

УДК 517.957

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА СОБОЛЕВА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников

Аннотация: Рассматривается начально-краевая задача для нелинейного волнового диссипативного уравнения типа Соболева с нелокальным кубическим источником. Для данной задачи получены достаточные условия разрушения сильного обобщенного решения. Кроме того, получены двусторонние оценки на время разрушения решения.

Ключевые слова: псевдопараболические уравнения, разрушение, двойная нелинейность, нелокальная нелинейность.

1. Введение. Постановка задачи

Целью настоящего исследования является получение достаточных условий разрушения решения следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u - |u|^q u) + \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} - \Delta u \int_{\Omega} dx |\nabla u|^2 = 0, \quad (1.1)$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, причем Ω — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in C^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0, 1]$, $q > 0$.

Данная задача является математической моделью волновых процессов в полупроводниках во внешнем электрическом поле при учете диссипации и нелокальной связи плотности тока с напряженностью электрического поля [1, 2].

В последнее время в математической физике стали интенсивно рассматриваться новые сильно нелинейные волновые диссипативные уравнения псевдопараболического типа [1, 2]. При этом модельные уравнения оказываются либо третьего, либо пятого порядка с производной по времени первого порядка. Ранее нами в работах [3–5] изучены разнообразные классы сильно нелинейных уравнений типа Соболева. Однако случай нелокального источника в волновом диссипативном уравнении псевдопараболического типа рассмотрен не был.

Уравнениям псевдопараболического типа и типа Соболева посвящено большое количество работ. Прежде всего отметим классическую работу С. Л. Соболева [6]. По поводу дальнейших результатов по исследованию линейных уравнений типа Соболева см. работы [7, 8] и библиографию в них. Отметим также работу [9], где предложен операторный метод исследования линейных уравнений типа Соболева высокого порядка. В работе [10] предложен метод полугрупп

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–00253, 02–01–06038) и гранта от проекта «Молодые ученые России».

с нетривиальными ядрами, который был успешно применен в изучении разнообразных задач для нелинейных псевдопараболических уравнений.

Вопросам разрушения решений квазилинейных диссипативных «не волновых» уравнений с источниками посвящена классическая работа [8]. В ней предложен оригинальный энергетический метод исследования разрушения решений уравнений формально параболического вида

$$\mathbb{P}u_t = -\mathbb{A}u + \mathbb{F}(u), \quad (1.2)$$

в котором существенно использовались линейность и позитивность операторов \mathbb{P} и \mathbb{A} , определенных на некотором гильбертовом пространстве. В дальнейшем в работе [11] данный подход был развит в направлении рассмотрения, к примеру, такого нелинейного уравнения, как

$$|u'|^q u' + \mathbb{A}u = \mathbb{F}(u, t). \quad (1.3)$$

Однако случай нелинейного эллиптического оператора при производной по времени остался вне рамок предлагаемой техники. Кроме того, техника работы [12] прямо не применима к уравнениям с конвективной нелинейностью, на что указывал сам Левин в своей работе [8].

В работе [13] методом нижних и верхних решений исследован вопрос о разрушении решения и о глобальной разрешимости для обобщенного уравнения Буассинеса с источником.

В нашей работе [3] предложена некоторая модификация энергетического метода Левина [11, 12], с помощью которого удалось рассмотреть случай сильно нелинейных псевдопараболических уравнений с источниками. В работах [4, 5] нами были рассмотрены следующие операторно-дифференциальные уравнения:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{i=1}^N \mathbb{A}_j(u) \right) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \quad (1.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{i=1}^N \mathbb{A}_j(u) \right) + \mathbb{L}u = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{i=1}^N \mathbb{A}_j(u) \right) + \mathbb{D}\mathbb{P}(u) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \quad (1.6)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbb{A}_0 u + \mathbb{L}u) + \mathbb{L}u + \mathbb{D}\mathbb{P}(u) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \quad (1.7)$$

где $\mathbb{A}_0 u + \sum_{i=1}^N \mathbb{A}_j(u)$ — нелинейный эллиптический оператор, $\mathbb{L}u$ — линейный диссипативный эллиптический оператор, $\mathbb{D}\mathbb{P}(u)$ — «конвективная» нелинейность, $\mathbb{F}(u)$ — источник.

Принципиально новый подход, называемый *методом пробных функций* и предложенный в развернутом виде в работе [14], может быть применен для исследования дифференциальных неравенств псевдопараболического типа в неограниченных областях.

Отметим, что исследованию волновых квазилинейных волновых диссипативных уравнений с источниками и без источников посвящены работы [15–23]. В этих работах рассматривались вопросы асимптотического поведения решений псевдопараболических уравнений при больших временах, а также вопросы существования решений типа уединенных волн и их устойчивость.

2. Локальная разрешимость задачи (1.1) в сильном обобщенном смысле

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Под *сильным обобщенным решением* задачи (1.1) мы подразумеваем решение класса $C^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ следующей задачи:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{D}(u), w \rangle &= 0 \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \forall t \in [0, T], \\ \mathbb{D}(u) &= \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u - |u|^q u) + \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} - \Delta u \int_{\Omega} dx |\nabla u|^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где посредством $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначены скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, а производная по времени понимается в сильном смысле.

Теорема 1. Пусть $q \in (0, 4]$ и $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Тогда найдется такое $T_0 > 0$, что существует единственное сильное обобщенное решение задачи (1.1) класса $C^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|\nabla u\|_2 = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие обозначения: $\|\cdot\|_{+1}$ — норма в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\|\cdot\|_{-1}$ — норма в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

Рассмотрим теперь операторы

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(u) &= -\Delta u + u + |u|^q u, \quad \mathbb{L}u = -\Delta u, \\ \mathbb{F}_1 u &= u_{x_1}, \quad \mathbb{F}_2(u) = uu_{x_1}, \quad \mathbb{F}_3(u) = \|\nabla u\|_2^2(-\Delta u). \end{aligned} \quad (2.2)$$

В сильном обобщенном смысле задача (2.1) с учетом введенных обозначений (2.2) примет вид

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{A}(u)) + \mathbb{L}u = \mathbb{F}_1 u + \mathbb{F}_2(u) + \mathbb{F}_3(u), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \quad (2.3)$$

Рассмотрим свойства оператора \mathbb{A} . Имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}(u_1) - \mathbb{A}(u_2), u_1 - u_2 \rangle &= \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_2^2 + \|u_1 - u_2\|_2^2 \\ &+ \int_{\Omega} (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2)(u_1 - u_2) \geq \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_2^2. \end{aligned}$$

Значит, оператор \mathbb{A} имеет липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной 1. Оператор $\mathbb{L} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ имеет липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной 1. Далее,

$$\mathbb{F}_1 u = \frac{\partial u}{\partial x_1} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

причем оператор \mathbb{F}_1 является липшиц-непрерывным. Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{F}_2(u) : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$:

$$\|\mathbb{F}_2(u_1) - \mathbb{F}_2(u_2)\|_{-1} \leq C \|u_1^2 - u_2^2\|_2 \leq C \mu_1(R) \|u_1 - u_2\|_{+1}, \quad (2.4)$$

$$\mu_1(R) = R, \quad R = \max\{\|u_1\|_+, \|u_2\|_+\}.$$

Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{F}_3(u) = \|\nabla u\|_2^2(-\Delta u) : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{F}_3(u_1) - \mathbb{F}_3(u_2)\|_{-1} &\leq \|\nabla u_1\|_2^2 \|u_1 - u_2\|_{+1} + \left| \|\nabla u_1\|_2^2 - \|\nabla u_2\|_2^2 \right| \|u_1\|_+ \\ &\leq C\mu_2(R) \|u_1 - u_2\|_{+1}, R = \max\{\|u_1\|_+, \|u_2\|_+\}, \mu_2(R) = R^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Найдем производную Фреше оператора \mathbb{A} :

$$\mathbb{A}'_u = \mathbb{A}_0 + \mathbb{B}(u), \quad (2.6)$$

где

$$\mathbb{A}_0 = -\Delta u + u, \quad \mathbb{B}(u) = (q+1)|u|^q I.$$

Справедливо неравенство

$$\langle \mathbb{A}'(u)h_1 - \mathbb{A}'(u)h_2, h_1 - h_2 \rangle \geq \|\nabla h_1 - \nabla h_2\|_2^2.$$

Значит, оператор $\mathbb{A}'(u)$ имеет липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной 1.

Рассмотрим оператор $\mathbb{B}(u) = (q+1)|u|^q I$. Докажем, что операторы $\mathbb{B}(\cdot)$ являются ограниченными и непрерывными по $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в равномерной топологии пространства $\mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega); \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{B}(u)h\|_{-1} &\leq C\|\mathbb{B}(u)h\|_{\frac{q+2}{q+1}} \leq C \left(\int_{\Omega} dx |u|^{q\frac{q+2}{q+1}} |h|^{\frac{q+2}{q+1}} \right)^{\frac{q+1}{q+2}} \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} dx |u|^{q+2} \right)^{\frac{q}{q+2}} \left(\int_{\Omega} dx |h|^{q+2} \right)^{\frac{1}{q+2}} \leq C \|\nabla u\|_2^q \|\nabla h\|_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Пусть теперь $u_n \rightarrow u$ сильно в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, тогда в силу того, что $f = |u|^q$, $q > 0$, — оператор Немыцкого, действующий из $\mathbb{L}^{q+1}(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{(1+q)/q}(\Omega)$, данный оператор является ограниченным и сильно непрерывным из $\mathbb{L}^{1+q}(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{(1+q)/q}$. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|\mathbb{B}(u_n) - \mathbb{B}(u)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\|\nabla h\|_2=1} \|\mathbb{B}(u_n)h - \mathbb{B}(u)h\|_{-1}, \\ \|\mathbb{B}(u_n)h - \mathbb{B}(u)h\|_{-1} &\leq C\|\mathbb{B}(u_n)h - \mathbb{B}(u)h\|_{\frac{q+2}{q+1}} \leq C \left(\int_{\Omega} dx |h| (|u_n|^q - |u|^q) \right)^{\frac{q+1}{q+2}} \\ &\leq C\|h\|_{q+2} \left(\int_{\Omega} dx \left| |u_n|^q - |u|^q \right|^{\frac{q+2}{q}} \right)^{\frac{q}{q+2}} \leq C < +\infty, \end{aligned}$$

где C не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Введем оператор $f(x, u) = |h||u|^q : \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$. По теореме Вайнберга — Немыцкого (см., например, [24, с. 39]) приходим к выводу, что

$$\|\mathbb{B}(u_n) - \mathbb{B}(u)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)} \rightarrow +0$$

при $n \rightarrow +\infty$.

Введем обозначение

$$v = \mathbb{A}(u). \quad (2.8)$$

Тогда в классе $v \in C^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ задача (2.3) эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(v) + \mathbb{F}_1\mathbb{A}^{-1}(v) + \mathbb{F}_2(\mathbb{A}^{-1}(v)) + \mathbb{F}_3(\mathbb{A}^{-1}(v)), \\ v(0) &= v_0 = \mathbb{A}(u_0) \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Задача (2.9) эквивалентна интегральному уравнению

$$v(t) = \mathbb{H}(v), \quad \mathbb{H}(v) = v_0 + \int_0^t ds[-\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(v) + \mathbb{F}_1\mathbb{A}^{-1}(v) + \mathbb{F}_2(\mathbb{A}^{-1}(v)) + \mathbb{F}_3(\mathbb{A}^{-1}(v))]. \quad (2.10)$$

Рассмотрим замкнутое выпуклое ограниченное подмножество пространства $\mathbb{B}_M \subset L^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$:

$$\mathbb{B}_M \equiv \{v \in L^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)) : \|v\|_T = \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|v\|_{-1} \leq M\}.$$

Нетрудно доказать, что в силу свойств (2.4) и (2.5) найдется такое $T > 0$, что оператор \mathbb{H} действует из \mathbb{B}_M в \mathbb{B}_M при достаточно большом M . В силу теоремы о сжимающих отображениях существует единственное решение интегрального уравнения (2.10) класса $L^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Используя стандартный алгоритм продолжения решений интегральных уравнений вида (2.10), получим, что найдется такое $T_0 > 0$, что либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|v\|_{-1} = +\infty.$$

Из свойств сглаживания по времени оператора $\mathbb{H}(v)$ вытекает, что $v(x, t) \in C^{(1)}([0, T_0); \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ — сильное обобщенное решение задачи (2.9).

Рассмотрим теперь уравнение (2.8):

$$\mathbb{A}(u) = -\Delta u + u + |u|^q u = v. \quad (2.11)$$

Из свойств оператора \mathbb{A} вытекает, что

$$u = \mathbb{A}^{-1}(v). \quad (2.12)$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\|u(t) - u(t_0)\|_{+1} \leq \|\mathbb{A}^{-1}(v(t)) - \mathbb{A}^{-1}(v(t_0))\|_{+1} \leq \|v(t) - v(t_0)\|_{-1} \rightarrow +0$$

при $t \rightarrow t_0$. Таким образом, $u \in C([0, T_0); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

В классе $u \in C^{(1)}([0, T_0); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ задача (2.11) эквивалентна следующей:

$$\mathbb{A}'_u u' = v', \quad u = \mathbb{A}^{-1}(v). \quad (2.13)$$

Из (2.13) вытекает, что

$$[\mathbb{A}_0 + \mathbb{B}(u)] u' = v', \quad \mathbb{A}_0 = -\Delta + I. \quad (2.14)$$

Подействуем на обе части равенства (2.14) оператором \mathbb{A}_0^{-1} , тогда получим

$$[I + \mathbb{A}_0^{-1}\mathbb{B}(u)] u' = \mathbb{A}_0^{-1} v'. \quad (2.15)$$

Докажем теперь, что оператор

$$\widehat{\mathbb{C}} = I + \mathbb{A}_0^{-1}\mathbb{B}(u) \quad (2.16)$$

при фиксированном $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ обратим. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\widehat{\mathbb{C}}w = 0.$$

Поддействуем на обе части последнего уравнения оператором \mathbb{A}_0 , тогда получим

$$[\mathbb{A}_0 + \mathbb{B}(u)]w = 0,$$

откуда в силу обратимости оператора $\mathbb{A}_0 + \mathbb{B}(u)$ приходим к выводу, что $w = 0$ в классе $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. С другой стороны, операторы \mathbb{A}_0^{-1} и $\mathbb{B}(u)$ являются ограниченными в соответствующих пространствах. Поэтому оператор $\widehat{\mathbb{C}} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ линеен и ограничен, значит, в силу теоремы Банаха об обратном отображении приходим к выводу, что оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}$ ограниченный. Тем самым из (2.15) получим

$$u' = \widehat{\mathbb{C}}^{-1}\mathbb{A}_0^{-1}v'. \quad (2.17)$$

Нам осталось доказать, что $u' = \widehat{\mathbb{C}}^{-1}\mathbb{A}_0^{-1}v' \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|u'(t) - u'(t_0)\|_{+1} &\leq \|\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)\mathbb{A}_0^{-1}[v'(t) - v'(t_0)]\|_{+1} \\ &\quad + \|(\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t))\mathbb{A}_0^{-1}v'(t_0)\|_{+1} \\ &\leq C\|v'(t) - v'(t_0)\|_{-1} + C\|\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Отметим, что линейный при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ оператор $\widehat{\mathbb{C}}$ является непрерывным, а значит, в силу теоремы Банаха об обратном отображении оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}$ линейный непрерывный и ввиду линейности ограниченный. Стало быть, мы можем воспользоваться спектральным представлением для линейного ограниченного оператора $\widehat{\mathbb{C}}^{-1} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Прежде всего введем резольвенту оператора $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}) = (\lambda\mathbb{I} - \widehat{\mathbb{C}})^{-1}.$$

Пусть Γ — окружность $|\lambda| = r$ с достаточно большим радиусом, большим чем

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \|\widehat{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)}.$$

Введенная величина определена корректно, поскольку при указанных $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset (0, T_0)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \|u\|_{+1} < +\infty.$$

Теперь мы можем воспользоваться спектральным представлением для операторов $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)$ и $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)$ с одним и тем же введенным ранее контуром Γ :

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\lambda \lambda^{-1} \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)), \quad \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\lambda \lambda^{-1} \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)).$$

Очевидно, имеем

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\lambda \lambda^{-1} [\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))].$$

Воспользуемся известным представлением

$$\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) = \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \sum_{n=1}^{+\infty} [(\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))]^n$$

для резольвент операторов при условии

$$\|\widehat{\mathbb{C}}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}(t)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)} \|\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq \delta < 1.$$

Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)} &\leq \|\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)} \\ &\times \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)}^n \|\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)}^n. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0) = \mathbb{A}_0^{-1} [\mathbb{B}_u(t) - \mathbb{B}_u(t_0)].$$

Из непрерывности производных Фреше \mathbb{B}_u по $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и уже доказанных утверждений следует, что $u \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Значит,

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)} \|\mathbb{B}_u(t) - \mathbb{B}_u(t_0)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)} &\rightarrow +0, \\ \|\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)} &\rightarrow 0, \\ \|\widehat{\mathbb{C}}(t)^{-1} - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)^{-1}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)} &\rightarrow +0 \end{aligned}$$

при $t \rightarrow t_0$.

Итак, $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Теорема доказана.

3. Разрушение сильного обобщенного решения задачи (1.1)

В предыдущем разделе мы доказали локальную во времени разрешимость задачи (1.1) в сильном обобщенном смысле $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Здесь мы докажем, что при некоторых достаточных условиях на параметры задачи будет $T_0 < +\infty$ и тем самым выполнено следующее предельное равенство:

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|\nabla u\|_2 = +\infty. \tag{3.1}$$

Пусть

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u\|_{q+2}^{q+2}, \quad \Phi_0 = \Phi(0).$$

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при условиях $q \in (0, 2)$,

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(0), \quad \Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha - 1}} \Phi(0)$$

имеет место соотношение $T_0 \in [T_1, T_2]$ и выполнено предельное равенство (3.1), где

$$\alpha = \frac{6+q}{2q+4}, \quad \beta = \frac{8B^4}{2-q}, \quad \gamma = \frac{16}{2-q} [3 + B^4],$$

$$\Phi'(0) = \|\nabla u_0\|_2^4 - \|\nabla u_0\|_2^2, \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2}\|u_0\|_{q+2}^{q+2},$$

$$T_2 = \Phi_0^{1-\alpha} A^{-1}, \quad T_1 = \frac{1}{4\Phi_0}, \quad A^2 \equiv (1-\alpha)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\gamma}{\alpha-1} (\Phi(0))^2 \right],$$

B — наилучшая константа вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$, $\|z\|_4 \leq B\|\nabla z\|_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим скалярно уравнение (1.1) относительно скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, тогда после интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство

$$\frac{d\Phi}{dt} + \|\nabla u\|_2^2 = \|\nabla u\|_2^4, \quad (3.2)$$

где

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2}\|u\|_{q+2}^{q+2}. \quad (3.3)$$

Умножая на $u' \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, получим второе энергетическое равенство

$$\begin{aligned} \|\nabla u'\|_2^2 + \|u'\|_2^2 + (q+1) \int_{\Omega} dx |u|^q (u')^2 \\ = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^4 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 + \int_{\Omega} dx u' u_{x_1} + \int_{\Omega} dx u u_{x_1} u'. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\left| \int_{\Omega} dx (\nabla u', \nabla u) \right| \leq \|\nabla u'\|_2 \|\nabla u\|_2, \quad \left| \int_{\Omega} dx u' u \right| \leq \|u'\|_2 \|u\|_2, \quad (3.5)$$

$$\left| \int_{\Omega} dx |u|^q u u' \right| \leq \left(\int_{\Omega} dx |u|^q (u')^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} dx |u|^{q+2} \right)^{1/2}. \quad (3.6)$$

С учетом (3.3), (3.5) и (3.6) справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} (\Phi')^2 &= \left(\int_{\Omega} dx (\nabla u', \nabla u) + \int_{\Omega} dx u' u + (q+1) \int_{\Omega} dx |u|^q u u' \right)^2 \\ &\leq \|\nabla u'\|_2^2 \|\nabla u\|_2^2 + \|u'\|_2^2 \|u\|_2^2 \\ &\quad + (q+1) \int_{\Omega} dx |u|^q (u')^2 (q+1) \int_{\Omega} dx |u|^{q+2} + 2\|\nabla u'\|_2 \|\nabla u\|_2 \|u'\|_2 \|u\|_2 \\ &\quad + 2\|\nabla u'\|_2 \|\nabla u\|_2 (q+1) \left(\int_{\Omega} dx |u|^q (u')^2 \right)^{1/2} (q+1) \left(\int_{\Omega} dx |u|^{q+2} \right)^{1/2} \\ &\quad + 2\|u'\|_2 \|u\|_2 (q+1) \left(\int_{\Omega} dx |u|^q (u')^2 \right)^{1/2} (q+1) \left(\int_{\Omega} dx |u|^{q+2} \right)^{1/2} \\ &\left(\|\nabla u'\|_2^2 + \|u'\|_2^2 + (q+1) \int_{\Omega} dx |u|^q (u')^2 \right) (\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 + q+1 \|u\|_{q+2}^{q+2}) \\ &\leq (q+2) \left(\|\nabla u'\|_2^2 + \|u'\|_2^2 + (q+1) \int_{\Omega} dx |u|^q (u')^2 \right) \Phi(t). \end{aligned}$$

Стало быть, имеет место неравенство

$$(\Phi')^2 \leq (q+2)\Phi \left(\|\nabla u'\|_2^2 + \|u'\|_2^2 + (q+1) \int_{\Omega} dx |u|^q (u')^2 \right). \quad (3.7)$$

Введем обозначение

$$J = \|\nabla u'\|_2^2 + \|u'\|_2^2 + (q+1) \int_{\Omega} dx |u|^q (u')^2. \quad (3.8)$$

Теперь нам необходимо получить оценки сверху для функции $J(t)$. Из (3.2)–(3.4) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{1}{4} \left| \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 \right| + \frac{1}{4} \Phi'' + \left| \int_{\Omega} dx u'_{x_1} u \right| + \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega} dx u^2 u'_{x_1} \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} J + \frac{1}{2\varepsilon} \Phi + \frac{1}{4} \Phi'' + \frac{1}{\varepsilon} \Phi + \frac{\varepsilon}{2} J + \frac{\varepsilon}{4} J + \frac{1}{4\varepsilon} \|u\|_4^4, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где мы воспользовались неравенствами

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} dx (\nabla u', \nabla u) \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u'\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\nabla u\|_2^2, & \left| \int_{\Omega} dx u' u \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|u'\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|u\|_2^2, \\ \left| \int_{\Omega} dx u u'_{x_1} \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u'\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|u\|_2^2, & \left| \int_{\Omega} dx u^2 u'_{x_1} \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u'\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|u\|_4^4, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

В итоге из (3.9) получим

$$[1 - \varepsilon]J \leq \frac{1}{2\varepsilon} [3 + B^4] \Phi + \frac{B^4}{4\varepsilon} \Phi' + \frac{1}{4} \Phi'', \quad (3.10)$$

где B — константа наилучшего вложения $\|u\|_4 \leq B \|\nabla u\|_2$. Из (3.7) и (3.10) приходим к следующему обыкновенному дифференциальному неравенству второго порядка:

$$\Phi \Phi'' - \alpha (\Phi')^2 + \beta \Phi' \Phi + \gamma \Phi^2 \geq 0, \quad (3.11)$$

где

$$\alpha = \frac{4}{q+2} (1 - \varepsilon), \quad \beta = \frac{B^4}{\varepsilon}, \quad \gamma = \frac{2}{\varepsilon} [3 + B^4], \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{2-q}{4} \right) \quad \text{при } 0 < q < 2.$$

Отметим, что при условии $q \in (0, 2)$ имеем $\alpha > 1, \beta > 0, \gamma > 0$.

Данное неравенство нетрудно привести к следующему линейному дифференциальному неравенству:

$$\mathbb{Z}'' + \beta \mathbb{Z}' - \delta \mathbb{Z} \leq 0, \quad \delta = \gamma(\alpha - 1), \quad (3.12)$$

относительно новой функции

$$\mathbb{Z} = \Phi^{1-\alpha}. \quad (3.13)$$

Перейдем теперь к новой функции

$$\mathbb{Y} \equiv \mathbb{Z} e^{\beta t} \quad (3.14)$$

в уравнении (3.12), тогда получим неравенство

$$\mathbb{Y}'' - \beta \mathbb{Y}' - \delta \mathbb{Y} \leq 0. \quad (3.15)$$

Отсюда следует, что

$$\Upsilon' = e^{\beta t}(\alpha - 1)\Phi^{-\alpha} \left(-\Phi' + \frac{\beta}{\alpha - 1}\Phi \right). \quad (3.16)$$

Потребуем выполнения условия

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1}\Phi(0). \quad (3.17)$$

В силу непрерывной дифференцируемости функции Υ из условия (3.17) с учетом (3.16) приходим к выводу, что найдется такой интервал $[0, T_3)$, принадлежащий области определения $\Phi(t)$, что $\Upsilon' < 0$, причем если $T_3 \leq T_0$, то $\Upsilon' = 0$ при $t = T_3$. Следовательно, $-\beta\Upsilon'(t) > 0$ при $t \in [0, T_3)$. Отсюда и из неравенства (3.15) получим следующее дифференциальное неравенство:

$$\Upsilon'' - \delta\Upsilon \leq 0 \quad \forall t \in [0, T_3]. \quad (3.18)$$

Потребуем выполнения неравенства

$$\Phi'(0) > \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha - 1}}\Phi(0). \quad (3.19)$$

Из (3.18) вытекает неравенство

$$(\Upsilon')^2 \geq \delta\Upsilon^2 + A^2, \quad (3.20)$$

где

$$A^2 \equiv (1 - \alpha)^2\Phi^{-2\alpha}(0) \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\delta}{(1 - \alpha)^2}(\Phi(0))^2 \right] > 0. \quad (3.21)$$

Из (3.20) получим

$$\Upsilon'(t) \leq -A \quad \forall t \in [0, T_3]. \quad (3.22)$$

Из (3.22) следует, что $\Upsilon' < 0$ на области определения функции $\Phi(t)$, а отсюда и из (3.22) имеем

$$\Upsilon(t) \leq \Upsilon_0 - At.$$

Стало быть, найдется такой момент времени $T_0 \in (0, T_2)$ что

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty, \quad (3.23)$$

где $T_2 = \Upsilon(0)A^{-1}$.

Получим теперь оценку снизу на время разрушения решения задачи (1.1). Действительно, из первого энергетического равенства (3.2) вытекает цепочка неравенств

$$\frac{d\Phi}{dt} \leq \|\nabla u\|_2^4 \leq 4 \left(\frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 \right)^2 \leq 4\Phi^2. \quad (3.24)$$

Из (3.24) следует неравенство

$$\Phi \leq \frac{\Phi_0}{1 - 4\Phi_0 t},$$

из которого приходим к оценке $T_1 \leq T_0$, где $T_1 = 4^{-1}\Phi_0^{-1}$.

Теорема доказана.

4. Физическая интерпретация

Из теоремы 2 вытекает, что при достаточно большой начальной электростатической энергии в полупроводнике возникает ее лавинный рост за конечное время, т. е. в полупроводнике возникает экспериментально наблюдаемое явление пробоя. Полученное нами качественное описание пробоя вполне согласуется с наблюдаемой картиной [25].

ЛИТЕРАТУРА

1. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 12. С. 1835–1869.
2. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики. Ч. 2 // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 11. С. 2041–2048.
3. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
4. Габов С. А., Свешников А. Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
5. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
6. Плетнер Ю. Д. Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, № 2. С. 1885–1899.
7. Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 4. С. 47–74.
8. Levine H. A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ // Arch. Rational. Mech. Anal. 1973. V. 51. P. 371–386.
9. Levine H. A., Park S. R., Serrin J. Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolution equations of formally parabolic type // J. Differential Equations. 1998. V. 142, N 1. P. 212–229.
10. Кожанов А. И. Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 1. С. 70–75.
11. Корпусов М. О., Свешников А. Г. «Разрушение» решений абстрактных задач Коши для нелинейных дифференциально-операторных уравнений // Докл. РАН. 2005. Т. 401, № 1. С. 1–3.
12. Корпусов М. О. О разрушении решений класса сильно нелинейных уравнений типа Соболева // Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68, № 4. С. 78–131.
13. Корпусов М. О., Свешников А. Г. О разрушении решений одного класса квазилинейных волновых диссипативных уравнений псевдопараболического типа с источниками // Докл. РАН. 2005 (в печати).
14. Митидиери Э., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных. Тр. МИАН. 2001. С. 1–383.
15. Шишмарев И. А. Об одном нелинейном уравнении типа Соболева // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 1. С. 138–140.
16. Karch G. Asymptotic behavior of solutions to some pseudoparabolic equations // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20, N 3. P. 271–189.
17. Goldstein J. A., Kajikiya R., Oharu S. On some nonlinear dispersive equations in several space variables // Differential Integral Equations. 1990. V. 3, N 4. P. 617–632.
18. Zhang L. Decay of solution of generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations in n -space dimensions // Nonlinear Anal. 1995. V. 25, N 12. P. 1343–1369.
19. Naumkin P. I. Large-time asymptotic behaviour of a step for the Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1996. V. 126, N 1. P. 1–18.
20. Avrin J., Goldstein J. A. Global existence for the Benjamin–Bona–Mahony equation in arbitrary dimensions // Nonlinear Anal. 1985. V. 9, N 8. P. 861–865.
21. Albert J. P. On the decay of solutions of the generalized Benjamin–Bona–Mahony equation // J. Math. Anal. Appl. 1989. V. 141, N 2. P. 527–537.

22. Lee H. Y., Ohm M. R., Shin J. Y. The convergence of fully discrete Galerkin approximations of the Rosenau equation // Korean J. Comput. Appl. Math. 1999. V. 6, N 1. P. 1–13.
23. Mei M. Long-time behavior of solution for Rosenau–Burgers equation. II // J. Appl. Anal. 1998. V. 68, N 3–4. P. 333–356.
24. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
25. Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г. Физика полупроводников. М.: Наука, 1990.

Статья поступила 29 октября 2004 г.

*Корпусов Максим Олегович, Свешников Алексей Георгиевич
Московский гос. университет, физический факультет, кафедра математики
Воробьевы горы, Москва 119899
korpusov@rsci.ru, agsveshn@math380b.phys.msu.su*