Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2005. Том 46, № 3

УДК 517.11

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ГРОТЕНДИКА

С. С. Кутателадзе

Аннотация: Модуль порядково ограниченного функционала на векторной решетке является суммой двух решеточных гомоморфизмов в том и только в том случае, если ядро этого функционала служит подпространством Гротендика объемлющей решетки. Дается операторный аналог этого утверждения.

Ключевые слова: решеточный гомоморфизм, 2-дизъюнктный оператор, подпространство Гротендика, булевозначный анализ.

Пусть X — векторная решетка, а Y — пространство Канторовича, база которого представляет собой полную булеву алгебру B. В [1] были описаны регулярные операторы T из X в Y, представимые в виде разности решеточных гомоморфизмов. Такими оказались в точности те операторы T, у которых ядро слоя bT при каждом $b \in B$ представляет собой векторную подрешетку X. Здесь будет дана аналогичная характеризация в терминах свойств ядер слоев для регулярных операторов, модуль которых представим в виде суммы двух решеточных гомоморфизмов.

Отметим, что суммы n решеточных гомоморфизмов впервые были описаны Берно, Гюсмансом и де Пагте [2] в терминах n-дизъюнктных операторов. Обзор концептуально близких результатов дан в [3, § 5.6]. В настоящей заметке мы устанавливаем связь между 2-дизъюнктностью и подпространствами Гротендика.

Теорема. *Модуль регулярного оператора $T : X \to Y$ представляет собой сумму двух решеточных гомоморфизмов в том и только в том случае, если ядро любого слоя bT для $b \in B$ является подпространством Гротендика объемлющей решетки X.*

Напомним, что подпространство H векторной решетки называют *G-пространством* или *подпространством Гротендика*, если выполнено следующее условие:

$$(\forall x, y \in H)\ (x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0 \in H). \tag{1}$$

История соотношения (1) такова. В 1955 г. Гротендик выделил подпространства, удовлетворяющие (1) в пространстве $C(Q, \mathbb{R})$ непрерывных вещественных функций на компакте Q, задавая такие подпространства (см. [4]) как совокупности функций f, удовлетворяющих некоторому семейству А соотношений, имеющих для $\alpha \in \mathrm{A}$ следующий вид:

$$f\big(q^1_\alpha\big) = \lambda_\alpha f\big(q^2_\alpha\big) \quad \big(q^1_\alpha, q^2_\alpha \in Q;\ \lambda_\alpha \in \mathbb{R}\big).$$

Выделенные Гротендиком пространства дали примеры L_1-предсопряженных банаховых пространств, не являющихся AM-пространствами. В 1969 г. Линденштраусс и Вулперт охарактеризовали указанные подпространства с помощью условия (1) и ввели термин G-пространство (см. [5]). Родственные свойства пространств Гротендика представлены также в [6, 7].

Как и в [1], доказательство сформулированной теоремы основано на аппарате «нестандартной скаляризации», сводящем операторные задачи к случаю функционалов. Используя сведения из теории векторных решеток и булевозначного анализа, мы будем придерживаться терминологии и обозначений книги [8].

Схема дальнейших рассуждений такова. С помощью функторов канонического вложения и подъема в булевозначную модель $\mathbb{V}^{(B)}$ мы сводим дело к характеризации гиперподпространств Гротендика, служащих ядрами регулярных ограниченных функционалов в векторных решетках над плотными подкольцами поля $\mathbb{R}$. Скалярный случай распадается на четыре леммы.

Лемма 1. *Линейный функционал можно представить в виде суммы двух решеточных гомоморфизмов в том и только в том случае, если он положителен и его ядро является подпространством Гротендика.*

Доказательство. Необходимость почти очевидна. В самом деле, пусть $l = f + g$, где f, g — решеточные гомоморфизмы. Возьмем h_k такие, что $f(h_k) + g(h_k) = 0$ для $k := 1, 2$. Тогда

$$
\begin{aligned}
f(h_1 \vee h_2 \vee 0) = f(h_1) \vee f(h_2) \vee 0 \\
= (-g(h_1)) \vee (-g(h_2)) \vee 0 = -g(h_1) \wedge g(h_2) \wedge 0.
\end{aligned}
$$

Аналогично $g(h_1 \vee h_2 \vee 0) = -f(h_1 \wedge h_2 \wedge 0)$. Окончательно

$$
l(h_1 \vee h_2 \vee 0 + h_1 \wedge h_2 \wedge 0) = (f + g)(h_1 \vee h_2 \vee 0 + h_1 \wedge h_2 \wedge 0) = 0.
$$

Стало быть, $\ker(l)$ — подпространство Гротендика.

Достаточность. Пусть $l \geq 0$ и $\ker(l)$ — подпространство Гротендика. Если у l нет осколков, отличных от нуля и l, то l — решеточный гомоморфизм и доказывать больше ничего не нужно. Напомним, что *осколок* f — это крайняя точка порядкового отрезка $[0, f]$.

Пусть f — осколок l, $0 \neq f, f \neq l$ и $g := l - f$ — осколок l, дизъюнктный к f. Ясно, что $g \neq 0$, $g \neq f$. Проверим, что $[0, f] = [0, 1]f$. Для этого возьмем функционал f_1 такой, что $0 \leq f_1 \leq f$ и $f_1 \neq 0$, $f_1 \neq f$. Положим $f_2 := f - f_1$.

Поскольку H — подпространство Гротендика, имеем

$$
\begin{aligned}
h_1 \vee h_2 \vee h_3 + h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 \\
= (h_1 - h_3) \vee (h_2 - h_3) \vee 0 + (h_1 - h_3) \wedge (h_2 - h_3) \wedge 0 + 2h_3 \in H
\end{aligned}
$$

для $h_1, h_2, h_3 \in H$. Значит,

$$
(\forall h_1, h_2, h_3 \in H)\ l(h_1 \vee h_2 \vee h_3) \geq l((-h_1) \vee (-h_2) \vee (-h_3)).
$$

Разбиение f в сумму $f = f_1 + f_2$ порождает разбиение $l = f_1 + f_2 + g$ функционала l в сумму положительных слагаемых. Применяя теорему декомпозиции (см. [1]), можно подыскать разбиение l в сумму положительных слагаемых $l = l_1 + l_2 + l_3$ такое, что для всех $h \in H$ будет

$$
l_1(h) \geq f_1(-h), \quad l_2(h) \geq f_2(-h), \quad l_3(h) \geq g(-h).
$$

Поскольку H — это гиперплоскость функционала l, найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$
f_1 + l_1 = \alpha_1(f + g), \quad f_2 + l_2 = \alpha_2(f + g), \quad g + l_3 = \alpha_3(f + g).
$$

Суммируя все эти равенства и вспоминая, что $l \neq 0$, мы видим $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 2$. Складывая первые два равенства, заключаем, что

$$f + l_1 + l_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)(f + g).$$

Значит, $(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)f + (\alpha_1 + \alpha_2)g \geq 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 1$ в силу дизъюнктности f и g. Аналогично $(\alpha_3 - 1)g + \alpha_3 f \geq 0$ и $(\alpha_3 - 1)g \geq 0$. Поскольку $g \neq 0$, имеем $\alpha_3 \geq 1$. Окончательно $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и $\alpha_3 = 1$.

Таким образом, $l_3 = f$ и $l_1 + l_2 = g$. Кроме того, $f_1 - \alpha_1 f = \alpha_1 g - l_1$. Раз $0 \leq f_1 \leq f$ и $0 \leq l_1 \leq g$, то $|f_1 - \alpha_1 f| \leq (1 + |\alpha_1|)f$ и $|\alpha_1 g - l_1| \leq (1 + |\alpha_1|)g$. В силу дизъюнктности f и g будет $f_1 = \alpha_1 f$. Поскольку $f \geq f_1 \neq 0$, мы видим, что $1 > \alpha_1 > 0$.

Лемма 1 полностью доказана.

Лемма 2. *Пусть l — регулярный функционал на векторной решетке X, причем $l_+ \neq 0$ и $l_- \neq 0$. Ядро* $\ker(l)$ *— подпространство Гротендика в том и только в том случае, если l_+ и l_- — решеточные гомоморфизмы на X или, что то же самое,* $\ker(l)$ *— векторная подрешетка.*

Доказательство. Достаточность очевидна.

Необходимость. Положим $f := l_+ \neq 0$, $g := l_- \neq 0$ и $H := \ker(f - g)$. Пусть $0 \leq \bar f \leq f$, $0 \leq \bar g \leq g$ и $h_1, h_2, h_3 \in H$. Ясно, что

$$\begin{aligned} f(h_1 \vee h_2 \vee\ h_3) &+ g((-h_1) \vee (-h_2) \vee (-h_3)) \\ &\geq f((-h_1) \vee (-h_2 \vee (-h_3)) + g(h_1 \vee h_2 \vee h_3) \geq \bar f(-h_1) + \bar g(h_2). \quad (2) \end{aligned}$$

Для $x_1, x_2, x_3 \in X$ положим

$$\varepsilon_3(x, y, z) =: x_1 \vee x_2 \vee x_3; \quad \sigma(x) := -x;$$
$$m(x_1, x_2, x_3) := \bar f(-x_1) + \bar g(x_2); \quad p := f \circ \varepsilon_3; \quad q := g \circ \varepsilon_3 \circ \sigma.$$

В терминах субдифференциального исчисления с помощью новых обозначений неравенство (2) можно переписать следующим образом:

$$m \in \partial(p + q + \delta(H^3)) = \partial(p) + \partial(q) + \partial(\delta(H^3)),$$

где $\delta(U)$ — индикаторная функция множества U, а $\partial(s)$ — субдифференциал сублинейного функционала s.

По теореме декомпозиции найдутся разбиения f и g в суммы положительных слагаемых $f = f_1 + f_2 + f_3$ и $g = g_1 + g_2 + g_3$ такие, что

$$f_1 + g_1 \circ \sigma - \bar f \circ \sigma \in \partial(\delta(H)); \quad f_2 + g_2 \circ \sigma - \bar g \in \partial(\delta(H)); \quad f_3 + g_3 \circ \sigma \in \partial(\delta(H)).$$

Поскольку H — гиперплоскость функционала l, то $\partial(\delta(H)) = \{tl : t \in \mathbb{R}\}$. Значит, найдутся числа $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ такие, что

$$f_1 - g_1 + \bar f = \alpha(f - g); \quad f_2 - g_2 - \bar g = \beta(f - g); \quad f_3 - g_3 = \gamma(f - g).$$

Положим $t := \alpha + \beta + \gamma - 1$. После суммирования получаем $tf - \bar f = tg - \bar g$. Тем самым

$$0 \leq |tf - \bar f| = |tg - \bar g| = |tf - \bar f| \wedge |tg - \bar g| \leq (1 + |t|)(f \wedge g) = 0.$$

Таким образом, $\bar f = tf$ и $\bar g = tg$. В силу предположений $0 \leq t \leq 1$. Стало быть, $[0, f] = [0, 1]f$ и $[0, g] = [0, 1]g$. Следовательно, l — разность решеточных гомоморфизмов, и, значит, $\ker(l)$ — векторная подрешетка (ср. [1]).

Лемма 2 полностью доказана.

Лемма 3. *Ядро регулярного функционала служит подпространством Гротендика в том и только в том случае, если таково ядро его модуля.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $l : X \to \mathbb{R}$ — регулярный функционал. Если $\ker(|l|)$ является подпространством Гротендика, то по лемме 1 $|l| = l_1 + l_2$, где l_1 и l_2 — решеточные гомоморфизмы. Любые два решеточных гомоморфизма либо дизъюнктны, либо пропорциональны. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что l_1 и l_2 — дизъюнктные осколки $|l|$, отличные от 0 и $|l|$ (иначе l — решеточный гомоморфизм). Порядковый интервал $[0, |l|]$ лежит в плоскости, ибо $[0,1]l_1 + [0,1]l_2 = [0, |l|]$. Стало быть, все крайние точки $[0, |l|]$ принадлежат множеству $\{0, l_1, l_2, |l|\}$. Поскольку функционалы l_+ и l_- также служат дизъюнктными осколками $|l|$, мы видим, что либо $l = l_1 + l_2$, либо $l = l_1 - l_2$, либо $l = l_2 - l_1$. В первом из этих случаев $\ker(l)$ — подпространство Гротендика по лемме 1, а в двух последних — векторная подрешетка (и тем более подпространство Гротендика) в векторной решетке X.

Необходимость. Пусть $\ker(l)$ — подпространство Гротендика. Если один из функционалов l_+ и l_- является нулевым, то $\ker(|l|) = \ker(l)$ и доказывать больше нечего.

Если $l_+ \neq 0$ и $l_- \neq 0$, то l_+ и l_- — решеточные гомоморфизмы по лемме 2. Таким образом, $|l|$ — сумма решеточных гомоморфизмов. Из леммы 1 вытекает, что $\ker(|l|)$ — подпространство Гротендика.

Лемма 3 полностью доказана.

Лемма 4. *Ядро регулярного ограниченного функционала служит подпространством Гротендика в том и только в том случае, если модуль этого функционала представим в виде суммы двух решеточных гомоморфизмов.*

Доказательство. Пусть l — регулярный функционал. По лемме 3 ядро $\ker(l)$ — подпространство Гротендика в том и только в том случае, когда таково подпространство $\ker(|l|)$. Поскольку $|l|$ — положительный функционал, доказательство завершается ссылкой на лемму 1.

Лемма 4 полностью доказана.

Доказательство теоремы. Начнем со «скаляризации» задачи. Не нарушая общности, можно считать, что Y — ненулевое пространство, вложенное в качестве фундамента в расширенное пространство Канторовича $\mathscr{R}{\downarrow}$, представляющее собой спуск поля вещественных чисел $\mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. [6, теорема 5.2.4]).

Пусть, $X^{\wedge}$ — стандартное имя X в $\mathbb{V}^{(B)}$. Понятно, что $X^{\wedge}$ — это $\mathbb{R}^{\wedge}$-векторная решетка внутри булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$.

Пусть, далее, $l := T{\uparrow}$ — подъем оператора T в $\mathbb{V}^{(B)}$. Ясно, что l действует из $X^{\wedge}$ в подъем $Y{\uparrow}$ пространства Y в смысле универсума $\mathbb{V}^{(B)}$. Таким образом,

$$l(x^{\wedge}) = Tx$$

внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ для всех $x \in X$, т. е. в терминах оценки истинности

$$[\![l : X^{\wedge} \to \mathscr{R}]\!] = \mathbb{1}, \quad (\forall x \in X)\ [\![l(x^{\wedge}) = Tx]\!] = \mathbb{1}.$$

Работая внутри $\mathbb{V}^(B)$, видим, что

$$\begin{aligned}
&[\![\ker(l) \text{ — подпространство Гротендика } X^{\wedge}]\!] \\
&\quad = [\![(\forall x, y \in X^{\wedge})(l(x) = 0^{\wedge} \wedge l(y) = 0^{\wedge} \to l(x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0) = 0^{\wedge})]\!] \\
&\qquad = \bigwedge_{x,y \in X} [\![l(x^{\wedge}) = 0^{\wedge} \wedge l(y^{\wedge}) = 0^{\wedge} \to l((x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0)^{\wedge}) = 0^{\wedge}]\!]. \quad (3)
\end{aligned}$$

Достаточность. Возьмем $x, y \in X$, и пусть $b := [\![Tx = 0^\wedge]\!] \wedge [\![Ty = 0^\wedge]\!]$. Это означает, что $x, y \in \ker(bT)$. По условию ядро любого слоя bT — подпространство Гротендика. Следовательно, $bT(x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0) = 0$. Иначе говоря,

$$[\![Tx = 0^\wedge]\!] \wedge [\![Ty = 0^\wedge]\!] \leq [\![T(x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0) = 0^\wedge]\!].$$

Отсюда в силу (3) $[\![\ker(l)$ — подпространство Гротендика $X^\wedge]\!] = \mathbb{1}$. Применяя лемму 4 к регулярному функционалу l внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и используя принцип максимума, видим, что $|l|$ — это сумма двух решеточных гомоморфизмов l_1 и l_2 внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Определим операторы $T_1, T_2 : X \to \mathscr{R}{\downarrow}$ соотношениями

$$[\![T_1 x = l_1(x^\wedge)]\!] = \mathbb{1}, \quad [\![T_2 x = l_2(x^\wedge)]\!] = \mathbb{1}.$$

Ясно, что $T_1 + T_2 = T$ и T_1, T_2 — решеточные гомоморфизмы. Поскольку Y — фундамент $\mathscr{R}{\downarrow}$, значения операторов T_1, T_2 лежат в Y.

Необходимость. Пусть $|T|$ — сумма двух решеточных гомоморфизмов. Ясно, что подъем суммы есть сумма подъемов слагаемых, а потому $l^\wedge$ — регулярный функционал внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, модуль которого есть сумма двух решеточных гомоморфизмов. Стало быть, по лемме 4 $[\![\ker(l)$ — подпространство Гротендика$]\!] = 1$.

Учитывая (3), видим, что ядро любого слоя bT будет подпространством Гротендика в X. В самом деле, если $x, y \in X$, то из (3) вытекает

$$[\![l(x^\wedge) = 0^\wedge \wedge l(y^\wedge) = 0^\wedge \to l((x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0)^\wedge) = 0^\wedge]\!] = \mathbb{1}.$$

Стало быть, $[\![l(x^\wedge) = 0^\wedge \wedge l(y^\wedge) = 0^\wedge]\!] \leq [\![l((x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0)^\wedge) = 0^\wedge]\!]$. Значит, если $b \in B$ и $bTx = bTy = 0$, то

$$[\![l((x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0)^\wedge) = 0^\wedge]\!] \geq b.$$

Следовательно, $bT(x \vee y \vee 0 + x \wedge y \wedge 0) = 0$.

Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кутателадзе С. С.* О разностях решеточных гомоморфизмов // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 390–393.
2. *Bernau S. J., Huijsmans C. B., de Pagter B.* Sums of lattice homomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 115, N 1. P. 151–156.
3. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
4. *Grothendieck A.* Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1 // Canad. J. Math. 1955. V. 4. P. 552–561.
5. *Lindenstrauss J., Wulbert D. E.* On the classification of the Banach spaces whose duals are L_1-spaces // J. Funct. Anal. 1969. V. 4, N 3. P. 332–349.
6. *Semadeni Zb.* Banach spaces of continuous functions. Warszawa: Polish Sci. Publ., 1971.
7. *Lacey H. E.* The isometric theory of classical Banach spaces. Berlin etc.: Springer-Verl., 1973.
8. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Булевозначный анализ. Изд. 2. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2003.

Статья поступила 21 февраля 2005

Кутателадзе Семён Самсонович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sskut@math.nsc.ru