входящих в систему уравнений Максвелла. При этом в качестве дополнительной информации для решения обратной задачи используются четыре наблюдения за решением прямой задачи Коши с импульсным источником внешнего тока, локализованным на некоторых плоскостях. А именно, задаются следы касательных компонент электромагнитного поля на боковой поверхности некоторой цилиндрической области. Получены оценка условной устойчивости решения рассматриваемой задачи и теорема единственности ее решения.

Пусть совокупность векторов H, E является решением задачи Коши для системы уравнений Максвелла с нулевыми начальными данными:

$$\nabla \times H = \varepsilon E_t + \sigma E + j, \quad \nabla \times E = -\mu H_t, \quad (E, H)_{t<0} \equiv 0. \tag{1.1}$$

В этих уравнениях $j = j(x, t)$ — заданная функция, характеризующая плотность внешнего тока. В дальнейшем предполагается, что она имеет вид

$$j(x, t) = 2j^0 \delta'(t) \delta(x \cdot \nu). \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00818).

Здесь j^0 — единичный вектор, определяющий направление внешнего тока, $\delta'(t)$ — производная дельта-функции Дирака, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор, $x\cdot\nu$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2, x_3)$ и ν. Предполагается также, что векторы j^0, ν не коллинеарны. Решение задачи (1.1), (1.2) зависит от параметра ν, т. е. $H = H(x, t, \nu)$, $E = E(x, t, \nu)$.

Пусть ε_0, μ_0 — некоторые положительные постоянные. Предположим, что магнитная проницаемость среды постоянна всюду, $\mu = \mu_0$, а диэлектрическая проницаемость и проводимость среды постоянны только вне некоторой компактной области $\Omega \in \mathbb{R}^3$, строго содержащейся внутри шара $B := B(x^0, R)$ радиуса $R > 0$ с центром в точке x^0, и равны $\varepsilon(x) = \varepsilon_0$, $\sigma(x) = 0$ соответственно. Пусть $\varepsilon(x)$, $\sigma(x)$ являются гладкими функциями во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, более точные предположения о них см. ниже. Обозначим через $c(x) = 1/\sqrt{\varepsilon(x)\mu_0}$ скорость распространения электромагнитных волн и через $\tau(x, \nu)$ — решение следующей задачи Коши для уравнения эйконала:

$$|\nabla\tau|^2 = c^{-2}(x), \quad \tau|_{x\cdot\nu=0} = 0. \tag{1.3}$$

Предположим, что $B \subset \mathbb{R}^3_+(\nu) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x\cdot\nu > 0\}$ и $\tau(x, \nu)$ является однозначной гладкой функцией для всех $x \in \overline{B}$, где $\overline{B} = B \cup \partial B$.

Обозначим

$$G(\nu) = \{(x, t) \mid x \in B,\ 0 < t < \tau(x, \nu) + T\},$$
$$S(\nu) = \{(x, t) \mid x \in \partial B,\ 0 < t < \tau(x, \nu) + T\},$$

где $T > 0$. Предположим, что для четырех различных векторов $\nu = \nu^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, не лежащих в одной плоскости, известны на ∂B функции $\tau(x, \nu^{(k)})$ и известны на $S(\nu^{(k)})$ касательные компоненты решения задачи (1.1), т. е. заданы функции

$$\begin{gathered} H(x, t, \nu^{(k)}) \times n = F_H(x, t, \nu^{(k)}), \quad E(x, t, \nu^{(k)}) \times n = F_E(x, t, \nu^{(k)}), \\ \tau(x, \nu^{(k)}) = \tau_k(x), \quad (x, t) \in S(\nu^{(k)}), \quad k = 1, 2, 3, 4. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь $n = n(x)$ — единичный вектор внешней нормали на ∂B. Рассмотрим обратную задачу: найти $\varepsilon(x)$, $\sigma(x)$ по заданной информации (1.4).

Исследование свойств решений прямой задачи (1.1), (1.2) показывает (см. ниже формулы (2.5)), что функции H, E представимы в виде

$$\begin{aligned} H(x, t, \nu) &= \alpha_H(x, \nu)\delta'(t - \tau(x, \nu)) + \beta_H(x, \nu)\delta(t - \tau(x, \nu)) \\ &\qquad + \overline{H}(x, t, \nu)\theta_0(t - \tau(x, \nu)), \\ E(x, t, \nu) &= \alpha_E(x, \nu)\delta'(t - \tau(x, \nu)) + \beta_E(x, \nu)\delta(t - \tau(x, \nu)) \\ &\qquad + \overline{E}(x, t, \nu)\theta_0(t - \tau(x, \nu)). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда: $\theta_0(t) = 1$ для $t \geq 0$ и $\theta_0(t) = 0$ для $t < 0$, а $\overline{H}(x, t, \nu)$, $\overline{E}(x, t, \nu)$ являются регулярными функциями. В связи с этим функции F_H, F_E представимы в аналогичном виде

$$\begin{aligned} F_H(x, t, \nu) &= \hat{\alpha}_H(x, \nu)\delta'(t - \tau(x, \nu)) + \hat{\beta}_H(x, \nu)\delta(t - \tau(x, \nu)) \\ &\qquad + \theta_0(t - \tau(x, \nu))f_H(x, t, \nu), \\ F_E(x, t, \nu) &= \hat{\alpha}_E(x, \nu)\delta'(t - \tau(x, \nu)) + \hat{\beta}_E(x, \nu)\delta(t - \tau(x, \nu)) \\ &\qquad + \theta_0(t - \tau(x, \nu))f_E(x, t, \nu), \end{aligned} \tag{1.6}$$

причем

$$\hat\alpha_H = \alpha_H \times n, \quad \hat\beta_H = \beta_H \times n, \quad \hat\alpha_E = \alpha_E \times n, \quad \hat\beta_E = \beta_E \times n.$$

Таким образом, задание функций F_H, F_E при каком-либо ν эквивалентно заданию функций $\hat\alpha_H$, $\hat\beta_H$, $\hat\alpha_E$, $\hat\beta_E$, τ на ∂B и пары регулярных функций f_E, f_H на $S(\nu)$.

Обозначим через $\Lambda(\varepsilon_0, q_0, \rho)$, $\varepsilon_0 > 0$, $q_0 > 0$, множество функций (ε, σ), удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) $\operatorname{supp}(\varepsilon(x) - \varepsilon_0, \sigma(x)) \subset \Omega \subset B$, $\rho = \operatorname{dist}(\Omega, \partial B) > 0$,

2) $\|\varepsilon(x) - \varepsilon_0\|_{\mathbf{H}^{12}(\mathbb{R}^3)} \le q_0, \|\sigma(x)\|_{\mathbf{H}^{11}(\mathbb{R}^3)} \le q_0$.

В дальнейшем будем предполагать, что $(\varepsilon, \sigma) \in \Lambda(\varepsilon_0, q_0, \rho)$ и постоянная q_0 настолько мала, что $\varepsilon_0/2 \le \varepsilon(x) \le 3\varepsilon_0/2$. Для простоты примем также, что скорость распространения электромагнитных сигналов вне Ω равна единице, т. е. $\varepsilon_0\mu_0 = 1$.

Основным содержанием настоящей работы является следующая теорема устойчивости решения обратной задачи.

Теорема 1.1. *Пусть данные* $\{\hat\alpha_H^{(j,k)}, \hat\beta_H^{(j,k)}, f_H^{(j,k)}, \hat\alpha_E^{(j,k)}, \hat\beta_E^{(j,k)}, f_E^{(j,k)}, \tau_{(j,k)}\}$ *отвечают решению задачи* (1.1) *с коэффициентами* $\varepsilon = \varepsilon_j(x)$, $\sigma = \sigma_j(x)$, $j = 1, 2$, *и* $\nu = \nu^{(k)}$ *соответственно, а параметры* R, T, x^0, *определяющие геометрию области, фиксированы и таковы, что* $4R/T := \chi \in (0, 1)$. *Тогда существуют положительные постоянные* q_0 *и* C, *зависящие от* R, T, ρ, $\nu^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, *такие, что для любых* $(\varepsilon_1, \sigma_1) \in \Lambda(\varepsilon_0, q_0, \rho)$, $(\varepsilon_2, \sigma_2) \in \Lambda(\varepsilon_0, q_0, \rho)$ *имеет место неравенство*

$$\begin{aligned} &\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \|\sigma_1 - \sigma_2\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \\ &\qquad \le C \sum_{k=1}^{4} \{ \|\hat f_H^{(1,k)} - \hat f_H^{(2,k)}\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \|\hat f_E^{(1,k)} - \hat f_E^{(2,k)}\|^2_{\mathbf{H}^2(S')} \\ &\quad + \|\hat\alpha_H^{(1,k)} - \hat\alpha_H^{(2,k)}\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} + \|\hat\alpha_E^{(1,k)} - \hat\alpha_E^{(2,k)}\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} + \|\hat\beta_H^{(1,k)} - \hat\beta_H^{(2,k)}\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)} \\ &\qquad\qquad + \|\hat\beta_E^{(1,k)} - \hat\beta_E^{(2,k)}\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)} + \|\tau_{(1,k)} - \tau_{(2,k)}\|^2_{\mathbf{H}^4(\partial B)} \}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

в котором $\hat f_H^{(j,k)} := f_H^{(j,k)}(x, t + \tau_{(j,k)}(x), \nu^{(k)})$, $\hat f_E^{(j,k)} := f_E^{(j,k)}(x, t + \tau_{(j,k)}(x), \nu^{(k)})$ *и* $S' := \partial B \times (0, T)$.

Здесь и ниже по определению квадрат некоторой нормы векторной функции равен сумме квадратов соответствующих норм ее компонент.

Из теоремы 1.1 и доказанной в § 3 леммы 3.1 следует теорема единственности.

Теорема 1.2. *Пусть функции* $F_H^{(j)}(x, t, \nu^{(k)})$, $F_E^{(j)}(x, t, \nu^{(k)})$ *соответствуют решению задачи* (1.1) *с коэффициентами* $\varepsilon = \varepsilon_j(x)$, $\sigma = \sigma_j(x)$, $\nu = \nu^{(k)}$ *и выполнено условие* $4R < T$. *Тогда существует постоянная* q_0 *такая, что для любых* $(\varepsilon_1, \sigma_1) \in \Lambda(\varepsilon_0, q_0, \rho)$, $(\varepsilon_2, \sigma_2) \in \Lambda(\varepsilon_0, q_0, \rho)$ *если*

$$F_H^{(1)}(x, t, \nu^{(k)}) = F_H^{(2)}(x, t, \nu^{(k)}), \quad (x, t) \in S(\nu^{(k)}), \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

или

$$F_E^{(1)}(x, t, \nu^{(k)}) = F_E^{(2)}(x, t, \nu^{(k)}), \quad (x, t) \in S(\nu^{(k)}), \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

то $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x)$, $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$.

Замечание. В равенстве (1.2) функция $\delta'(t)$ может быть заменена любой регулярной функцией $f(t)$, обладающей следующими свойствами:

1) $f(t)=0$ для $t<0$,

2) $f(t)\in \mathbf{C}^1[0,T]$, $f(+0)=1$, или $f(t)\in \mathbf{C}^{s+1}[0,T]$, $f(+0)=f'(+0)=\ldots=f^{(s)}(+0)=0$, $f^{(s+1)}(+0)=1$, где $s\ge 0$ — некоторое целое число.

При этом данные обратной задачи, отвечающие функции $f(t)$, и данные исходной задачи связаны друг с другом уравнением свертки, ядром которого является один раз проинтегрированная функция $f(t)$. Эти данные могут быть однозначно пересчитаны в исходные с помощью $(s+2)$-кратного дифференцирования уравнения свертки и обращения получающегося в результате уравнения Вольтерра второго рода. В соответствии со сказанным выше функции H_f, E_f, отвечающие функции $f(t)$, представимы в виде

$$H_f(x,t,\nu)=\alpha_H(x,\nu)\theta_s(t-\tau(x,\nu))+\beta_H(x,\nu)\theta_{s+1}(t-\tau(x,\nu)) + \overline{H}_f(x,t,\nu)\theta_{s+2}(t-\tau(x,\nu)),$$

$$E_f(x,t,\nu)=\alpha_E(x,\nu)\theta_s(t-\tau(x,\nu))+\beta_E(x,\nu)\theta_{s+1}(t-\tau(x,\nu)) + \overline{E}_f(x,t,\nu)\theta_{s+2}(t-\tau(x,\nu)),$$

в котором $\theta_s(t)=\theta_0(t)t^s/s!$, функции $\alpha_H(x,\nu)$, $\alpha_E(x,\nu)$, $\beta_H(x,\nu)$, $\beta_E(x,\nu)$ имеют прежний смысл, а $\overline{H}_f(x,t,\nu)$, $\overline{E}_f(x,t,\nu)$ являются некоторыми регулярными функциями. Так как производные порядка $s+2$ функций H_f, E_f по переменной t при этом представимы в виде (1.5), оценка устойчивости решения обратной задачи носит тот же самый качественный характер, что и в теореме 1.1, необходимо только заменить функции $\hat f_H^{(j,k)}$, $\hat f_E^{(j,k)}$ их частными производными по переменной t порядка $s+2$.

§ 2. Доказательство теоремы 1.1

Заменим систему уравнений (1.1) новой системой, состоящей из уравнений второго и первого порядков. Эта система имеет вид

$$\begin{gathered}\mu_0(\varepsilon H_{tt}+\sigma H_t)-\Delta H-\nabla\varepsilon\times E_t-\nabla\sigma\times E=\nabla\times j,\\ \varepsilon E_t+\sigma E-\nabla\times H+j=0,\quad (H,E)_{t<0}\equiv 0.\end{gathered}\tag{2.1}$$

Рассмотрим для уравнений (2.1) вспомогательную обратную задачу об определении функций $(\varepsilon,\sigma)\in\Lambda(\varepsilon_0,q_0,\rho)$, предполагая, что для $\nu=\nu^{(k)}$, $k=1,2,3,4$, известны функции

$$H(x,t,\nu)=F(x,t,\nu),\quad \frac{\partial H(x,t,\nu)}{\partial n}=G(x,t,\nu),\quad (x,t)\in S(\nu),\tag{2.2}$$

а также функции $\alpha_H(x,\nu)$, $\beta_H(x,\nu)$, $\tau(x,\nu)$ на ∂B.

На протяжении большей части этого параграфа мы не будем отождествлять параметр ν ни с одним из значений $\nu^{(k)}$ и лишь при выводе окончательных оценок используем конкретные значения этого параметра.

Если $\varepsilon(x)=\varepsilon_0$, $\sigma(x)=0$ для всех $x\in\mathbb{R}^3$ и $\varepsilon_0\mu_0=1$, то решение задачи (2.1) имеет вид

$$\begin{gathered}H(x,t,\nu)=\nabla\times\big(j^0\delta(t-|x\cdot\nu|)\big)=\alpha_H^0(x,\nu)\delta'(t-|x\cdot\nu|),\\ E(x,t,\nu)=\varepsilon_0^{-1}\nabla\times\big(\alpha_H^0\delta(t-|x\cdot\nu|)\big)=\alpha_E^0(x,\nu)\delta'(t-|x\cdot\nu|),\quad t>0,\end{gathered}\tag{2.3}$$

в котором векторы $\alpha_H^0(x,\nu)$, $\alpha_E^0(x,\nu)$ задаются формулами

$$\alpha_H^0(x,\nu)=-(j^0\times\nu)\operatorname{sign}(x\cdot\nu),\quad \alpha_E^0(x,\nu)=-\varepsilon_0^{-1}\big(\alpha_H^0\times\nu\big)\operatorname{sign}(x\cdot\nu).\tag{2.4}$$

В силу предположения, что $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ вне Ω, представление (2.3), (2.4), выполняется для

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x \cdot \nu \le x^0 \cdot \nu - R + \rho,\ t < 2(x^0 \cdot \nu - R + \rho) - x \cdot \nu\}.$$

В общем случае представления для H и E будут иметь вид

$$\begin{aligned} H(x,t,\nu) &= \alpha_H(x,\nu)\delta'(t-\tau(x,\nu)) + \beta_H(x,\nu)\delta(t-\tau(x,\nu)) \\ &\qquad + \overline{H}(x,t,\nu)\theta_0(t-\tau(x,\nu)), \\ E(x,t,\nu) &= \alpha_E(x,\nu)\delta'(t-\tau(x,\nu)) + \beta_E(x,\nu)\delta(t-\tau(x,\nu)) \\ &\qquad + \overline{E}(x,t,\nu)\theta_0(t-\tau(x,\nu)). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $\overline{H}(x,t,\nu)$, $\overline{E}(x,t,\nu)$ являются непрерывными функциями.

Уравнения для $\alpha_H(x,\nu)$, $\beta_H(x,\nu)$, $\alpha_E(x,\nu)$, $\beta_E(x,\nu)$ получаются в результате подстановки представлений (2.5) в уравнения (2.1) и приравнивания коэффициентов при $\delta''(t-\tau(x,\nu))$ и $\delta'(t-\tau(x,\nu))$. Они имеют вид

$$(2\nabla\tau \cdot \nabla + \varphi)\alpha_H - \nabla\varepsilon \times \alpha_E = 0, \quad \varepsilon\alpha_E - \alpha_H \times \nabla\tau = 0, \tag{2.6}$$

$$(2\nabla\tau\cdot\nabla+\varphi)\beta_H - \nabla\varepsilon\times\beta_E = \Delta\alpha_H + \nabla\sigma\times\alpha_E, \quad \varepsilon\beta_E - \beta_H\times\nabla\tau = \nabla\times\alpha_H - \sigma\alpha_E. \tag{2.7}$$

В этих формулах для сокращения записи принято обозначение $\varphi(x,\nu) = \Delta\tau(x,\nu) + \mu_0\sigma(x)$.

В области $t > \tau(x,\nu)$ функции $H(x,t,\nu)$, $E(x,t,\nu)$ удовлетворяют соотношениям

$$\mu_0(\varepsilon H_{tt} + \sigma H_t) - \Delta H - \nabla\varepsilon \times E_t - \nabla\sigma \times E = 0, \quad H|_{t=\tau(x,\nu)+0} = \gamma_H(x,\nu), \tag{2.8}$$

$$\varepsilon E_t + \sigma E - \nabla \times H = 0, \quad E|_{t=\tau(x,\nu)+0} = \gamma_E(x,\nu). \tag{2.9}$$

Здесь $\gamma_H(x,\nu)$, $\gamma_E(x,\nu)$ являются решениями дифференциальных уравнений первого порядка, аналогичных уравнениям для $\beta_H(x,\nu)$, $\beta_E(x,\nu)$:

$$\begin{gathered} (2\nabla\tau \cdot \nabla + \varphi)\gamma_H - \nabla\varepsilon \times \gamma_E = \Delta\beta_H + \nabla\sigma \times \beta_E, \\ \varepsilon\gamma_E - \gamma_H \times \nabla\tau = \nabla \times \beta_H - \sigma\beta_E, \end{gathered} \tag{2.10}$$

и удовлетворяют условиям $\gamma_H(x,\nu) = 0$, $\gamma_E(x,\nu) = 0$ для $x \cdot \nu = 0$.

Отметим также полезные для дальнейшего соотношения

$$\nabla\tau \cdot \nabla\alpha_H = 0, \quad \nabla\tau \cdot \nabla\beta_H = \nabla \cdot \alpha_H, \quad \nabla\tau \cdot \nabla\gamma_H = \nabla \cdot \beta_H, \tag{2.11}$$

которые являются следствием равенства $\nabla \cdot H = 0$.

Некоторые свойства решения прямой задачи. На основании результатов статьи [13] (см. § 4) можно утверждать, что для любого $t_0 > 0$ существует число $q_0 = q_0(t_0) > 0$ такое, что поле геодезических $\Gamma(x,\nu)$, ортогональных фронтам $\tau(x,\nu) = \mathrm{const}$, регулярно в области $D(t_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \tau(x,\nu) \le t_0\}$. Обозначим

$$K(t_0) = \{(x,t) \mid x \in D(t_0), \tau(x,\nu) \le t \le 2t_0 - \tau(x,\nu)\}.$$

Пусть в дальнейшем числа q_0 и t_0 выбраны так, что выполнено условие регулярности геодезических $\Gamma(x,\nu)$ в $D(t_0)$, $B \subset D(t_0)$ и выполнено условие $T+\tau(x,\nu) \le 2t_0 - \tau(x,\nu)$ для $x \in B$. При этом функция $\tau(x,\nu)$ является гладкой однозначной функцией точки $x \in D(t_0)$. Более того, справедлива оценка

$$\|\tau(x,\nu) - x \cdot \nu\|_{\mathbf{H}^{11}(B)} < Cq_0 \tag{2.12}$$

с постоянной C, зависящей лишь от R. В дальнейшем тем же символом C будут обозначаться различные постоянные, зависящие от R, T и не зависящие от q_0.

Заметим, что для $x \in D'(\nu)$, $D'(\nu) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot \nu \leq x^0 \cdot \nu - R + \rho\}$, функции $\alpha_H(x,\nu)$, $\alpha_E(x,\nu)$ совпадают с $\alpha_H^0(x,\nu)$, $\alpha_E^0(x,\nu)$, а $\beta_H(x,\nu)$, $\beta_E(x,\nu)$, $\gamma_H(x,\nu)$, $\gamma_E(x,\nu)$ обращаются в нуль. В области $D(t_0)$ они являются гладкими функциями. Достаточно очевидно, что при сделанных предположениях о множестве $\Lambda(\varepsilon_0, q_0, \rho)$ функции α_H, β_H, γ_H, α_E, β_E, γ_E удовлетворяют в области $D(t_0)$ оценкам

$$\begin{gathered} \left\|\alpha_H - \alpha_H^0\right\|_{\mathbf{H}^{10}(D(t_0))} < Cq_0, \quad \|\beta_H\|_{\mathbf{H}^8(D(t_0))} < Cq_0, \\ \|\gamma_H\|_{\mathbf{H}^6(D(t_0))} < Cq_0, \quad \left\|\alpha_E - \alpha_E^0\right\|_{\mathbf{H}^{10}(D(t_0))} < Cq_0, \\ \|\beta_E\|_{\mathbf{H}^8(D(t_0))} < Cq_0, \quad \|\gamma_E\|_{\mathbf{H}^6(D(t_0))} < Cq_0. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Используя метод энергетических оценок для области $K(t_0)$, аналогично работе [13] нетрудно показать, что при этом функции $H(x,t,\nu)$, $E(x,t,\nu)$ принадлежат классу $\mathbf{H}^4(K(t_0))$, а следовательно, и $\mathbf{C}^1(K(t_0))$ и для них выполняются неравенства

$$\|H\|_{\mathbf{C}^1(K(t_0))} < Cq_0, \quad \|E\|_{\mathbf{C}^1(K(t_0))} < Cq_0. \tag{2.14}$$

Введем в рассмотрение функции

$$\widehat{H}(x,t,\nu) = H(x,t+\tau(x,\nu)), \quad \widehat{E}(x,t,\nu) = E(x,t+\tau(x,\nu)).$$

Нетрудно проверить, что эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} (2\nabla\tau \cdot \nabla + \varphi)\widehat{H}_t - \Delta\widehat{H} - \nabla\varepsilon \times \widehat{E}_t - \nabla\sigma \times \widehat{E} = 0, \\ \varepsilon\widehat{E}_t + \sigma\widehat{E} - \nabla \times \widehat{H} - \widehat{H}_t \times \nabla\tau = 0, \quad (x,t) \in B \times (0,T), \end{gathered} \tag{2.15}$$

и предельным условиям

$$\widehat{H}|_{t=+0} = \gamma_H(x,\nu), \quad \widehat{E}|_{t=+0} = \gamma_E(x,\nu). \tag{2.16}$$

Кроме того, в силу (2.2) на $S' := \partial B \times (0,T)$ для функции $\widehat{H}$ имеют место равенства

$$\widehat{H}(x,t,\nu) = \widehat{F}(x,t,\nu), \quad \frac{\partial \widehat{H}(x,t,\nu)}{\partial n} = \widehat{G}(x,t,\nu), \quad (x,t) \in S', \tag{2.17}$$

в которых

$$\begin{aligned} \widehat{F}(x,t,\nu) = F(x,t+\tau(x,\nu),\nu), \widehat{G}(x,t,\nu) & \\ = G(x,t+\tau(x,\nu),\nu) + F_t(x,t+\tau(x,\nu),\nu)\frac{\partial\tau(x,\nu)}{\partial n}&. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Соотношения для разностей. Пусть $\varepsilon_j(x)$, $\sigma_j(x)$, $j = 1, 2$, принадлежат $\Lambda(\varepsilon_0, q_0, \rho)$. Отвечающие им функции $\tau(x,\nu)$, $\varphi(x,\nu)$ отметим индексом j внизу, а вектор-функции $\widehat{H}$, $\widehat{E}$, α_H, β_H, γ_H, α_E, β_E, γ_E, $\widehat{F}$, $\widehat{G}$ — индексом j вверху, т. е. примем для них обозначения τ_j, φ_j, $\widehat{H}^{(j)}$, $\widehat{E}^{(j)}$, $\alpha_H^{(j)}$, $\beta_H^{(j)}$, $\gamma_H^{(j)}$, $\alpha_E^{(j)}$, $\beta_E^{(j)}$, $\gamma_E^{(j)}$, $\widehat{F}^{(j)}$, $\widehat{G}^{(j)}$ и введем разности

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \tilde{\sigma} = \sigma_1 - \sigma_2, \quad \widetilde{\varphi} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \tilde{\tau} = \tau_1 - \tau_2,$$

$$u = \widehat{H}^{(1)} - \widehat{H}^{(2)}, \quad \widetilde{E} = \widehat{E}^{(1)} - \widehat{E}^{(2)}, \quad \widetilde{F} = \widehat{F}^{(1)} - \widehat{F}^{(2)}, \quad \widetilde{G} = \widehat{G}^{(1)} - \widehat{G}^{(2)},$$

$$\tilde\alpha_H = \alpha_H^{(1)} - \alpha_H^{(2)}, \quad \tilde\beta_H = \beta_H^{(1)} - \beta_H^{(2)}, \quad \tilde\gamma_H = \gamma_H^{(1)} - \gamma_H^{(2)},$$
$$\tilde\alpha_E = \alpha_E^{(1)} - \alpha_E^{(2)}, \quad \tilde\beta_E = \beta_E^{(1)} - \beta_E^{(2)}, \quad \tilde\gamma_E = \gamma_E^{(1)} - \gamma_E^{(2)}.$$

Из равенств (2.15)–(2.17) вытекают следующие соотношения для разностей:

$$\begin{aligned}(2\nabla\tau_1\cdot\nabla + \varphi_1)u_t - \Delta u - \nabla\varepsilon_1 \times \widetilde{E}_t - \nabla\sigma_1\times\widetilde{E}\\ + (2\nabla\tilde\tau\cdot\nabla + \tilde\varphi)\widehat{H}_t^{(2)} - \nabla\tilde\varepsilon\times\widehat{E}_t^{(2)} - \nabla\tilde\sigma\times\widehat{E}^{(2)} = 0, \quad (x,t)\in G',\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\varepsilon_1\widetilde{E}_t + \sigma_1\widetilde{E} - \nabla\times u - u_t\times\nabla\tau_1 + \tilde\varepsilon\widehat{E}_t^{(2)} + \tilde\sigma\widehat{E}^{(2)} - \widehat{H}_t^{(2)}\times\nabla\tilde\tau = 0, \quad (x,t)\in G', \tag{2.20}$$

$$u|_{t=+0} = \tilde\gamma_H(x,\nu), \quad \widetilde{E}|_{t=+0} = \tilde\gamma_E(x,\nu), \quad x\in B, \tag{2.21}$$

$$u(x,t,\nu) = \widetilde{F}(x,t,\nu), \quad \frac{\partial u(x,t,\nu)}{\partial n} = \widetilde{G}(x,t,\nu), \quad (x,t)\in S'. \tag{2.22}$$

Здесь $G' = B\times(0,T)$, $S' = \partial B\times(0,T)$.

В силу принадлежности $\varepsilon_j(x)$, $\sigma_j(x)$, $j=1,2$, классу $\Lambda(\varepsilon_0,q_0,\rho)$ для функций $\tau_j(x,\nu)$, $\widehat{H}^{(j)}$, $\widehat{E}^{(j)}$ имеют место оценки такого же типа (2.12), (2.14), как и для функций τ, H, E, т. е.

$$\begin{gathered}\|\tau_j(x,\nu) - x\cdot\nu\|_{\mathbf{H}^{11}(B)} < Cq_0, \quad \|\widehat{H}^{(j)}\|_{\mathbf{C}^1(G')} < Cq_0,\\ \|\widehat{E}^{(j)}\|_{\mathbf{C}^1(G')} < Cq_0, \quad j=1,2.\end{gathered} \tag{2.23}$$

Из уравнения эйконала и сделанного выше предположения о достаточной малости постоянной q_0 вытекает, что

$$|\nabla\tau_j|^2 \le \varepsilon_j(x)\mu_0 \le 3\varepsilon_0\mu_0/2 = 3/2.$$

Все эти факты приводят к оценкам

$$\|\widetilde{E}\|^2_{\mathbf{L}^2(G')} \le C\big(\|\tilde\gamma_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|u\|^2_{\mathbf{H}^1(G')} + q_0^2\big(\|\tilde\varepsilon\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|\tilde\sigma\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big)\big), \tag{2.24}$$

$$\|\widetilde{E}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(G')} \le C\big(\|\tilde\gamma_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|u\|^2_{\mathbf{H}^1(G')} + q_0^2\big(\|\tilde\varepsilon\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|\tilde\sigma\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big)\big), \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}\|2\nabla\tau_1\cdot\nabla u_t - \Delta u\|^2_{\mathbf{L}^2(G')} \le Cq_0^2\big(\|\tilde\gamma_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|u\|^2_{\mathbf{H}^1(G')} + \|\tilde\varphi\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}\\ + \|\tilde\varepsilon\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde\sigma\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big).\end{aligned} \tag{2.26}$$

Априорная оценка $\tilde\gamma_H$ через данные обратной задачи и коэффициенты. Получим важную для всего последующего изложения оценку $\tilde\gamma_H$, устанавливающую связь этой функции с заданными на S' функциями $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$, а также с $\tilde\alpha_H$, $\tilde\beta_H$, $\tilde\sigma$, $\tilde\tau$.

Воспользуемся следующей леммой 2.2 работы [13].

Лемма. *Для любой скалярной функции $w\in\mathbf{H}^2(G')$, $G' = B\times(0,T)$, и $(\varepsilon_1,\sigma_1)\in\Lambda(\varepsilon_0,q_0,\rho)$ при выполнении условия $4R<T$ существуют такие положительные постоянные q_0, C_1, C_2, зависящие только от R, T, что имеет место оценка*

$$\|2\nabla w_t\cdot\nabla\tau_1 - \Delta w\|^2_{\mathbf{L}^2(G')} \ge C_1\big(\|w\|^2_{\mathbf{H}^1(G')} + \|w\|^2_{\mathbf{H}^1(\Sigma_0\bigcup\Sigma_T)}\big) - C_2\|w\|^2_{\mathbf{H}^1(S')}, \tag{2.27}$$

в которой $\Sigma_0 = \{(x,t)\mid x\in B, t=0\}$, $\Sigma_T = \{(x,t)\mid x\in B, t=T\}$.

Аналогичное неравенство имеет место для каждой из компонент вектора $u(x,t,\nu)$.

Используя неравенство (2.26) и приведенную выше лемму, получаем следующее неравенство:

$$C_1\big(\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(G')}+\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Sigma_0\bigcup\Sigma_T)}\big)-C_2\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(S')}\le q_0^2C\big(\|\tilde\gamma_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(G')} \\ +\|\tilde\varphi\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\varepsilon\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}+\|\tilde\sigma\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}+\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big). \quad (2.28)$$

При достаточно малом значении постоянной q_0 из (2.21), (2.28) следует соотношение

$$\|\tilde\gamma_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\le q_0^2C\big(\|\tilde\gamma_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\varphi\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\varepsilon\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \\ +\|\tilde\sigma\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}+\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big)+C\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(S')}. \quad (2.29)$$

Исключим из этого неравенства $\tilde\gamma_E$. Воспользуемся для этого равенствами (2.6), (2.7), (2.10). Из них следует, что

$$\begin{gathered}\varepsilon_1\tilde\alpha_E-\tilde\alpha_H\times\nabla\tau_1+\tilde\varepsilon\alpha_E^{(2)}-\alpha_H^{(2)}\times\nabla\tilde\tau=0,\\ \varepsilon_1\tilde\beta_E+\sigma_1\tilde\alpha_E-\tilde\beta_H\times\nabla\tau_1-\nabla\times\tilde\alpha_H+\tilde\varepsilon\beta_E^{(2)}+\tilde\sigma\alpha_E^{(2)}-\beta_H^{(2)}\times\nabla\tilde\tau=0,\\ \varepsilon_1\tilde\gamma_E+\sigma_1\tilde\beta_E-\tilde\gamma_H\times\nabla\tau_1-\nabla\times\tilde\beta_H+\tilde\varepsilon\gamma_E^{(2)}+\tilde\sigma\beta_E^{(2)}-\gamma_H^{(2)}\times\nabla\tilde\tau=0.\end{gathered} \quad (2.30)$$

Из соотношений (2.30) вытекают неравенства

$$\begin{aligned}&\|\tilde\alpha_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}\le C\big(\|\tilde\alpha_H\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\varepsilon\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big),\\ &\|\tilde\beta_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}\le C\big(\|\tilde\beta_H\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\alpha_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\\ &\qquad+q_0^2\big(\|\tilde\alpha_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\varepsilon\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\sigma\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big)\big),\\ &\|\tilde\gamma_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}\le C\big(\|\tilde\gamma_H\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\beta_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\\ &\qquad+q_0^2\big(\|\tilde\beta_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\varepsilon\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\sigma\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big)\big).\end{aligned} \quad (2.31)$$

Результирующее неравенство для $\tilde\gamma_E$ имеет вид

$$\|\tilde\gamma_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}\le C\big(\|\tilde\gamma_H\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\beta_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \\ +q_0^2\big(\|\tilde\alpha_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}+\|\tilde\varepsilon\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\sigma\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big)\big). \quad (2.32)$$

Исключим $\tilde\gamma_E$ с помощью найденной оценки из неравенства (2.29). Тогда при достаточно малых значениях параметра q_0 итоговое неравенство можно записать в следующем виде:

$$\|\tilde\gamma_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\le q_0^2C\big(\|\tilde\alpha_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}+\|\tilde\beta_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}+\|\tilde\varphi\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}+\|\tilde\varepsilon\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \\ +\|\tilde\sigma\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}+\|\tilde\tau\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big)+C\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(S')}. \quad (2.33)$$

Так как из уравнения эйконала (1.3), записанного для функций τ_j, $c_j^{-2}=\varepsilon_j\mu_0$, $j=1,2$, следует равенство

$$\nabla\tilde\tau\cdot(\nabla\tau_1+\nabla\tau_2)=\tilde\varepsilon\mu_0, \quad (2.34)$$

справедливы оценки

$$\|\tilde\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(B)}\le C\|\tilde\tau\|_{\mathbf{H}^2(B)},\quad \|\tilde\varepsilon\|_{\mathbf{H}^2(B)}\le C\|\tilde\tau\|_{\mathbf{H}^3(B)}. \quad (2.35)$$

С другой стороны, из соотношений (2.22) имеем

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(S')}=\|\widetilde F\|^2_{\mathbf{H}^1(S')}+\|\widetilde G\|^2_{\mathbf{L}^2(S')}. \quad (2.36)$$

Поэтому неравенство (2.33) можно записать в виде

$$\|\tilde{\gamma}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \le q_0^2 C\big(\|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\big) + C\big(\|\widetilde{F}\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \|\widetilde{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(S')}\big). \quad (2.37)$$

Априорные оценки $\tilde{\alpha}_H$, $\tilde{\beta}_H$. Получим прежде всего уравнения для разностей $\tilde{\alpha}_H$, $\tilde{\beta}_H$, $\tilde{\gamma}_H$, соответствующие равенствам (2.6), (2.7), (2.10). С этой целью напишем эти равенства для значений ε_1, σ_1, $\alpha_H^{(1)}$, $\beta_H^{(1)}$, $\gamma_H^{(1)}$ и ε_2, σ_2, $\alpha_H^{(2)}$, $\beta_H^{(2)}$, $\gamma_H^{(2)}$, а затем вычтем из первых вторые. Первое из равенств (2.6) при этом приводит к соотношению

$$(2\nabla\tau_1\cdot\nabla + \varphi_1)\tilde{\alpha}_H - \nabla\varepsilon_1\times\tilde{\alpha}_E + (2\nabla\tilde{\tau}\cdot\nabla + \tilde{\varphi})\alpha_H^{(2)} - \nabla\tilde{\varepsilon}\times\alpha_E^{(2)} = 0. \quad (2.38)$$

Выполняя аналогичные преобразования для равенства (2.7), получим уравнение

$$(2\nabla\tau_1\cdot\nabla + \varphi_1)\tilde{\beta}_H - \nabla\varepsilon_1\times\tilde{\beta}_E + (2\nabla\tilde{\tau}\cdot\nabla + \tilde{\varphi})\beta_H^{(2)} - \nabla\tilde{\varepsilon}\times\beta_E^{(2)} = \Delta\tilde{\alpha}_H + \nabla\sigma_1\times\tilde{\alpha}_E + \nabla\tilde{\sigma}\times\alpha_E^{(2)}. \quad (2.39)$$

Наконец, из уравнения (2.10) следует, что

$$(2\nabla\tau_1\cdot\nabla + \varphi_1)\tilde{\gamma}_H - \nabla\varepsilon_1\times\tilde{\gamma}_E + (2\nabla\tilde{\tau}\cdot\nabla + \widetilde{\varphi})\gamma_H^{(2)} - \nabla\tilde{\varepsilon}\times\gamma_E^{(2)} = \Delta\tilde{\beta}_H + \nabla\sigma_1\times\tilde{\beta}_E + \nabla\tilde{\sigma}\times\beta_E^{(2)}. \quad (2.40)$$

Используем вначале последнее из этих соотношений. Из него вытекает следующая оценка для $\mathbf{L}^2(B)$-нормы оператора Лапласа функции $\tilde{\beta}_H$:

$$\|\Delta\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \le C\big(\|\tilde{\gamma}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + q_0^2\big(\|\tilde{\gamma}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|\tilde{\beta}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|\tilde{\varepsilon}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big)\big). \quad (2.41)$$

С учетом полученных ранее оценок для $\tilde{\gamma}_H$, $\tilde{\gamma}_E$, $\tilde{\beta}_E$, $\tilde{\varepsilon}$ и очевидного неравенства

$$\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \le C\big(\|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}\big),$$

перепишем его в виде

$$\|\Delta\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \le Cq_0^2\big(\|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\big) + C\big(\|\widetilde{F}\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \|\widetilde{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(S')}\big). \quad (2.42)$$

Из соотношений (2.39), (2.31) нетрудно получить аналогичную оценку $\mathbf{L}^2(B)$-нормы оператора Лапласа функции $\tilde{\alpha}_H$:

$$\|\Delta\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \le C\big(\|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + q_0^2\big(\|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\big)\big) + C\big(\|\widetilde{F}\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \|\widetilde{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(S')}\big). \quad (2.43)$$

Оценим, основываясь на последних неравенствах, $\mathbf{H}^2(B)$-нормы функций $\tilde{\beta}_H$, $\tilde{\alpha}_H$. Согласно известному неравенству из книги О. А. Ладыженской [14] (см. (6.14) на с. 121) справедливо соотношение

$$\|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} \le C\Big(\|\Delta\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \sum_{|\xi|\le 2}\|D^\xi\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)}\Big), \quad (2.44)$$

в котором принято обычное обозначение D^ξ для мультииндексной производной, при этом $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $|\xi| = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$.

Оценим значения $\mathbf{L}^2(B)$-норм производных функций $\tilde{\tau}$, $\tilde{\alpha}_H$, $\tilde{\beta}_H$ через соответствующие нормы граничных значений этих функций. Используя тот факт, что $\varepsilon_j(x) = \varepsilon_0$, $\sigma_j(x) = 0$, $j = 1, 2$, в ρ-окрестности ∂B, запишем равенства (2.34), (2.38), (2.39) в виде

$$\nabla\tilde{\tau} \cdot (\nabla\tau_1 + \nabla\tau_2) = 0, \quad x \in B \setminus \Omega, \tag{2.45}$$

$$(2\nabla\tau_1 \cdot \nabla + \Delta\tau_1)\tilde{\alpha}_H + (2\nabla\tilde{\tau} \cdot \nabla + \Delta\tilde{\tau})\alpha_H^{(2)} = 0, \quad x \in B \setminus \Omega, \tag{2.46}$$

$$(2\nabla\tau_1 \cdot \nabla + \Delta\tau_1)\tilde{\beta}_H + (2\nabla\tilde{\tau} \cdot \nabla + \Delta\tilde{\tau})\beta_H^{(2)} = \Delta\tilde{\alpha}_H, \quad x \in B \setminus \Omega. \tag{2.47}$$

Поле геодезических (линий, ортогональных фронтам $\tau(x,\nu)$=const) регулярно в области B, по крайней мере для достаточно малых q_0. Поэтому, с одной стороны, имеют место равенства

$$\tilde{\tau}(x,\nu) = 0, \quad \tilde{\alpha}_H(x,\nu) = 0, \quad \tilde{\beta}_H(x,\nu) = 0, \quad x \in \partial B \setminus \partial B',$$

$$\partial B' =: \{x \in \partial B | (x - x^0) \cdot \nu > \sqrt{R^2 - (R-\rho)^2}\},$$

которые верны на $\partial B \setminus \partial B'$ и для всех существующих производных функций $\tilde{\tau}(x,\nu)$, $\tilde{\alpha}_H(x,\nu)$, $\tilde{\beta}_H(x,\nu)$, а с другой стороны, $\nabla\tau_j(x,\nu) \cdot n(x) > 0$, $j = 1, 2$, для $x \in \partial B'$. Это позволяет, используя соотношение (2.45), выразить все производные функции $\tilde{\tau}(x,\nu)$ на $\partial B'$ до четвертого порядка через производные вдоль $\partial B'$. Аналогично из равенств (2.46), (2.47) можно выразить производные функций $\tilde{\alpha}_H(x,\nu)$, $\tilde{\beta}_H(x,\nu)$ на $\partial B'$ до третьего и второго порядков соответственно через производные от них вдоль $\partial B'$ и производные до четвертого порядка функции $\tilde{\tau}(x,\nu)$. В результате получаем оценки вида

$$\sum_{|\xi| \le 4} \|D^\xi \tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)} \le C\|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^4(\partial B)}, \tag{2.48}$$

$$\sum_{|\xi| \le 3} \|D^\xi \tilde{\alpha}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)} \le C\big(\|\tilde{\alpha}\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^4(\partial B)}\big), \tag{2.49}$$

$$\sum_{|\xi| \le 2} \|D^\xi \tilde{\beta}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)} \le C\big(\|\tilde{\alpha}\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} + \|\tilde{\beta}\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^4(\partial B)}\big), \tag{2.50}$$

в которых постоянная C зависит от R и ρ.

Используя для функции $\tilde{\beta}_H$ неравенства (2.42), (2.44), (2.50) и аналогичные неравенства для функции $\tilde{\alpha}_H$, заключаем, что при достаточно малых q_0 верны оценки

$$\|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} \le C\big(\delta^2(\nu) + \|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + q_0^2\|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\big), \tag{2.51}$$

$$\|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} \le C\big(\delta^2(\nu) + q_0^2\big(\|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}\big)\big), \tag{2.52}$$

в которых

$$\delta^2(\nu) = \|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} + \|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^4(\partial B)} + \|\widetilde{F}\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \|\widetilde{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(S')}.$$

Из соотношений (2.30), (2.51), (2.52), (2.35) вытекает неравенство

$$\|\tilde{\alpha}_E\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} \le C\big(\delta^2(\nu) + \|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^3(B)}\big). \tag{2.53}$$

Оценки для $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\varepsilon}$. Оценим вначале $\nabla \cdot \tilde{\alpha}_H := \lambda$. Запишем уравнение для разностей, соответствующее второму из равенств (2.11). Оно имеет вид

$$\lambda = \tilde{\beta}_H \cdot \nabla\tau_1 + \beta_H^{(2)} \cdot \nabla\tilde{\tau}. \tag{2.54}$$

Из этого равенства и оценки (2.52) находим, что

$$\|\lambda\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} \le C\big(\delta^2(\nu) + q_0^2\big(\|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^3(B)}\big)\big). \tag{2.55}$$

Применим теперь операцию div к равенству (2.38). В результате этого получим соотношение

$$\begin{aligned}(2\nabla\tau_1 \cdot \nabla + \varphi_1)\lambda + 2\sum_{i,j=1}^{3}(\tau_1)_{x_i x_j}((\tilde{\alpha}_H)_i)_{x_j} + \nabla\varphi_1 \cdot \tilde{\alpha}_H + \nabla\varepsilon_1 \cdot (\nabla \times \tilde{\alpha}_E)\\ + 2\sum_{i,j=1}^{3}\tilde{\tau}_{x_i x_j}\big(\big(\alpha_H^{(2)}\big)_i\big)_{x_j} + \nabla\widetilde{\varphi} \cdot \alpha_H^{(2)} + (2\nabla\tilde{\tau} \cdot \nabla + \widetilde{\varphi})\big(\nabla \cdot \alpha_H^{(2)}\big)\\ + \nabla\tilde{\varepsilon} \cdot \big(\nabla \times \alpha_E^{(2)}\big) = 0,\end{aligned} \tag{2.56}$$

в котором через $(\tilde{\alpha}_H)_i$ обозначена i-я компонента вектора $\tilde{\alpha}_H$. Используя неравенства (2.35), (2.51)–(2.53), (2.55) и оценки (2.12), (2.13) для τ_1 и $\alpha_H^{(2)}$, $\alpha_E^{(2)}$, находим, что

$$\big\|\nabla\widetilde{\varphi} \cdot \alpha_H^{(2)}\big\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \le C\big(\delta^2(\nu) + q_0^2\big(\|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} + \|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big)\big). \tag{2.57}$$

Рассмотрим семейство интегральных кривых уравнения

$$\frac{dx}{ds} = \alpha_H^{(2)},$$

в котором ds — длина дуги. Нетрудно установить, что это семейство является при малых q_0 регулярным в B в том смысле, что через каждую точку этой области проходит единственная кривая семейства, пересекающая ∂B в некоторой точке. Поэтому

$$\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \le C\big\|\nabla\widetilde{\varphi} \cdot \alpha_H^{(2)}\big\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}. \tag{2.58}$$

Тогда из неравенств (2.57), (2.58) находим, что

$$\|\widetilde{\varphi}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \le C\big(\delta^2(\nu) + q_0^2\big(\|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} + \|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big)\big). \tag{2.59}$$

Воспользуемся соотношением $\widetilde{\varphi}(x,\nu) = \Delta\tilde{\tau}(x,\nu) + \mu_0\tilde{\sigma}(x)$ и равенством (2.34). Очевидно, что

$$\begin{aligned}&\|\nabla(\Delta\tilde{\tau}) \cdot \nabla(\tau_1 + \tau_2) - \mu_0\Delta\tilde{\varepsilon}\|_{\mathbf{L}^2(B)}\\ &\qquad = \|\nabla(\Delta\tilde{\tau}) \cdot \nabla(\tau_1 + \tau_2) - \Delta(\nabla\tilde{\tau} \cdot \nabla(\tau_1 + \tau_2))\|_{\mathbf{L}^2(B)} \le Cq_0^2\|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}.\end{aligned}$$

Поэтому для функции

$$\psi(x,\nu) := \Delta\tilde{\varepsilon}(x) + \nabla\tilde{\sigma}(x) \cdot \nabla(\tau_1 + \tau_2)(x,\nu)$$

из (2.59) следует неравенство

$$\|\psi(x,\nu)\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \le C\big(\delta^2(\nu) + q_0^2\big(\|\tilde{\tau}(x,\nu)\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} + \|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big)\big). \tag{2.60}$$

Рассмотрим соотношения

$$\Delta\tilde{\varepsilon}(x) + \nabla\tilde{\sigma}(x)\cdot\nabla(\tau_1+\tau_2)(x,\nu^{(k)}) = \psi(x,\nu^{(k)}), \quad k=1,2,3,4, \tag{2.61}$$

как систему линейных алгебраических уравнений относительно $\Delta\tilde{\varepsilon}(x)$ и компонент вектора $\nabla\tilde{\sigma}(x)$. В силу оценки (2.12) справедливы неравенства

$$\|\nabla\tau_j(x,\nu^{(k)}) - \nu^{(k)}\|_{\mathbf{H}^{10}(B)} < Cq_0, \quad j=1,2. \tag{2.62}$$

Кроме того, по предположению векторы $\nu=\nu^{(k)}$, $k=1,2,3,4$, различны и не лежат в одной плоскости, следовательно, векторы $\nu^{(k)}-\nu^{(1)}$, $k=2,3,4$, линейно независимы. Поэтому при достаточно малых значениях параметра q_0 определитель системы (2.61) отличен от нуля, значит, имеет место оценка

$$\|\nabla\tilde{\sigma}(x)\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \le C\sum_{k=1}^4 \|\psi(x,\nu^{(k)})\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \tag{2.63}$$

с некоторой положительной постоянной C, зависящей от R и определителя системы векторов $\nu^{(k)}-\nu^{(1)}$, $k=2,3,4$. Подобная оценка, очевидно, имеет место и для $\mathbf{H}^1(B)$-нормы функции $\tilde{\sigma}(x)$:

$$\|\tilde{\sigma}(x)\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \le C\sum_{k=1}^4 \|\psi(x,\nu^{(k)})\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}. \tag{2.64}$$

Из неравенства (2.60) следует оценка

$$\|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \le C\left(\delta^2 + q_0^2\sum_{k=1}^4 \|\tilde{\tau}_{(k)}\|^2_{\mathbf{H}^3(B)}\right), \tag{2.65}$$

в которой

$$\delta^2 = \sum_{k=1}^4 \delta^2(\nu^{(k)}), \quad \tilde{\tau}_{(k)}(x) = \tilde{\tau}(x,\nu^{(k)}).$$

Тогда из неравенства (2.59) вытекают оценки

$$\|\Delta\tilde{\tau}_{(k)}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \le C\left(\delta^2 + q_0^2\sum_{j=1}^4 \|\tilde{\tau}_{(j)}\|^2_{\mathbf{H}^3(B)}\right), \quad k=1,2,3,4. \tag{2.66}$$

С другой стороны,

$$\|\tilde{\tau}_{(k)}\|^2_{\mathbf{H}^3(B)} \le C\big(\|\Delta\tilde{\tau}_{(k)}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\tilde{\tau}_{(k)}\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)}\big), \quad k=1,2,3,4. \tag{2.67}$$

Следовательно, для достаточно малых значений параметра q_0 справедливы неравенства

$$\|\tilde{\tau}_{(k)}\|_{\mathbf{H}^3(B)} \le C\delta, \quad k=1,2,3,4. \tag{2.68}$$

Из неравенств (2.35), (2.65), (2.68) следует окончательная оценка

$$\|\tilde{\varepsilon}\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} + \|\tilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \le C\delta^2. \tag{2.69}$$

Вывод оценки (1.7). Для получения оценки (1.7) достаточно выразить нормы функций $\widetilde{F}(x,t,\nu^{(k)})$, $\widetilde{G}(x,t,\nu^{(k)})$ и $\tilde{\alpha}_H(x,\nu^{(k)})$, $\tilde{\beta}_H(x,\nu^{(k)})$, $\tilde{\alpha}_E(x,\nu^{(k)})$, $\tilde{\beta}_E(x,\nu^{(k)})$, входящих в неравенство (2.69) посредством δ, через

$$\begin{gathered}\tilde{f}_H^{(k)} = \hat{f}_H^{(1,k)} - \hat{f}_H^{(2,k)}, \quad \tilde{f}_E^{(k)} = \hat{f}_E^{(1,k)} - \hat{f}_E^{(2,k)}, \quad \bar{\alpha}_H^{(k)} = \hat{\alpha}_H^{(1,k)} - \hat{\alpha}_H^{(2,k)},\\ \bar{\alpha}_E^{(k)} = \hat{\alpha}_E^{(1,k)} - \hat{\alpha}_E^{(2,k)}, \quad \bar{\beta}_H^{(k)} = \hat{\beta}_H^{(1,k)} - \hat{\beta}_H^{(2,k)}, \quad \bar{\beta}_E^{(k)} = \hat{\beta}_E^{(1,k)} - \hat{\beta}_E^{(2,k)}.\end{gathered} \tag{2.70}$$

Подобные вычисления для части функций были выполнены в работе [12]. Для удобства читателя повторим их здесь, проведя все вычисления в полном объеме. При этом, как и ранее, будем для сокращения записи использовать параметр ν вместо $\nu^{(k)}$ и в соответствии с этим опускать индекс k у введенных формулами (2.70) функций.

Воспользуемся уравнениями (1.1). Рассмотрим их в ρ-окрестности $S(\nu)$. При этом $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\sigma = 0$. Перейдем к функциям $\widehat{H} = H(x, t + \tau(x, \nu), \nu)$, $\widehat{E} = E(x, t + \tau(x, \nu), \nu)$. В окрестности S' эти функции удовлетворяют соотношениям

$$\nabla \times \widehat{H} + \widehat{H}_t \times \nabla\tau = \varepsilon_0 \widehat{E}_t, \quad \nabla \times \widehat{E} + \widehat{E}_t \times \nabla\tau = -\mu_0 \widehat{H}_t, \tag{2.71}$$

$$\nabla \cdot \widehat{H} - \widehat{H}_t \cdot \nabla\tau = 0, \quad \nabla \cdot \widehat{E} - \widehat{E}_t \cdot \nabla\tau = 0. \tag{2.72}$$

Отсюда легко выводятся соответствующие равенства для функций $\widetilde{H} = \widehat{H}^{(1)} - \widehat{H}^{(2)}$, $\widetilde{E} = \widehat{E}^{(1)} - \widehat{E}^{(2)}$. Они имеют вид

$$\begin{gathered} \nabla \times \widetilde{H} + \widetilde{H}_t \times \nabla\tau_1 + \widehat{H}_t^{(2)} \times \nabla\tilde{\tau} = \varepsilon_0 \widetilde{E}_t, \\ \nabla \times \widetilde{E} + \widetilde{E}_t \times \nabla\tau_1 + \widehat{E}_t^{(2)} \times \nabla\tilde{\tau} = -\mu_0 \widetilde{H}_t, \end{gathered} \tag{2.73}$$

$$\nabla \cdot \widetilde{H} - \widetilde{H}_t \cdot \nabla\tau_1 - \widehat{H}_t^{(2)} \cdot \nabla\tilde{\tau} = 0, \quad \nabla \cdot \widetilde{E} - \widetilde{E}_t \cdot \nabla\tau_1 - \widehat{E}_t^{(2)} \cdot \nabla\tilde{\tau} = 0. \tag{2.74}$$

Представим функции $\widetilde{H}$, $\widetilde{E}$ на S' в виде

$$\widetilde{H} = n \times (\widetilde{H} \times n) + \widetilde{H}_n n, \quad \widetilde{H}_n = \widetilde{H} \cdot n, \quad \widetilde{E} = n \times (\widetilde{E} \times n) + \widetilde{E}_n n, \quad \widetilde{E}_n = \widetilde{E} \cdot n. \tag{2.75}$$

Отсюда

$$\widetilde{H} = n \times \tilde{f}_H + \widetilde{H}_n n, \quad \widetilde{E} = n \times \tilde{f}_E + \widetilde{E}_n n, \quad (x, t) \in S'. \tag{2.76}$$

На S' нормальные компоненты поля $\widetilde{H}_n$, $\widetilde{E}_n$ совпадают с радиальными $\widetilde{H}_r = \widetilde{H} \cdot e_r$, $\widetilde{E}_r = \widetilde{E} \cdot e_r$, где $e_r = (x - x^0)/|x - x^0|$ — единичный радиус-вектор. Компоненты $\widetilde{H}_n$, $\widetilde{E}_n$, а также нормальные производные тангенциальных компонент векторов $\widetilde{H}$, $\widetilde{E}$ находятся из равенств (2.73). Производные по нормали на S' радиальных компонент $\widetilde{H}_r$, $\widetilde{E}_r$ вычисляются из равенств (2.74). Чтобы убедиться в этом достаточно равенства (2.73), (2.74) записать в сферической системе координат. Так как при вычислении, например, $\widetilde{H}_n$ приходится дифференцировать тангенциальные компоненты $\widetilde{E}$ по угловым координатам и интегрировать выражение $\partial\widetilde{H}_n/\partial t$ по переменной t в пределах от $+0$ до t, находим, что

$$\|\widetilde{F}\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \|\widetilde{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(S')} \le C\big(\|\tilde{f}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \|\tilde{f}_E\|^2_{\mathbf{H}^2(S')} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)} + \|\tilde{\gamma}_H \cdot n\|^2_{\mathbf{H}^1(\partial B)}\big). \tag{2.77}$$

Последнее слагаемое в этом неравенстве можно исключить, так как

$$\|\tilde{\gamma}_H \cdot n\|^2_{\mathbf{H}^1(\partial B)} = \|\widetilde{H}_n\|^2_{\mathbf{H}^1(\partial B \times \{0\})} \le C\|(\widetilde{H}_n)_t\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} \le C\big(\|\tilde{f}_E\|^2_{\mathbf{H}^2(S')} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}\big).$$

Тогда оценка (2.77) принимает вид

$$\|\widetilde{F}\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \|\widetilde{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(S')} \le C\big(\|\tilde{f}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \|\tilde{f}_E\|^2_{\mathbf{H}^2(S')} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)}\big). \tag{2.78}$$

Согласно формулам (2.6), (2.11) имеем на ∂B цепочку равенств

$$\begin{gathered} \alpha_E = \varepsilon_0^{-1} \alpha_H \times \nabla\tau, \quad \hat{\alpha}_E := \alpha_E \times n, \quad \hat{\alpha}_H := \alpha_H \times n, \quad (\alpha_H)_n := \alpha_H \cdot n, \\ \hat{\alpha}_E = \varepsilon_0^{-1}[-\alpha_H(\nabla\tau \cdot n) + (\alpha_H)_n \nabla\tau], \quad (\alpha_H)_n = \varepsilon_0 \hat{\alpha}_E \cdot \nabla\tau, \\ \alpha_H = n \times \hat{\alpha}_H + \varepsilon_0(\hat{\alpha}_E \cdot \nabla\tau) n. \end{gathered}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\tilde{\alpha}_H = n \times \bar{\alpha}_H + \varepsilon_0\big(\bar{\alpha}_E \cdot \nabla\tau_1 + \hat{\alpha}_E^{(2)} \cdot \nabla\tilde{\tau}\big)n,\\ \|\tilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} \le C\big(\|\bar{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} + \|\bar{\alpha}_E\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^4(\partial B)}\big).\end{gathered} \tag{2.79}$$

Аналогично из соотношений (2.7), (2.11) получаем на ∂B равенства

$$\begin{gathered}\beta_E = \varepsilon_0^{-1}[\beta_H \times \nabla\tau + \nabla \times \alpha_H], \quad \hat{\beta}_E := \beta_E \times n, \quad \hat{\beta}_H := \beta_H \times n,\\ \hat{\beta}_E = \varepsilon_0^{-1}[-\beta_H(\nabla\tau \cdot n) + (\beta_H)_n\nabla\tau + (\nabla \times \alpha_H) \times n],\\ (\beta_H)_n := \beta_H \cdot n = \varepsilon_0\hat{\beta}_E \cdot \nabla\tau + (\nabla\tau \cdot n)(\nabla \cdot \alpha_H) - ((\nabla \times \alpha_H) \times n) \cdot \nabla\tau,\\ \beta_H = n \times \hat{\beta}_H + [\varepsilon_0\hat{\beta}_E \cdot \nabla\tau + (\nabla\tau \cdot n)(\nabla \cdot \alpha_H) - ((\nabla \times \alpha_H \times n) \cdot \nabla\tau]n.\end{gathered}$$

Отсюда в соответствии с обозначениями (2.70)

$$\begin{gathered}\tilde{\beta}_H = n \times \bar{\beta}_H + \big[\varepsilon_0\big(\bar{\beta}_E \cdot \nabla\tau_1 + \hat{\beta}_E^{(2)} \cdot \nabla\tilde{\tau}\big) + (\nabla\tau_1 \cdot n)(\nabla \cdot \tilde{\alpha}_H)\\ + (\nabla\tilde{\tau} \cdot n)\big(\nabla \cdot \alpha_H^{(2)}\big) - ((\nabla \times \tilde{\alpha}_H) \times n) \cdot \nabla\tau_1 - \big(\big(\nabla \times \alpha_H^{(2)}\big) \times n\big) \cdot \nabla\tilde{\tau}\big]n,\end{gathered} \tag{2.80}$$

$$\|\tilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)} \le C\big(\|\bar{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)} + \|\bar{\beta}_E\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)} + \|\bar{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} + \|\bar{\alpha}_E\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^4(\partial B)}\big).$$

С учетом формул (2.78)–(2.80) получаем, что

$$\delta^2(\nu) \le C\big(\|\bar{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)} + \|\bar{\beta}_E\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)} + \|\bar{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} + \|\bar{\alpha}_E\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} + \|\tilde{\tau}\|^2_{\mathbf{H}^4(\partial B)} + \|\tilde{f}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \|\tilde{f}_E\|^2_{\mathbf{H}^2(S')}\big). \tag{2.81}$$

Поэтому

$$\delta^2 \le C\sum_{k=1}^{4}\big(\big\|\bar{\beta}_H^{(k)}\big\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)} + \big\|\bar{\beta}_E^{(k)}\big\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial B)} + \big\|\bar{\alpha}_H^{(k)}\big\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} + \big\|\bar{\alpha}_E^{(k)}\big\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial B)} + \|\tilde{\tau}_{(k)}\|^2_{\mathbf{H}^4(\partial B)} + \big\|\tilde{f}_H^{(k)}\big\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \big\|\tilde{f}_E^{(k)}\big\|^2_{\mathbf{H}^2(S')}\big). \tag{2.82}$$

Из последнего неравенства и следует оценка (1.7).

§ 3. Доказательство теоремы 1.2

Докажем вначале вспомогательную лемму.

Лемма 3.1. *Задание на $S(\nu)$ тангенциальных компонент векторов $H(x,t,\nu)$ или $E(x,t,\nu)$ однозначно определяет на $S(\nu)$ все компоненты электромагнитного поля.*

Пусть для определенности задана функция $F_H(x,t,\nu)$. Как было отмечено в § 1, задание $F_H(x,t,\nu)$ эквивалентно заданию ее регулярной части $f_H(x,t,\nu)$ на $S(\nu)$ и функций $\hat{\alpha}_H(x,\nu)$, $\hat{\beta}_H(x,\nu)$, $\tau(x,\nu)$ на ∂B.

Покажем, что задание функций $\hat{\alpha}_H(x,\nu)$, $\hat{\beta}_H(x,\nu)$, $\tau(x,\nu)$ на ∂B однозначно определяет функции $\alpha_H(x,\nu)$, $\alpha_E(x,\nu)$, $\beta_H(x,\nu)$, $\beta_E(x,\nu)$, $\gamma_H(x,\nu)$, $\gamma_E(x,\nu)$, $\tau(x,\nu)$ вне B. При этом мы будем использовать некоторые обозначения, введенные в предыдущем параграфе.

Прежде всего функция $\tau(x,\nu)$ однозначно определяется в $D(t_0) \setminus B$ как решение уравнения эйконала заданием ее на ∂B. Предположим, что постоянные q_0, t_0 выбраны, как в § 2, и поле лучей регулярно в $D(t_0)$.

Рассмотрим равенства

$$\alpha_H \cdot \nabla\tau = 0, \quad \alpha_H \times n = \hat{\alpha}_H, \quad x \in \partial B, \tag{3.1}$$

как систему линейных уравнений относительно компонент вектора $\alpha_H(x,\nu)$. Достаточно очевидно, что ранг системы равен трем. В частности, ее определители третьего порядка, у которых первая строка образована элементами первого из равенств (3.1), равны с точностью до знака $(\nabla\tau \cdot n)\cos(n, x_k)$, $k = 1, 2, 3$. В точках $x \in \partial B \setminus \partial B'$, $\partial B' =: \{x \in \partial B \mid (x - x^0) \cdot \nu > \sqrt{R^2 - (R-\rho)^2}\}$, эта система имеет очевидное решение $\alpha_H = \alpha_H^0$, так как в этих точках $\hat{\alpha}_H$ необходимо совпадает с $\alpha_H^0 \times n$. Для точек $x \in \partial B'$ имеют место неравенства $\nabla\tau(x,\nu) \cdot n(x) > 0$, $\cos(n,\nu) > 0$. Поэтому равенства (3.1) однозначно определяют $\alpha_H(x,\nu)$ и на $\partial B'$. С помощью первого из равенств (2.6) функция $\alpha_H(x,\nu)$ однозначно продолжается на всю область $D(t_0) \setminus B$. Второе из равенств (2.6) однозначно определяет в той же области $\alpha_E(x,\nu)$.

Аналогично предыдущему рассмотрим равенства

$$\beta_H \cdot \nabla\tau = \nabla \cdot \alpha_H, \quad \beta_H \times n = \hat{\beta}_H, \quad x \in \partial B, \tag{3.2}$$

как систему линейных уравнений относительно компонент вектора $\beta_H(x,\nu)$. Эта система однозначно, по аналогичным соображениям, определяет $\beta_H(x,\nu)$ на ∂B. Однозначное построение функций $\beta_H(x,\nu)$, $\beta_E(x,\nu)$ в области $D(t_0) \setminus B$ производится на основе уравнений (2.7).

Заметим, что задание на S функции $f_H(x,t,\nu)$ позволяет определить

$$\hat{\gamma}_H(x,\nu) := \gamma_H(x,\nu) \times n = f_H(x, \tau(x,\nu) + 0, \nu), \quad x \in \partial B.$$

Поэтому с помощью вышеописанной процедуры можно построить функцию $\gamma_H(x,\nu)$ в области $D(t_0) \setminus B$. А именно, рассмотрим равенства

$$\gamma_H \cdot \nabla\tau = \nabla \cdot \beta_H, \quad \gamma_H \times n = \hat{\gamma}_H, \quad x \in \partial B. \tag{3.3}$$

Эти равенства однозначно определяют $\gamma_H(x,\nu)$ на ∂B. Однозначное продолжение функции $\gamma_H(x,\nu)$ на область $D(t_0) \setminus B$ и построение функции $\gamma_E(x,\nu)$ осуществляется с помощью равенств (2.10).

Пусть положительное число T_0 выбрано так, что $G \subset \{(x,t) \mid t < T_0 - |x - x^0|\}$ и $B(x^0, T_0) \subset D(t_0)$. В области

$$G'' = \{(x,t) \mid |x - x^0| \geq R,\ \tau(x,\nu) \leq t \leq \min(T + \tau(x,\nu),\ T_0 - |x - x^0|)\}$$

функция $H(x,t,\nu)$ является решением волнового уравнения

$$H_{tt} - \Delta H = 0 \tag{3.4}$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{gathered} H \times n|_{S(\nu)} = f_H(x,t,\nu), \quad \left(\frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{2}{R} H_r\right)_{S(\nu)} = -\nabla' \cdot (n \times f_H(x,t,\nu)), \\ H|_{t=\tau(x,\nu)} = \gamma_H(x,\nu), \end{gathered} \tag{3.5}$$

в которых $H_r = H \cdot e_r$, $e_r = (x - x^0)/|x - x^0|$, а символ $\nabla'\cdot$ обозначает тангенциальную часть дивергенции, связанную с касательными на $S(\nu)$ компонентами вектора. В целом второе из равенств (3.5) является следствием равенства $\nabla \cdot H = 0$, записанного в сферических координатах.

Покажем, что функция $H(x,t,\nu)$ однозначно определяется в G'' заданием $f_H(x,t,\nu)$ и $\gamma_H(x,\nu)$. Для этого в силу линейности задачи (3.4), (3.5) достаточно рассмотреть соответствующую ей однородную задачу, т. е. положить $f_H(x,t,\nu)=0$, $\gamma_H(x,\nu)=0$, и доказать, что она имеет только тривиальное решение $H(x,t,\nu)=0$. Используя для однородной задачи метод энергетических неравенств, умножим обе части равенства (3.4) скалярно на $2H_t$ и проинтегрируем получившееся равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(|H_t|^2+\sum_{k=1}^{3}|\nabla H_k|^2\right)-\nabla\cdot\left(2\sum_{k=1}^{3}(H_k)_t\nabla H_k\right)=0,$$

в котором $H=(H_1,H_2,H_3)$, по области $G''(s):=\{(x,t)\in G''\mid t\le s\}$, $s\in(0,T_0)$. В результате получим соотношение

$$\begin{aligned}\int\limits_{P(s)}\left(|H_t|^2+\sum_{k=1}^{3}|\nabla H_k|^2\right)dx-2\int\limits_{Q(s)}\frac{\partial H}{\partial t}\cdot\frac{\partial H}{\partial r}\,dSdt\\ -\int\limits_{K_1(s)}\left(|H_t|^2+\sum_{k=1}^{3}|\nabla H_k|^2+2\sum_{k=1}^{3}(H_k)_t(\nabla H_k\cdot\nabla\tau(x,\nu))\right)dx\\ +\int\limits_{K_2(s)}\left(|H_t|^2+\sum_{k=1}^{3}|\nabla H_k|^2-2\sum_{k=1}^{3}(H_k)_t(\nabla H_k\cdot\nabla|x-x^0|)\right)dx=0,\end{aligned}\tag{3.6}$$

в котором

$$P(s):=\{(x,t)\in G''\mid t=s\},\ Q(s):=\{(x,t)\in S(\nu)\mid t\le s\},$$
$$K_1(s):=\{(x,t)\in G''\mid \tau(x,\nu)=t\le s\},$$
$$K_2(s):=\{(x,t)\in G''\mid t=T_0-|x-x^0|\le s\}.$$

Заметим, что множество $K_2(s)$ непусто, только начиная с некоторого положительного s_0. Несложные выкладки приводят подынтегральные выражения в двух последних интегралах к виду

$$|H_t|^2+\sum_{k=1}^{3}|\nabla H_k|^2+2\sum_{k=1}^{3}(H_k)_t(\nabla H_k\cdot\nabla\tau(x,\nu))\\ =\sum_{k=1}^{3}|\nabla H_k(x,\tau(x,\nu))\cdot\nabla\tau(x,\nu)|^2,$$

$$|H_t|^2+\sum_{k=1}^{3}|\nabla H_k|^2-2\sum_{k=1}^{3}(H_k)_t(\nabla H_k\cdot\nabla|x-x^0|)\\ =\sum_{k=1}^{3}|\nabla H_k(x,T_0-|x-x^0|)\cdot\nabla|x-x^0||^2.$$

В силу однородности граничных условий на $K_1(s)$ интеграл по этому множеству равен нулю. Интеграл по $K_2(s)$ неотрицателен. Покажем, что интеграл по $Q(s)$, с учетом отрицательного знака перед ним также неотрицателен. В самом деле, представляя H в виде разложения по ортам $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\phi$ сферической системы координат:

$$H = H_r\mathbf{e}_r + H_\vartheta\mathbf{e}_\vartheta + H_\phi\mathbf{e}_\phi,$$

находим

$$\frac{\partial H}{\partial t}\cdot\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\partial H_r}{\partial t}\frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{\partial H_\vartheta}{\partial t}\frac{\partial H_\vartheta}{\partial r} + \frac{\partial H_\phi}{\partial t}\frac{\partial H_\phi}{\partial r}.$$

В силу однородных граничных условий на S имеем

$$H_\vartheta = H_\phi = 0, \quad \frac{\partial H_r}{\partial r} = -\frac{2H_r}{R}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial H}{\partial t}\cdot\frac{\partial H}{\partial r} = -2\frac{\partial H_r}{\partial t}\frac{H_r}{R} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H_r^2}{R}\right), \quad (x,t)\in Q(s).$$

Выполняя в интеграле по $Q(s)$ интегрирование по переменной t и используя условие

$$H_r(x,\tau(x,\nu)+0,\nu) = 0, \quad x\in\partial B,$$

преобразуем интеграл к виду

$$-2\int\limits_{Q(s)} \frac{\partial H}{\partial t}\cdot\frac{\partial H}{\partial r}\,dSdt = \frac{2}{R}\int\limits_{\partial B} H_r^2(x,s)\,dS \geq 0.$$

Таким образом, каждое из слагаемых левой части равенства (3.6) неотрицательно. Отсюда, в частности, следует, что $H_t(x,t,\nu)=0$, а значит, в силу однородности условия на характеристической поверхности $t=\tau(x,\nu)$ и $H(x,t,\nu)=0$ для всех $(x,t)\in G''$. Так как однородная задача имеет только тривиальное решение, функция $H(x,t,\nu)$ как решение задачи (3.4), (3.5) определяется в G'' однозначно. Соотношения (2.9) однозначно определяют в той же области и функцию $E(x,t,\nu)$. Следовательно, лемма 3.1 справедлива в том случае, когда на S задается функция $H(x,t,\nu)$. Поскольку система уравнений Максвелла в области G'' полностью симметрична по отношению к функциям H, E, лемма остается верной и в случае задания на S функции $E(x,t,\nu)$. $\square$

Из леммы 3.1 и теоремы 1.1 следует утверждение теоремы 1.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н.* О единственности решения задачи электроразведки // Докл. АН СССР. 1949. Т. 69, № 6. С. 797–800.
2. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
3. *Романов В. Г., Кабанихин С. И.* Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.
4. *Рамм А. Г.* Многомерные обратные задачи рассеяния. М.: Мир, 1994.
5. *Ola P., Päivärinta L., Somersalo E.* An inverse boundary value problem in electrodynamics // Duke Math. J. 1993. V. 70. P. 617–653.
6. *Yakhno V. G.* Multidimensional inverse problems in ray formulation for hyperbolic equations // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1998. V. 6, N 4. P. 373–386.
7. *Белишев М. И., Гласман А. К.* Динамическая обратная задача для системы Максвелла: восстановление скорости в регулярной зоне // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 2. С. 131–187.
8. *Белишев М. И., Исаков В. М., Пестов Л. Н., Шарафутдинов В. А.* К реконструкции метрики по внешним электромагнитным наблюдениям // Докл. РАН. 2000. Т. 372, № 3. С. 298–300.
9. *Романов В. Г.* Обратные задачи электродинамики // Докл. РАН. 2002. Т. 386, № 3. С. 304–309.

10. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения в одной обратной задаче для системы уравнений Максвелла // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2002. С. 196–205.
11. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения в двумерной обратной задаче электродинамики // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 837–850.
12. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения в задаче об определении коэффициента диэлектрической проницаемости // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 4. С. 881–891.
13. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости в обратной задаче определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 6. С. 1323–1338.
14. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 20 сентября 2004 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru