Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 515.125

СПЕКТРЫ КОЛЕЦ И РЕШЕТОК

Ю. Л. Ершов

Аннотация: Строится ковариантный функтор из категории дистрибутивных решеток с наибольшим и наименьшим элементами и вложениями, сохраняющими эти элементы, в качестве морфизмов в категорию полупростых алгебр с единицей над произвольным полем с вложениями, сохраняющими единицу, в качестве морфизмов. Построенный функтор таков, что спектр дистрибутивной решетки гомеоморфен спектру кольца (алгебры), являющегося его функторным образом.

Ключевые слова: спектр кольца, спектр дистрибутивной решетки.

В работе будет построен функтор ρ из категории $\mathfrak{d}^i_{\perp\top}$ дистрибутивных решеток с наименьшим ($\perp$) и наибольшим ($\top$) элементами с вложениями, сохраняющими $\perp$ и $\top$, в качестве морфизмов в категорию $\mathscr{R}^i$ коммутативных колец с единицей с вложениями, сохраняющими 1, в качестве морфизмов такой, что для любой дистрибутивной решетки $D \in \mathfrak{d}^i_{\perp\top}$ имеет место изоморфизм спектров $\mathbb{S}\mathrm{pec}\, D$ и $\mathbb{S}\mathrm{pec}\, R_D$ ($R_D \rightleftharpoons \rho(D)$). Построение такого функтора позволяет получить новое доказательство теоремы Хокстера [1] о том, что любое спектральное пространство гомеоморфно пространству $\mathbb{S}\mathrm{pec}\, R$ для подходящего коммутативного кольца R.

Ниже приводятся все определения и сведения, необходимые для доказательства.

1. О топологиях и спектрах

Топологией на (непустом) множестве X называется всякое семейство T подмножеств X ($T \subseteq P(X)$), удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\varnothing, X \in T$;

2) $U, V \in T \Longrightarrow U \cap V \in T$;

3) $V_\lambda \in T,\ \lambda \in \Lambda \Longrightarrow \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \in T$.

Всякая топология T является с алгебраической точки зрения полной дистрибутивной решеткой $\langle T, \cup, \cap, \varnothing, X\rangle$ с наименьшим ($\varnothing$) и наибольшим (X) элементами.

Топологическим пространством называется пара $\langle X, T\rangle$, где T — топология на X.

Если $\langle X, T\rangle$ — топологическое пространство, то подмножество $Y \subseteq X$ *открыто* (в топологии T) тогда и только тогда, когда $Y \in T$; Y *замкнуто* (в топологии T) тогда и только тогда, когда его дополнение $X \setminus Y$ открыто.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ–2069.2003.1).

Замечание. Любое подмножество $Y \subseteq X$ содержит наибольшее открытое подмножество $\operatorname{int} Y \rightleftharpoons \bigcup\{V \mid V \in T,\ V \subseteq Y\}$ — *внутренность* Y; и наименьшее замкнутое надмножество $\operatorname{cl} Y \rightleftharpoons \cap\{F \mid F$ замкнуто и $F \supseteq Y\}$ — *замыкание* Y.

Если $\langle X, T\rangle, \langle Y, T'\rangle$ — топологические пространства, то отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если для любого $U' \in T'$ множество $f^{-1}(U')$ принадлежит T.

Замечание. Если $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, то отображение $f^* : T' \to T$, определенное так: $f^*(U') \rightleftharpoons f^{-1}(U')$, $U' \in T'$, является гомоморфизмом решетки $\langle T', \cup, \cap, \varnothing, X'\rangle$ в решетку $\langle T, \cup, \cap, \varnothing, X\rangle$, сохраняющим все супремумы (объединения), наименьший и наибольший элементы.

Топологическое пространство $\langle X, T\rangle$ *отделимо* (*T_0-пространство*), если для любых $\xi_0 \neq \xi_1 \in X$ существует $U \in T$ такое, что $\xi_0 \in U$, $\xi_1 \notin U$ или $\xi_0 \notin U$, $\xi_1 \in U$.

Предпорядок специализации $\leq_T$ на X — это бинарное отношение, определенное так: для $\xi_0, \xi_1 \in X$

$$\xi_0 \leq_T \xi_1 \rightleftharpoons \forall U \in T(\xi_0 \in U \Longrightarrow \xi_1 \in U)\ (\Longleftrightarrow \xi_0 \in \operatorname{cl}\{\xi_1\}).$$

Замечание. Отношение $\leq_T$ является (частичным) порядком тогда и только тогда, когда $\langle X, T\rangle$ отделимо.

Подмножество $Y \subseteq X$ называется *неприводимым* (в топологии T), если из того, что Y содержится в объединении $F_0 \cup F_1$ двух замкнутых множеств F_0 и F_1, следует, что $Y \subseteq F_0$ или $Y \subseteq F_1$.

Замечания. 1. Подмножество $Y \subseteq X$ неприводимо тогда и только тогда, когда неприводимо его замыкание $\operatorname{cl} Y$.

2. Для любой точки $\xi \in X$ множества $\{\xi\}$ и $\operatorname{cl}\{\xi\}$ неприводимы.

3. Подмножество Y неприводимо тогда и только тогда, когда для любых $U, V \in T$ из того, что $U \cap Y \neq \varnothing$, $V \cap Y \neq \varnothing$, следует, что $(U \cap V) \cap Y \neq \varnothing$.

Отделимое топологическое пространство $\langle X, T\rangle$ называется *трезвым* (sober) (см. [2]), если для всякого непустого замкнутого неприводимого подмножества F найдется точка $\xi \in X$ $(\xi \in F)$ такая, что $F = \operatorname{cl}\{\xi\}$. Отделимость влечет, что такая точка единственна.

Свойство трезвости является в определенном смысле свойством полноты.

Следующее предложение дает важнейшую характеризацию трезвых пространств.

Предложение 1. *Пусть $\langle X, T\rangle$ — произвольное топологическое пространство, $\langle Y, T'\rangle$ трезвое. Если $\varphi : T' \to T$ — гомоморфизм решеток, сохраняющий наименьший и наибольший элементы и любые супремумы, то существует единственное непрерывное отображение $f : X \to Y$ такое, что $\varphi = f^*$.*

Пусть $\xi \in X$; полагаем $F_\xi \rightleftharpoons \cap\{Y \setminus U' \mid U' \in T',\ \xi \notin \varphi(U')\}$. Заметим, что если $U'_\xi \rightleftharpoons \cup\{U' \mid U' \in T,\ \xi \notin \varphi(U')\}$, то $F_\xi = Y \setminus U'_\xi$. Заметим также, что U'_ξ является наибольшим элементом T' таким, что $\xi \notin \varphi(U'_\xi)$. Достаточно проверить, что $\xi \notin \varphi(U'_\xi)$. Отметим, что $\varphi(U'_\xi) = \bigcup\{\varphi(U') \mid U' \in T,\ \xi \notin \varphi(U')\}$ по условию на φ, откуда $\xi \notin \varphi(U'_\xi)$. Отсюда следует, что F_ξ неприводимо. Действительно, пусть $U', V' \in T'$ таковы, что $U' \cap F_\xi \neq \varnothing$, $V' \cap F_\xi \neq \varnothing$. Но условие $U' \cap F_\xi \neq \varnothing$ равносильно тому, что $U' \not\subseteq U'_\xi$ и $\xi \in \varphi(U')$. Аналогично $\xi \in \varphi(V')$; но тогда

$$\xi \in \varphi(U') \cap \varphi(V') = \varphi(U' \cap V'), \quad U' \cap V' \not\subseteq U'_\xi, \quad (U' \cap V') \cap F_\xi \neq \varnothing.$$

Итак, F_ξ неприводимо. Условие трезвости влечет существование (единственной) точки $\eta \in Y$ такой, что $F_\xi = \mathrm{cl}\{\eta\}$. Полагаем $f(\xi) \rightleftharpoons \eta$. Отметим, что из определения следуют такие эквивалентности: для любого $U' \in T'$

$$f(\xi) \in U' \Longleftrightarrow \eta \in U' \Longleftrightarrow U' \cap F_\xi \neq \varnothing \Longleftrightarrow U' \nsubseteq U'_\xi \Longleftrightarrow \xi \in \varphi(U').$$

Отсюда $f^{-1}(U') = \varphi(U')$ для любого $U' \in T'$, что влечет и непрерывность f, и соотношение $\varphi = f^*$. Единственность очевидна. $\square$

Следствие. *Если $\langle X, T\rangle$, $\langle Y, T'\rangle$ — трезвые топологические пространства, а T и T' изоморфны как решетки, то X и Y гомеоморфны.* $\square$

Предложение 1 «идеологически» очень важно, так как показывает, что непрерывные отображения (между трезвыми пространствами) могут быть охарактеризованы чисто алгебраически. Это предложение может быть получено как следствие теоремы 4.17 из [3] (см. также гл. V-4 в [2]), однако несложное прямое его доказательство безусловно поучительно. (Заметим, что в [3] трезвые пространства называются спектральными!)

Для полноты обсуждения трезвых пространств укажем простой способ «отрезвления» (sobrification) произвольного отделимого топологического пространства $\langle X, T\rangle$. Пусть I_X — семейство всех непустых замкнутых неприводимых подмножеств $X (I_X \supseteq \{\mathrm{cl}\{\xi\} \mid \xi \in X\})$. Для $U \in T$ пусть $U^* \rightleftharpoons \{F \mid F \in I_X,\ F \cap U \neq \varnothing\}$. Тогда

$$T^* \rightleftharpoons \{U^* \mid U \in T\} \text{ — \textit{топология на} } I_X, \quad \langle I_X, T^*\rangle \text{ — \textit{трезвое пространство;}}$$

$$U \mapsto U^*,\ U \in T, \text{— \textit{изоморфизм решеток} } \langle T, \cup, \cap\rangle \text{ \textit{и} } \langle T^*, \cup, \cap\rangle;$$

$$\xi \mapsto \mathrm{cl}\{\xi\},\ \xi \in X, \text{ — \textit{гомеоморфное вложение} } \langle X, T\rangle \text{ \textit{в} } \langle I_X, T^*\rangle.$$

Справедливость этого утверждения устанавливается несложной проверкой.

Для конечного топологического пространства $\langle X, T\rangle$ (множество X конечно) трезвость и отделимость эквивалентны, и для отделимого конечного топологического пространства $\langle X, T\rangle$ топология T восстанавливается однозначно по порядку специализации $\leq_T$. А именно, $Y \subseteq X$ является *открытым* тогда и только тогда, когда $Y = \uparrow Y \rightleftharpoons \{\xi \mid \xi \in X,\ \exists \eta \in Y (\eta \leq_T \xi)\}$.

Топологическое пространство назовем *спектральным*, если оно является трезвым, компактным и его компактные открытые множества образуют мультипликативный базис топологии.

Одним из источников появления спектральных пространств является конструкция спектра кольца.

Пусть R — коммутативное кольцо (с единицей); на множестве $\mathrm{Spec}\, R$ всех простых идеалов *спектральная* топология (или топология *Зарисского*) задается базисом открытых множеств вида $X_r \rightleftharpoons \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R,\ r \notin \mathfrak{p}\}$, $r \in R$ (см. [4]); через $\mathbb{S}\mathrm{pec}\, R$ будем обозначать соответствующее топологическое пространство.

Мультипликативный ($X_{r_0} \cap X_{r_1} = X_{r_0 r_1}$) базис X_r, $r \in R$, спектральной топологии состоит из всех компактных открытых множеств пространства $\mathbb{S}\mathrm{pec}\, R$ (см. [4, 5]).

Замечание. Полезно заметить, что порядок специализации $\leq_\sigma$ спектральной топологии на $\mathrm{Spec}\, R$ является обратным к отношению включения: для $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1 \in \mathrm{Spec}\, R$ ($\mathfrak{p}_0 \leq_\sigma \mathfrak{p}_1 \Longleftrightarrow \mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_0$).

Если $\varphi : R \to R'$ — гомоморфизм колец (сохраняющий единицы), $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}\, R'$, то $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$ является простым идеалом $R \in \mathrm{Spec}\, R$ и отображение φ^* :

$\mathrm{Spec}\,R' \to \mathrm{Spec}\,R$, определенное так: $\varphi^*(\mathfrak{p}') \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$, $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}\,R'$, является непрерывным отображением топологического пространства $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R'$ в топологическое пространство $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R$.

Таким образом, соответствие $R \mapsto \mathbb{S}\mathrm{pec}\,R$ является (контравариантным) функтором из категории $\mathscr{R}$ колец (коммутативных с единицей) в категорию $\mathscr{T}$ топологических пространств.

Отметим ряд свойств функтора $\mathbb{S}\mathrm{pec}$.

1. *Пусть $\varphi : R_0 \to R_1$ — эпиморфизм колец, тогда непрерывное отображение $\varphi^*(= \mathbb{S}\mathrm{pec}\,\varphi) : \mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_1 \to \mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_0$ является гомеоморфным вложением пространства $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_1$ на замкнутое подпространство пространства $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_0$.*

См. [4, гл. 1, упражнение 21(IV)]. $\square$

2. *Если $R = R_0 \times R_1$ — прямое произведение колец R_0 и R_1, то $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R = p_0^*\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_0 \,\dot{\cup} p_1^*\,\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_1$, где $p_i : R \to R_i$, $i = 0, 1$, — проекции.*

См. [4, гл. 1, упражнение 22] . $\square$

Пусть $\varphi_i : R_i \to R$, $i = 0, 1$, — эпиморфизмы колец, $\overline{R}$ — расслоенное произведение колец R_0 и R_1 над R, т. е. $\overline{R}$ — подкольцо прямого произведения $R_0 \times R_1$, состоящее из таких элементов (r_0, r_1), что $\varphi_0 r_0 = \varphi_1 r_1$. Ограничения проекций p_i, $i = 0, 1$, на $\overline{R}$ (обозначаемые так же) будут эпиморфизмами $\overline{R}$ на R_0 и R_1. Справедливо следующее свойство.

3. $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,\overline{R}$ *гомеоморфен пространству $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_0 \cup_{\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R} \mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_1$, где $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R$ отождествляется с подпространствами $\varphi_0^*\,\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R$ и $\varphi_1^*\,\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R$ пространств $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_0$ и $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_1$.*

Это, по существу, означает, что $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,\overline{R} = p_0^*\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_0 \cup p_0^*\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_1$ и

$$p_0^*\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_0 \cap p_1^*\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_0 = (\varphi_0 p_0)^*\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R \ (= (\varphi_1 p_1)^*\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R).$$

Пусть $\mathfrak{p} \in \mathbb{S}\mathrm{pec}\,\overline{R}$. Так как $\mathrm{Ker}\,p_0 \cap \mathrm{Ker}\,p_1 = \{0\} \leq \mathfrak{p}$, по предложению 1.11 из [4] $\mathrm{Ker}\,p_0 \leq \mathfrak{p}$ или $\mathrm{Ker}\,p_1 \leq \mathfrak{p}$. Отсюда $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,\overline{R} = p_0^*\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_0 \cup p_1^*\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_1$. Пусть $\mathfrak{p} \geq p_0^*\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_0 \cap p_1^*\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_1$. Установим, что $\mathrm{Ker}\,p_0 + \mathrm{Ker}\,p_1 = \mathrm{Ker}\,\varphi_0 p_0$. Пусть $(r_0, r_1) \in \mathrm{Ker}\,p_1$. Это означает, что $r_1 (= p_1(r_0, r_1)) = 0$, но $\varphi_0 r_0 = \varphi_1 r_1 = 0$. Тогда $r_0 \in \mathrm{Ker}\,p_0$ и $\varphi_0 p_0(r_0, r_1) = \varphi_0 r_0$, $(r_0, r_1) \in \mathrm{Ker}\,\varphi_0 p_0$. Итак, $\mathrm{Ker}\,p_1 \leq \mathrm{Ker}\,\varphi_0 p_0$. Вместе с очевидным включением $\mathrm{Ker}\,p_0 \leq \mathrm{Ker}\,\varphi_0 p_0$ имеем $\mathrm{Ker}\,p_0 + \mathrm{Ker}\,p_1 \leq \mathrm{Ker}\,\varphi_0 p_0$. Пусть $(r_0, r_1) \in \mathrm{Ker}\,\varphi_0 p_0$, т. е. $\varphi_0 r_0 (= \varphi_0 p_0(r_0, r_1)) = 0$. Тогда $(r_0, 0) \in \overline{R}$ и $(r_0, 0) \in \mathrm{Ker}\,p_1$. Имеем также $\varphi_1 r_1 = \varphi_0 r_0 = 0$, $(0, r_1) \in \overline{R}$ и $(0, r_1) \in \mathrm{Ker}\,p_0$. Так как $(r_0, r_1) = (r_0, 0) + (0, r_1)$, то $(r_1, r_1) \in \mathrm{Ker}\,p_0 + \mathrm{Ker}\,p_1$ и $\mathrm{Ker}\,\varphi_0 p_0 \leq \mathrm{Ker}\,p_0 + \mathrm{Ker}\,p_1$, $\mathrm{Ker}\,\varphi_0 p_0 = \mathrm{Ker}\,p_0 + \mathrm{Ker}\,p_1$.

Установленное равенство идеалов влечет и нужное соотношение $p_0^*\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_0 \cap p_1^*\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_1 = (\varphi_0 p_0)^*\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R$. $\square$

Справедливо еще следующее (важное для дальнейшего) свойство функтора $\mathbb{S}\mathrm{pec}$:

4. *Пусть $\langle R_i, \lambda_{ij} \mid i \leq j \in I\rangle$ — прямой спектр коммутативных колец, $R \rightleftharpoons \varinjlim R_i$, тогда ($\langle \mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_i, \lambda_{ij}^* \mid i \leq j \in I\rangle$ — обратный спектр топологических пространств и) пространство $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R$ гомеоморфно обратному пределу $\varprojlim \mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_i$.*

См. [5, гл. 2, упражнение 21(4)]. $\square$

Следующая теорема характеризует топологические пространства вида $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R$.

Теорема Хокстера [1]. *Топологическое пространство гомеоморфно пространству вида* $\mathbb{S}\mathrm{pec}\, R$ *тогда и тогда, когда оно является спектральным.*

То, что пространство $\mathbb{S}\mathrm{pec}\, R$ является спектральным, по существу, содержится в результатах, отмеченных в классических книгах (§ 4 (и упражнения) гл. 2 в [5], упражнения к гл. 1 в [4]). Трудность представляет обратное утверждение.

Понятие стоуновского пространства дистрибутивной решетки появилось раньше [6], чем понятие спектра коммутативного кольца, и оно, безусловно, явилось идейной основой для последнего.

Соответствующие определения и теоремы можно найти в [7, гл. 2, § 5]. Там теорема Стоуна распространена на дистрибутивные полурешетки с нулем. Сделаем несколько замечаний по этому поводу.

Пусть L $(= \langle L, \vee\rangle)$ — дистрибутивная полурешетка (с нулем), $\mathfrak{s}(L)$ — множество всех простых идеалов L, тогда *стоуновская топология* T_{St} $(= T_{St}(L))$ задается предбазисом (на самом деле базисом) множеств вида $r(a) \rightleftharpoons \{P \mid P \in \mathfrak{s}(L), a \notin P\}$, $a \in L$. Лемма 4 в [7, гл 2] показывает, что множества вида $r(a)$, $a \in L$, — это в точности все компактные открытые множества в T_{St}, а отображение $a \mapsto r(a)$, $a \in L$, есть изоморфизм полурешетки $\langle L, \vee\rangle$ и полурешетки $\langle C(T_{St}), \cup\rangle$, где $C(T_{St})$ — это подполурешетка всех компактных элементов решетки $\langle T_{St}, \cup, \cap\rangle$. Отсюда следует, что $\langle T_{St}, \cup, \cap\rangle$ является алгебраической решеткой (см. [7, гл. 2, § 3]). Замечание после леммы 6 из [7, гл. 2] показывает (свойство (c)), что стоуновское пространство $\mathfrak{s}(L)$ $(\langle \mathfrak{s}(L), T_{St}\rangle)$ является трезвым.

Теперь можно уточнить теорему 8 из [7, гл. 2].

Теорема. *Топологическое пространство* $\langle X, T\rangle$ *гомеоморфно стоуновскому пространству* $\mathfrak{s}(L)$ *подходящей дистрибутивной полурешетки с нулем тогда и только тогда, когда*

(S1) $\langle X, T\rangle$ — *отделимое пространство, в котором открытые компактные подмножества образуют базис открытых множеств,*

(c) $\langle X, T\rangle$ *трезвое.*

Укажем, как просто можно установить достаточность в этой теореме. Пусть $\langle X, T\rangle$ — трезвое топологическое пространство такое, что семейство $C(T)$ компактных элементов из T образует базис T. Тогда решетка $\langle T, \cup, \cap\rangle$ алгебраическая. Полурешетка $\langle C(T), \cup\rangle$ является дистрибутивной с нулем. Тогда стоуновская топология $T_{St}(C(T))$ этой полурешетки — алгебраическая решетка с подполурешеткой компактных элементов, изоморфной $C(T)$.

Доказательство теоремы 13 из [7, гл. 2, § 3] позволяет переформулировать одну ее часть в следующей более точной форме: *если* L — *алгебраическая решетка, то она изоморфна решетке всех идеалов полурешетки* $\langle C(L), \vee\rangle$ *ее компактных элементов.*

Очевидно следствие этого утверждения: *если алгебраические решетки* L_0 *и* L_1 *имеют изоморфные подполурешетки компактных элементов* $(\langle C(L_0), \vee\rangle \simeq \langle C(L_1), \vee\rangle)$, *то они изоморфны.*

Применим последнее утверждение к алгебраическим решеткам $\langle T, \cup, \cap\rangle$ и $\langle T_{St}(C(T)), \cup, \cap\rangle$. Изоморфизм этих решеток вместе со следствием из предложения 1 влечет гомеоморфизм пространств $\langle X, T\rangle$ и $\langle \mathfrak{s}(C(T)), T_{St}(C(T))\rangle$.

Если L — дистрибутивная решетка с нулем и единицей, то стоуновское пространство $\mathfrak{s}(L)$ является спектральным. Если $\langle X, T\rangle$ — спектральное пространство, то $C(T)$ — дистрибутивная решетка с нулем и единицей (и $\langle X, T\rangle \simeq \mathfrak{s}(C(T))$).

В работе [8] автор предложил определение пространства $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,\mathbb{S}$ для любой полутопологической полурешетки $\mathbb{S} = \langle S, \vee, T\rangle$. Если $\langle S, \vee\rangle$ — дистрибутивная полурешетка, а T — дискретная топология на S, то $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,\mathbb{S}$ совпадает со стоуновским пространством $\mathfrak{s}(S)$. Пространство $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,\mathbb{S}$ является трезвым всегда, когда $\langle S, \vee\rangle$ содержит нуль (замечание после теоремы $1'$ в [8]).

Конструкция $\mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}\mathrm{pec}\,\mathbb{S}$ не является, вообще говоря, функтором из категории полутопологических полурешеток в категорию топологических пространств. Если же рассмотреть категорию $\mathfrak{d}_{\perp\top}$ (дискретных) дистрибутивных решеток с нулем ($\perp$) и единицей ($\top$) и гомоморфизмом решеток, сохраняющим $\perp$ и $\top$, то эта конструкция становится (контравариантным) функтором. Справедливо следующее (без труда проверяемое) важное свойство этого функтора:

если $\langle D_i, \lambda_{ij} \mid i \leq j \in I\rangle$ — прямой спектр в категории $\mathfrak{d}_{\perp\top}$, $D = \varinjlim D_i$ — его предел, то пространство $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,D$ естественно гомеоморфно пределу $\varprojlim \mathbb{S}\mathrm{pec}\,D_i$ обратного спектра $\langle \mathbb{S}\mathrm{pec}\,D_i,\ \mathbb{S}\mathrm{pec}\,\lambda_{ij} \mid i \leq j \in I\rangle$.

Так как всякая дистрибутивная решетка D (с $\perp$ и $\top$) изоморфна прямому пределу своих конечных подрешеток (с $\perp$ и $\top$), из этого свойства получаем следствие:

всякое спектральное пространство (гомеоморфное $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,D$ для подходящего $D \in \mathfrak{d}_{\perp,\top}$) гомеоморфно обратному пределу спектра конечных (отделимых) топологических пространств.

Нетрудно проверить, что справедливо обратное утверждение:

предел обратного спектра конечных отделимых топологических пространств является спектральным пространством.

В оставшейся части статьи будет построен функтор $\rho : D \mapsto R_D$ из категории $\mathfrak{d}^i_\top$ всех дистрибутивных решеток с $\perp$ и $\top$ с вложениями, сохраняющими $\perp$ и $\top$, в качестве морфизмов в категорию $\mathscr{R}^i$ коммутативных колец с вложениями, сохраняющими 1, в качестве морфизмов такой, что пространства $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,D$ и $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,R_D$ гомеоморфны.

Следствием этого будет и теорема Хокстера.

2. Конструкция

Пусть k — произвольное поле, $k(X)$ — чисто трансцендентное расширение поля k с базисом трансцендентности X.

Для подмножества $Y \subseteq X$ через Y^* обозначим множество $\{\eta_0\eta_1^{-1} \mid \eta_0, \eta_1 \in Y\}$. Заметим, что $k(Y^*)$ — чисто трансцендентное расширение k такое, что $k(Y^*) = k$, если $|Y| \leq 1$, и если $|Y| \geq 2$ и $\eta \in Y$, то $k(Y^*)$ имеет в качестве базиса трансцендентности над k множество $\{\eta_0\eta^{-1} \mid \eta_0 \in Y \setminus \{\eta\}\}$.

Для $Y \subseteq X$ определим кольцо нормирования R_Y $\left(= R_Y^X\right)$ поля $k(X)$ так:

если $Y = X$, то $R_Y \rightleftharpoons k(Y) = k(X)$ — несобственное кольцо нормирования;

если $Y \neq X$ и $\xi \in X \setminus Y$, то R_Y — локализация кольца многочленов $k(Y, (X \setminus Y)^*)[\xi]$ над полем $k(Y, (X \setminus Y)^*)$ от ξ относительно максимального идеала $\xi k(Y, (X \setminus Y)^*)[\xi]$.

Заметим, что определение кольца R_Y не зависит от выбора элемента $\xi \in X \setminus Y$.

В случае $Y \neq X$ R_Y — кольцо дискретного нормирования поля $k(X)$ с полем вычетов, изоморфным $k(Y, (X \setminus Y)^*)$. Если $v_{R_Y} : k(X)^* \to Z$ — соответствующее нормирование, то $v_{R_Y}(\eta) = 0$ для $\eta \in Y$ и $v_{R_Y}(\xi) = 1$ для $\xi \in X \setminus Y$.

Через π_Y обозначим естественный эпиморфизм $R_Y \to k(Y, (X \setminus Y)^*)$ на поле, изоморфное полю вычетов; $\mathfrak{m}(R_Y)$ — единственный максимальный идеал R_Y — является ядром этого гомоморфизма.

Если Y_0, Y_1 — собственные подмножества X и $Y_0 \neq Y_1$, то R_{Y_0} и R_{Y_1} — не сравнимые по включению кольца (дискретного) нормирования поля $k(X)$. Действительно, если $\eta \in Y_0 \setminus Y_1$, $\xi \in X \setminus Y_0$, то $v_{R_{Y_0}}(\eta) = 0$, $v_{R_{Y_0}}(\eta) = 1$, $v_{R_{Y_0}}(\xi) = 1$, $v_{R_{Y_0}}(\xi^{-1}) \in \{0, -1\}$ и $\eta^{-1} \in R_{Y_0}$, $\eta^{-1} \notin R_{Y_1}$; $\eta\xi^{-1} \notin R_{Y_0}$, $\eta\xi^{-1} \in R_{Y_1}$.

Предложение 2. *Пусть $S \rightleftharpoons \{Y_0, \dots, Y_n\}$ — семейство попарно различных собственных подмножеств X, $R_S \rightleftharpoons \bigcap\limits_{i \le n} R_{Y_i}$,*

$$\pi_S : R_S \to \prod_{i \le n} k(Y_i, (X \setminus Y_i)^*)$$

— гомоморфизм, определенный эпиморфизмами π_{Y_i} (и включениями $R_S \le R_{Y_i}$), $i \le n$. Тогда $\operatorname{Ker} \pi_S = \bigcap\limits_{i \le n} \mathfrak{m}(R_{Y_i})$ — радикал Джекобсона кольца R_S и π_S является эпиморфизмом.

Это следует из [5, гл. 6, § 7, предложение 2]. □

Установим еще одно нужное для дальнейшего свойство кольца R_S, определенного в предложении 2.

Предложение 3. *Пусть $R \le R_S$ — подкольцо кольца R_S, содержащее радикал Джекобсона $J(R_S)$ кольца R_S. Если $\mathfrak{p}$ — ненулевой простой идеал кольца R, то $J(R_S) \le \mathfrak{p}$.*

Предположим противное, и пусть $a \in J(R_S) \setminus \mathfrak{p}$. Выберем ненулевой элемент b в $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p} \neq \{0\}$!). Пусть $n_i \rightleftharpoons v_{R_{Y_i}}(b)$, $i \le n$; $N \rightleftharpoons \max\limits_{i \le n} n_i$. Так как $v_{R_{Y_i}}(a) \ge 1$ для всех $i \le n$ ($a \in J(R_S) = \bigcap\limits_{i \le n} \mathfrak{m}(R_{Y_i})$), то

$$b^{-1} a^{N+1} \in J(R_S) \le R, \quad a^{N+1} = b(b^{-1} a^{N+1}) \in \mathfrak{p}.$$

Тогда $a \in \mathfrak{p}$, ибо $\mathfrak{p}$ — простой идеал; противоречие. □

Пусть W — фиксированное непустое конечное семейство подмножеств множества X. Для $Y \in W$ пусть $\downarrow Y \rightleftharpoons \{Z \mid Z \in W,\ Z \subseteq Y\}$; для подсемейства $W_0 \subseteq W$

$$\downarrow W_0 \rightleftharpoons \bigcup \{\downarrow Y \mid Y \in W_0\};$$

семейство $W_0 \subseteq W$ *нижнее*, если $\downarrow W_0 = W_0$.

Пусть $Y \in W$, обозначим через R^Y кольцо

$$(R^Y \rightleftharpoons) k(Y) \cap \bigcap_{Z \in \downarrow Y} R_Z \quad \Big(= \bigcap_{Z \in \downarrow Y} R^Y_Z\Big).$$

Для нижнего семейства $W_0 \subseteq W$ полагаем

$$R_{W_0} \ (= R^Y_{W_0}) \rightleftharpoons \Big\{ f \mid f \in \prod_{Y \in W_0} R^Y,\ \forall Y \in W_0 \forall Z \in \downarrow Y (f(Z) = \pi_Z f(Y)) \Big\}$$

(заметим, что если $Z \in \downarrow Y$, то $R^Y \subseteq R_Z$).

Если $Y \in W_0$, то через $p_Y\big(p_Y^{W_0}\big)$ обозначим проекцию R_{W_0} в R^Y ($p_Y(f) \rightleftharpoons f(Y)$ для $f \in R_{W_0} \leq \prod\limits_{Z \in W_0} R^Z$). Если $Z, Y \in W_0$ и $Z \subseteq Y$, то коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & R_{W_0} \arrow[dl, "p_Y"'] \arrow[dr, "p_Z"] & \\ R^Y \arrow[rr, "\pi_Z \restriction R_Y"'] & & R^Z \end{tikzcd}.$$

Для нижних семейств $W_0 \subseteq W_1$ ($\subseteq W$) естественно определен гомоморфизм ограничения

$$p_{W_1W_0} : R_{W_1} \to R_{W_0}, \quad p_{W_1W_0}(f) \rightleftharpoons f \restriction W_0, \quad f \in R_{W_1}.$$

Заметим, что если $Y \in W_0$, то коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} R_{W_1} \arrow[rr, "p_{W_1W_0}"] \arrow[dr, "p_Y^{W_1}"'] & & R_{W_0} \arrow[dl, "p_Y^{W_0}"] \\ & R^Y & \end{tikzcd}.$$

Установим ряд важных технических утверждений.

Предложение 4. *Пусть $Y \in W$ и $\downarrow Y^- \rightleftharpoons \downarrow Y \setminus \{Y\} \neq \varnothing$, тогда гомоморфизм $p_{\downarrow Y \downarrow Y^-} : R_{\downarrow Y} \to R_{\downarrow Y^-}$ является эпиморфизмом.*

Заметим, что $R^Y = \bigcap\limits_{Z \in \downarrow Y^-} R_Z^Y$. Так как кольца дискретного нормирования R_Z^Y, $Z \in \downarrow Y^-$ поля $k(Y)$ не сравнимы по включению, то фактор-кольцо $R^Y/J(R^Y)$ кольца R^Y по радикалу Джекобсона $J(R^Y)$ этого кольца изоморфно $\prod\limits_{Z \in \downarrow Y^-} k(Z, (Y \setminus Z)^*)$ (предложение 2).

Пусть

$$\bar{\pi}_Y : R^Y \to \prod_{Z \in \downarrow Y^-} k(Z, (Y \setminus Z)^*)$$

— соответствующий эпиморфизм. Заметим, что для $Z \in \downarrow Y^-$ и $r \in R^Y$ имеет место равенство $p_Z \bar{\pi}_Y(r) = \pi_Z(r)$.

Имеют место естественные вложения

$$R_{\downarrow Y^-} \leq \prod_{Z \in \downarrow Y^-} R^Z \leq \prod_{Z \in \downarrow Y^-} k(Z) \leq \prod_{Z \in \downarrow Y^-} k(Z, (Y \setminus Z)^*).$$

Полагаем $\overline{R}^Y \rightleftharpoons \bar{\pi}_Y^{-1}(R_{\downarrow Y^-})$; имеем $J(R^Y) \leq \overline{R}^Y \leq R^Y$. Определим гомоморфизм $\varphi_Y : r \mapsto f_r$ из $\overline{R}^Y$ в $\prod\limits_{Z \in \downarrow Y} R^Z$ так:

$$f_r(Y) \rightleftharpoons r; \quad f_r(Z) \rightleftharpoons p_Z^{\downarrow Y^-} \bar{\pi}_Y(r), \quad Z \in \downarrow Y^-.$$

Проверим, что $f_r \in R_{\downarrow Y}$ для любого $r \in \overline{R}^Y$. Пусть $Z \in \downarrow Y^-$; тогда

$$f_r(Z) = p_Z \bar{\pi}_Y(r) = \pi_Z(r) = \pi_Z f_r(Y).$$

Пусть $Z_0, Z_1 \in \downarrow Y^-$ и $Z_0 \subseteq Z_1$; тогда

$$f_r(Z_0) = p_{Z_0} \bar{\pi}_Y(r) = \pi_{Z_0} p_{Z_1} \bar{\pi}_Y(r) = \pi_{Z_0} f_r(Z_1)$$

(равенство $p_{Z_0}\bar{\pi}_Y(r) = \pi_{Z_0}p_{Z_1}\bar{\pi}_Y(r)$ имеет место потому, что $\bar{\pi}_Y(r) \in R_{\downarrow Y^-}$). Итак, гомоморфизм $\varphi_Y : r \mapsto f_r$ является гомоморфизмом (вложением) из $\overline{R}^Y$ в $R_{\downarrow Y}$. Проверим, что φ_Y является изоморфизмом. Пусть $f \in R_{\downarrow Y}$, $r \rightleftharpoons f(Y)$; тогда для любого $Z \in \downarrow Y$

$$f(Z) = \pi_Z f(Y) = \pi_Z(r) = p_Z\bar{\pi}_Y(r) = f_r(Z).$$

Отсюда получаем, что $f = f_r$. Рассмотрение коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \overline{R}^Y \arrow[rr, "\varphi_Y"] \arrow[dr, "\bar{\pi}_Y"'] & & R_{\downarrow Y} \arrow[dl, "p_{\downarrow Y \downarrow Y^-}"] \\ & R_{\downarrow Y^-} & \end{tikzcd}$$

показывает, что $p_{\downarrow Y \downarrow Y^-}$ — эпиморфизм, так как из определения $\overline{R}^Y$ следует, что $\bar{\pi}_Y$ — эпиморфизм. $\square$

Следствие. $R_{\downarrow Y} \simeq \overline{R}^Y$, $J(R^Y) \leq \overline{R}^Y \leq R^Y$, $R_{\downarrow Y^-} \simeq \overline{R}^Y/J(R^Y)$.

Вытекает из доказательства предложения 4. $\square$

Предложение 5. *Пусть W_0 и W_1 — не сравнимые по включению нижние подсемейства W; $W_* \rightleftharpoons W_0 \cap W_1$. Если $W_* \neq \varnothing$, то кольцо $R_{W_0 \cup W_1}$ естественно изоморфно кольцу $R_{W_0} \times_{R_{W_*}} R_{W_1}$; если $W_* = \varnothing$, то $R_{W_0 \cup W_1} \simeq R_{W_0} \times R_{W_1}$.*

Рассмотрим случай $W_* \neq \varnothing$. Заметим, что тогда W_* — непустое нижнее семейство. Пусть $f_0 \in R_{W_0}$, $f_1 \in R_{W_1}$ и $\langle f_0, f_1\rangle \in R_{W_0} \times_{R_{W_*}} R_{W_1}$, т. е.

$$\pi_{W_0 W_*} f_0 = f_0 \restriction W_* = \pi_{W_1 W_*} f_1 = f_1 \restriction W_*.$$

Тогда однозначно определен элемент $f_0 \cup f_1 \in \prod\limits_{Y \in W_0 \cup W_1} R^Y$ такой, что

$$(f_0 \cup f_1) \restriction W_0 = f_0, \quad (f_0 \cup f_1) \restriction W_1 = f_1.$$

Тривиальная проверка показывает, что $f_0 \cup f_1 \in R_{W_0 \cup W_1}$. Таким образом определено вложение $\langle f_0, f_1\rangle \mapsto f_0 \cup f_1$ из $R_{W_0} \times_{R_{W_*}} R_{W_1}$ в $R_{W_0 \cup W_1}$. Обратным является отображение: $f \mapsto \langle f \restriction W_0, f \restriction W_1\rangle$, $f \in R_{W_0 \cup W_1}$. Следовательно, $R_{W_0 \cup W_1}$ и $R_{W_0} \times_{R_{W_*}} R_{W_1}$ естественно изоморфны.

Случай, когда $W_* = \varnothing$, рассматривается аналогично (проще). $\square$

Следствие. *Если $W_* \neq \varnothing$, а гомоморфизмы $p_{W_i W_*}$ являются эпиморфизмами, $i = 0, 1$, то и гомоморфизмы $p_{W_0 \cup W_1, W_i}$, $i = 0, 1$, — эпиморфизмы. Если $W_* = \varnothing$, то гомоморфизмы $p_{W_0 \cup W_1, W_i}$, $i = 0, 1$, являются эпиморфизмами.* $\square$

Предложение 6. *Если $\varnothing \neq W_0 \subseteq W_1$ — нижние подсемейства, то гомоморфизм $p_{W_1 W_0} : R_{W_1} \to R_{W_0}$ является эпиморфизмом.*

Доказательство проводится индукцией по числу элементов $|W_1|$ семейства W_1. Если $|W_1| = 1$, то $W_0 = W_1$, и доказывать нечего.

Пусть теорема справедлива для всех семейств $W_0 \subseteq W_1$ таких, что $|W_1| \leq n$.

Пусть $W_0 \subseteq W_1$ и $|W_1| = n+1$. Не уменьшая общности, будем предполагать, что $W_0 \neq W_1$.

Возможны два случая.

Случай 1. W_1 имеет наибольший (по включению) элемент Y.

Тогда $W_1 = \downarrow Y$, $W_0 \subseteq \downarrow Y^- \subset \downarrow Y$ и $|\downarrow Y^-| = n$. Индукционное предположение и предложение 4 устанавливают, что $p_{W_1 W_0}$ является эпиморфизмом.

Случай 2. W_1 имеет более одного максимального по включению элемента.

Пусть Y — один из максимальных элементов $\langle W_1, \subseteq \rangle$ такой, что $Y \in W_1 \backslash W_0$. Тогда, полагая $W' \rightleftharpoons \downarrow Y$, $W' \rightleftharpoons W_1 \setminus \{Y\}$, будем иметь $|W'| \leq n$, $|W''| = n$, $W_0 \subseteq W''$. Индукционное предположение и следствие к предложению 5 показывают, что $p_{W_1 W''} = p_{W' \cup W'' W''}$ и $p_{W'' W_0}$ — эпиморфизмы, следовательно, и $p_{W_1 W_0} = p_{W'' W_0} p_{W_1 W''}$ — эпиморфизм. $\square$

Установим теперь одну из основных теорем.

Теорема 1. *Пусть W_0 — непустое нижнее семейство. Отображение*

$$\varepsilon\ (= \varepsilon^{W_0}) : Y \mapsto \operatorname{Ker} p_Y^{(W_0)}, \quad Y \in W_0,$$

является дуальным изоморфизмом упорядоченных (по включению) множеств $\langle W_0, \subseteq \rangle$ и $\langle \operatorname{Spec} R_{W_0}, \subseteq \rangle$.

Заметим сначала, что для любого $Y \in W_0$ кольцо $R^Y \subseteq k(Y)$ целостное, следовательно, ядро $\operatorname{Ker} p_Y$ гомоморфизма $p_Y : R_{W_0} \to R^Y$ является простым идеалом кольца $R_{W_0}(\operatorname{Ker} p_Y \in \operatorname{Spec} R_{W_0})$. Если $Y, Z \in W_0$ и $Z \subseteq Y$, то отмеченная выше коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & R_{W_0} \arrow[dl, "p_Y"'] \arrow[dr, "p_Z"] & \\
R^Y \arrow[rr, "\pi_Z \upharpoonright R^Y"'] & & R^Z
\end{tikzcd}$$

показывает, что $\operatorname{Ker} p_Y \subseteq \operatorname{Ker} p_Z$ $(\operatorname{Ker} p_Z \supseteq \operatorname{Ker} p_Y)$.

Если $W_0 \subseteq W_1$ — нижние семейства, $Y \in W_0$, то коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
R_{W_1} \arrow[rr, "p_{W_1 W_0}"] \arrow[dr, "p_Y^{W_1}"'] & & R_{W_0} \arrow[dl, "p_Y^{W_0}"] \\
 & R^Y &
\end{tikzcd}$$

влечет равенство $p^*_{W_1 W_0} \varepsilon^{W_0}(Y) = \varepsilon^{W_1}(Y)$, где $p^*_{W_1 W_0} : \operatorname{Spec} R_{W_0} \to \operatorname{Spec} R_{W_0}$ — отображение (вложение) спектров, индуцированное эпиморфизмом $p_{W_1 W_0} : R_{W_1} \to R_{W_0}$.

Если «отождествить» $\operatorname{Spec} R_{W_0}$ с $p^*_{W_1 W_0}(\operatorname{Spec} R_{W_0}) \subseteq \operatorname{Spec} R_{W_1}$, то отмеченное выше свойство можно записать так: $\varepsilon^{W_1} \upharpoonright W_0 = \varepsilon^{W_0}$.

Докажем теперь индукцией по числу элементов $|W_0|$ семейства W_0, что отображение ε разнозначно и $\varepsilon(W_0) = \operatorname{Spec} R_{W_0}$.

Пусть W_0 одноэлементно, тогда $R^Y = k(Y)$ — поле, $R_{\{Y\}} = R^Y$ и $\varepsilon(W_0) = \{\{0\}\} = \operatorname{Spec} k(Y) = \operatorname{Spec} k(Y)$. Пусть утверждение установлено для всех нижних семейств мощности $n \geq 1$, и пусть W_0 таково, что $|W_0| = n + 1$.

Случай 1. Семейство W_0 имеет наибольший по включению элемент Y.

Тогда $W_0 = \downarrow Y$ и $\varepsilon(Y) = \operatorname{Ker} p_Y = \{0\}$ по следствию к предложению 2. Пусть $\mathfrak{p} \neq 0 \in \operatorname{Spec} R_{W_0} = \overline{R}^Y$. Тогда по следствию к предложению 2 и предложению 3 имеет место включение $\mathfrak{p} \geq J(R^Y)$. Поэтому

$$\mathfrak{p}/J(R^Y) \in \operatorname{Spec} \overline{R}^Y / J(R^Y); \quad \overline{R}^Y / J(R^Y) \simeq R_{\downarrow Y^-}.$$

Так как $|\downarrow Y^-| = n$, то по индукционному предположению найдется единственный $Z \in \downarrow Y^-$ такой, что $\varepsilon^{\downarrow Y^-}(Z)$ соответствует простому идеалу $\mathfrak{p}/J(R^Y)$ при изоморфизме $R_{\downarrow Y^-} \simeq \overline{R}^Y/J(R^Y)$, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
R_{\downarrow Y}(\simeq \overline{R}^Y) \arrow[r] \arrow[dr, "p_Z^{\downarrow Y}"'] & \overline{R}^Y/J(R^Y) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & R_{\downarrow Y^-} \arrow[dl, "p_Z^{\downarrow Y^-}"] \\
& R^Z &
\end{tikzcd}.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{p} = \varepsilon(Z)$, т. е. $\operatorname{Spec} R_{\downarrow Y} = \varepsilon(W_{\downarrow Y})$. Разнозначность $\varepsilon^{\downarrow Y}$ очевидна.

Случай 2. Семейство W_0 имеет более одного максимального элемента.

Как в доказательстве предложения 6, можно найти собственные нижние подсемейства $W', W'' \subset W_0$ такие, что $W' \cup W'' = W_0$. Тогда в соответствии с предложением 5 $R_{W_0} \simeq R_{W'} \times_{R_{W_*}} R_{W''}$, где $W_* \rightleftharpoons W' \cap W''$ ($R_{W_0} \simeq R_{W'} \times R_{W''}$, если $W' \cap W'' = \varnothing$). Индукционное предположение показывает, что отображения $\varepsilon^{W'} : W' \to \operatorname{Spec} R_{W'}$, $\varepsilon^{W''} : W'' \to \operatorname{Spec} R_{W''}$ являются разнозначными отображениями «на». По предложениям 5, 6 и свойству 3 функтора Spec можно считать, что

$$\operatorname{Spec} R_{W_0} = \operatorname{Spec} R_{W'} \cup_{\operatorname{Spec} R_{W_*}} \operatorname{Spec} R_{W''}.$$

Отмеченное выше свойство $\varepsilon^{W_0} \restriction W' = \varepsilon^{W'}$, $\varepsilon^{W_0} \restriction W'' = \varepsilon^{W''}$ показывает, что ε^{W_0} разнозначно и $\varepsilon^{W_0}(W_0) = \operatorname{Spec} R_{W_0}$.

Итак, установлено, что $\varepsilon^{W_0}(W_0) = \operatorname{Spec} R_{W_0}$.

Покажем теперь, что если $Y, Z \in W_0$ и $Y \not\subseteq Z$, то $\varepsilon^{W_0}(Z) \not\subseteq \varepsilon^{W_0}(Y)$.

Достаточно рассмотреть случай, когда $W_0 = \downarrow Y \cup \downarrow Z$. Так как $Y \notin \downarrow Z$ и Y максимально в W_0, то $\varepsilon^{W_0}(Y)$ минимален в $\operatorname{Spec} R_{W_0}$ и $\varepsilon^{W_0}(Y) \notin \operatorname{Spec} R_{\downarrow Z}$; $\operatorname{Spec} R_{\downarrow Z}$ — верхнее множество в $\langle \operatorname{Spec} R_{W_0}, \subseteq \rangle$ и $\varepsilon(Z) \in \operatorname{Spec} R_{\downarrow Z}$. Отсюда и следует, что $\varepsilon^{W_0}(Z) \not\subseteq \varepsilon^{W_0}(Y)$.

Теорема доказана. $\square$

Следствие. *Для любого конечного частично упорядоченного множества $\langle X, \leq \rangle$ существует кольцо R такое, что частично упорядоченные множества $\langle X, \leq \rangle$ и $\langle \operatorname{Spec} R, \subseteq \rangle$ изоморфны.*

Рассмотрим семейство

$$W \rightleftharpoons \{\uparrow \xi \mid \xi \in X\}, \quad \uparrow \xi \rightleftharpoons \{\xi' \mid \xi' \in X,\ \xi \leq \xi'\}$$

подмножеств X. Тогда соответствие $\xi \mapsto \uparrow \xi$, $\xi \in X$, устанавливает дуальный изоморфизм между $\langle X, \leq \rangle$ и $\langle W, \subseteq \rangle$. Для кольца R_W по теореме 1 имеем: $\langle \operatorname{Spec} R_W, \subseteq \rangle$ дуально изоморфно $\langle W, \subseteq \rangle$, следовательно, $\langle \operatorname{Spec} R_W, \subseteq \rangle$ изоморфно $\langle X, \leq \rangle$. $\square$

Рассмотрим следующее функторное свойство конструкции кольца R_W^X.

Пусть W, как выше, непустое конечное семейство подмножеств множества X; $X' \subseteq X$, $W' \rightleftharpoons W \restriction X'$ $(= \{Y \cap X' \mid Y \in W\})$.

Теорема 2. *Имеется естественно определенное вложение*

$$\mu\ (= \mu_{X',X}) : R_{W'}^{X'} \to R_W^X$$

колец такое, что для любого $Y \in W$ имеет место равенство

$$\mu^* \varepsilon_W^X(Y) = \varepsilon_{W'}^{X''}(Y \cap X').$$

Пусть $Y \in W$, $Y' \rightleftharpoons Y \cap X' \in W'$. Вводя более сложные обозначения

$$R_W^Y \rightleftharpoons k(Y) \cap \bigcap \bigl\{ R_Z^Y \mid Z \subseteq Y, Z \in W \bigr\},$$

$$R_{W'}^{Y'} \rightleftharpoons k(Y') \cap \bigcap \bigl\{ R_{Z'}^{Y'} \mid Z' \subseteq Y', Z' \in W' \bigr\},$$

нетрудно проверить соотношение $R_W^Y \cap k(Y') = R_{W'}^{Y'}$. Это следует из того, что $R_Z^Y \cap k(Y') = R_{Z'}^{Y'}$ для $Z \subseteq Y$. Итак, имеются естественные вложения $\lambda_Y : R_{W'}^{Y'} \to R_W^Y$, $Y \in W$. Если $Z \subseteq Y$, $Z, Y \in W$, $Y' = Y \cap X'$, $Z' = Z \cap X'$, $a \in R_{W'}^{Y'} \leq R_W^Y$, то $\pi_{Z'}(a) = \pi_Z(a)$.

Вложение $\mu : R_{W'}^{X'} \to R_W^X$ определим так: для

$$f' \in R_{W'}^{X'} \leq \prod_{Y' \in W'} R_{W'}^{Y'}, \quad Y \in W,$$

положим

$$\mu(f')(Y) \rightleftharpoons \lambda_Y(f'(Y')).$$

Из отмеченного выше соотношения $\pi_{Z'}(a) = \pi_Z(a)$ для $a \in R_{W'}^{Y'}$ $\bigl(\leq R_W^Y\bigr)$ легко вытекает, что $\mu(f') \in R_W^X$. Очевидная коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} R_{W'}^{X'} & \xrightarrow{\mu} & R_W^X \\ {\scriptstyle p_{Y'}^{W'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_Y^W} \\ R_{W'}^{Y'} & \xrightarrow{\lambda_Y} & R_W^Y \end{array}$$

для $Y \in W$, $Y' = Y \cap X'$ устанавливает равенство $\mu^* \varepsilon_W^X(Y) = \varepsilon_{W'}^{X'}(Y')$.

Теорема доказана. $\square$

Из определения вложения $\mu_{X',X}$ легко следует и соотношение $\mu_{X'',X} = \mu_{X',X}\mu_{X'',X'}$ для $X'' \subseteq X' \subseteq X$.

3. Функтор ρ

Определим функтор ρ сначала на категории $\mathfrak{d}_\varphi$ конечных дистрибутивных решеток с вложениями (сохраняющими $\perp$ и $\top$).

Пусть $D = \langle D, \vee, \wedge, \perp, \top \rangle$ — конечная дистрибутивная решетка, пусть $\Phi(D)$ — семейство всех простых фильтров решетки D; $\Phi(D) \subseteq P(D)$ и $\langle \Phi(D), \subseteq \rangle$ как частично упорядоченное множество дуально изоморфно $\langle \mathrm{Spec}\, D, \subseteq \rangle$ ($\Phi \mapsto D \setminus \Phi$, $\Phi \in \Phi(D)$).

Рассматривая элементы решетки D как трансцендентные элементы над полем k, можно определить кольцо $R_{\Phi(D)}$, взяв в качестве семейства W из предыдущего параграфа семейство $\Phi(D)$. Тогда по теореме 1 имеем дуальный изоморфизм между $\langle \Phi(D), \subseteq \rangle$ и $\langle \mathrm{Spec}\, R_{\Phi(D)}, \subseteq \rangle$, а следовательно, изоморфизм между $\langle \mathrm{Spec}\, D, \subseteq \rangle$ и $\langle \mathrm{Spec}\, R_{\Phi(D)}, \subseteq \rangle$ и гомеоморфизм λ_D между $\mathbb{S}\mathrm{pec}\, D$ и $\mathbb{S}\mathrm{pec}\, R_{\Phi(D)}$.

Пусть $D_0 \subseteq D$ — подрешетка D (содержащая $\perp$ и $\top$). Без труда проверяется, что если $\Phi \in \Phi(D)$, то $\Phi \cap D_0 \in \Phi(D_0)$ и $\Phi(D_0) = \Phi(D) \restriction D_0$. Это замечание позволяет определить вложение $\rho(i_{D_0,D}) \rightleftharpoons \mu_{D_0,D_1} : R_{\Phi(D_0)} \to R_{\Phi(D)}$, и теорема 2 позволяет утверждать, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}\mathrm{pec}\, D & \xrightarrow{\lambda_D} & \mathbb{S}\mathrm{pec}\, R_{\Phi(D)} \\ {\scriptstyle \mathbb{S}\mathrm{pec}\, i_{D_0,D}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathbb{S}\mathrm{pec}\, \mu_{D_0,D}} \\ \mathbb{S}\mathrm{pec}\, D_0 & \xrightarrow{\lambda_{D_0}} & \mathbb{S}\mathrm{pec}\, R_{\Phi(D_0)}, \end{array}$$

где $i_{D_0,D_1} : D_0 \to D$ — вложение.

Упрощая обозначения, будем писать R_D вместо $R_{\Phi(D)}$ для конечной дистрибутивной решетки D.

Пусть D — произвольная дистрибутивная решетка с $\bot, \top$; пусть $P_\omega(D) \rightleftharpoons \{D_0 \mid D_0$ — конечная подрешетка $D, \bot, \top \in D_0\}$; $P_\omega(D)$ вместе с вложениями образует прямой спектр конечных дистрибутивных решеток и D естественно изоморфно его прямому пределу $\varinjlim P_\omega(D)$. Заметим, что тогда система колец $R_{D_0}, D_0 \in P_\omega(D)$, и вложений μ_{D_0,D_1}, $D_0 \subseteq D_1 \in P_\omega(D)$, образует прямой спектр колец. Полагаем $R_D \rightleftharpoons \varinjlim\{R_{D_0};\ D_0 \in P_\omega(D)\}$. Если $D' \subseteq D$ — подрешетка D (содержащая $\bot$ и $\top$), то $P_\omega(D') \subseteq P_\omega(D)$ и имеется естественное вложение $\mu_{D',D} : R_{D'} \to R_D$.

Так функтор $\rho : D \mapsto R_D$ расширяется с категории $\mathfrak{d}_\varphi$ на категорию $\mathfrak{d}^i_{\bot\top}$ всех дистрибутивных решеток с $\bot$ и $\top$ с вложениями, сохраняющими $\bot$ и $\top$ в качестве морфизмов.

Остается заметить, что спектры $\mathbb{S}\mathrm{pec}\, D$ и $\mathbb{S}\mathrm{pec}\, R_D$ гомеоморфны, но это следует из того, что

$$\begin{aligned} \mathbb{S}\mathrm{pec}\, D &\simeq \mathbb{S}\mathrm{pec} \varinjlim_{D_0 \in P_\omega(D)} D_0 \simeq \varprojlim_{D_0 \in P_\omega(D)} \mathbb{S}\mathrm{pec}\, D_0 \\ &\simeq \varprojlim_{D_0 \in P_\omega(D)} \mathbb{S}\mathrm{pec}\, R_{D_0} \simeq \mathbb{S}\mathrm{pec} \varinjlim_{D_0 \in P_\omega(D)} R_{D_0} = \mathbb{S}\mathrm{pec}\, R_{D_0}. \end{aligned}$$

Замечание. На самом деле ρ является функтором из $\mathfrak{v}^i_{\bot\top}$ в более узкую категорию, чем $\mathfrak{R}^i$, — категорию полупростых алгебр над полем k (с единицей и вложениями).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hochster M.* Prime ideal structure in commutative rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 142. P. 43–60.
2. *Gierz G., Hofmann K. N., Keimel K., Lawson J. D., Mislove M. W., Scott D. S.* Continious lattices and domains. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
3. *Hofmann K. H., Keimel K.* A general character theory for partially ordered sets and lattices. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1972. (Mem. Amer. Math. Soc.; 122).
4. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.
5. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
6. *Stone M.* Topological representations of distributive lattices and Bronwerian logics // Časopis Pest. Mat. 1937. V. 67. P. 1–25.
7. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
8. *Ершов Ю. Л.* Спектральная теория полутопологических полурешеток // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 1021–1032.

Статья поступила 8 декабря 2004 г.

Ершов Юрий Леонидович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
ershov@math.nsc.ru