Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2005. Том 46, № 3

УДК 517.51

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ТИПА СОБОЛЕВА — МОРРИ $W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)$

А. М. Наджафов

Аннотация: Изучены с точки зрения теории вложения некоторые свойства функций из пространств типа Соболева — Морри и локальная гладкость решений одного класса квазиэллиптических уравнений.

Ключевые слова: пространство типа Соболева — Морри, гибкий λ-рог, теорема вложения, интегральные представления, условие Гёльдера, гладкость решений.

Работа посвящена исследованию вопросов вложения для пространств типа Соболева — Морри $W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)$ ($l \in \mathbb{N}^n$, $\mathbf{p} \in [1,\infty)^n$, $\mathbf{a} \in [0,1]^n$, $\varkappa \in (0,\infty)^n$, $\tau \in [1,\infty]$). С учетом интегральных представлений функций, определенных в области, удовлетворяющей условию гибкого λ-рога, введенного О. В. Бесовым в [1], доказаны теоремы вложения для рассматриваемых пространств.

В случае $\tau = \infty$, $\mathbf{a} = (a,\dots,a)$, $\mathbf{p} = (p,\dots,p)$ пространства Соболева — Морри $W^l_{p,a,\varkappa,\infty}(G) \equiv W^l_{p,a,\varkappa}(G)$ введены и изучены В. П. Ильиным в [2], а в случае $1 \le \tau < \infty$, $\mathbf{a} = (a,\dots,a)$, $\mathbf{p} = (p,\dots,p)$ пространства типа Соболева — Морри $W^l_{p,a,\varkappa,\tau}(G)$ предложены В. С. Гулиевым.

Полученные теоремы вложения применяются также в исследовании локальной гладкости решения некоторых классов квазиэллиптических уравнений. Гёльдеровость решений квазиэллиптических уравнений при непрерывности или гёльдеровости коэффициентов уравнения при старших производных рассмотрена в [3]. В работе [4] изучены L_p-оценки решений при условии бесконечной дифференцируемости коэффициентов при старших производных, а в [5, 6] рассмотрены другие проблемы теории квазиэллиптических уравнений. В [7] также доказана теорема о принадлежности решения классу Гёльдера внутри области, а в работе [8] получены локальные «внутренние» гёльдеровы оценки решений уравнения квазиэллиптического типа в случае, когда правая часть удовлетворяет анизотропному условию Гёльдера. В настоящей работе, как и в [7], гёльдеровость решения изучается без каких-либо условий гладкости на функции $a_{\alpha\beta}(x)$. Однако отметим, что здесь в отличие от [7]

1) «показатель» гёльдеровости больше, чем в [7];

2) f_α при $(\alpha,\lambda) = 1$ принадлежит более широкому классу, т. е. $f_\alpha \in L_{2,a,\varkappa}(G)$.

Пусть G — область пространства $\mathbb{R}^n$, $t > 0$, для любого $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$I_{t^\varkappa}(x) = \{y : |y_j - x_j| < (1/2)t^{\varkappa_j}, j = 1,2,\dots,n\}, \quad G_{t^\varkappa}(x) = G \cap I_{t^\varkappa}(x).$$

Обозначим через $W^l_{\mathbf{p},a,\varkappa,\tau}(G)$ пространство локально суммируемых на G функций f, имеющих на G обобщенные производные $D_i^{l_i} f \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)} = \|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)} + \sum_{i=1}^{n} \big\|D_i^{l_i} f\big\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)}, \quad 1 \le \tau < \infty, \tag{1}$$

$$\|f\|_{W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\infty}(G)} = \|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\infty}(G)} + \sum_{i=1}^{n} \big\|D_i^{l_i} f\big\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\infty}(G)},$$

где

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)} = \|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau;G} = \sup_{x \in G} \left\{ \int_0^{t_0} \Big[[t]_1^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\varkappa_j a_j}{p_j}} \|f\|_{\mathbf{p},G_{t^\varkappa}(x)} \Big]^\tau \frac{dt}{t} \right\}^{1/\tau}, \; 1 \le \tau < \infty, \tag{2}$$

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa}(G)} = \|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa:G} = \|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\infty;G} = \sup_{x \in G, t > 0} \Big([t]_1^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\varkappa_j a_j}{p_j}} \|f\|_{\mathbf{p},G_{t^\varkappa}(x)} \Big),$$

$$\|f\|_{\mathbf{p},G_{t^\varkappa}(x)} = \left\{ \int\limits_{G_{t^{\varkappa_n}}(x_n)} \left[\dots \left\{ \int\limits_{G_{t^{\varkappa_2}}(x_2)} \left(\int\limits_{G_{t^{\varkappa_1}}(x_1)} |f(y)|^{p_1}\, dy_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dy_2 \right\}^{\frac{p_3}{p_2}} \dots \right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dy_n \right\}^{\frac{1}{p_n}},$$

$[t]_1 = \min\{1, t\}$, t_0 — фиксированное положительное число.

В дальнейшем будем писать $\mathbf{p} \le \mathbf{q}$ или $\mathbf{p} < \mathbf{q}$, где $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, если соответственно $p_j \le q_j$ $(j = 1, \dots, n)$ или $p_j < q_j$ $(j = 1, \dots, n)$; в частности, $\mathbf{1} \le \mathbf{p} \le \boldsymbol{\infty}$ ($\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, $\boldsymbol{\infty} = (\infty, \dots, \infty)$) означает, что $1 \le p_j \le \infty$ $(j = 1, \dots, n)$.

Отметим ряд свойств пространств $L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)$ и $W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)$.

1. При различных t_0, $0 < t_0 < \infty$, нормы вида (2) эквивалентны.
2. При любых $\varkappa > \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \le \mathbf{a} \le \mathbf{1}$ имеют место вложения

$$L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G) \hookrightarrow L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa}(G), \quad W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G) \hookrightarrow W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa}(G),$$

т. е.

$$\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;G} \le C \|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau;G)} \tag{3}$$

и

$$\|f\|_{W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa}(G)} \le C \|f\|_{W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)}. \tag{4}$$

Вначале докажем неравенство (3). Пусть $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$. Тогда

$$\|f\|^\tau_{p,\mathbf{a},\varkappa,\tau;G} = \sup_{x \in G} \int_0^{t_0} \left([\eta]_1^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \varkappa_j a_j} \int\limits_{G_{\eta^\varkappa}(x)} |f(y)|^p\, dy \right)^{\frac{\tau}{p}} \frac{d\eta}{\eta}$$

$$\ge \sup_{x \in G} \sup_{0 < 2t < t_0} \int_t^{2t} \left([\eta]_1^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \varkappa_j a_j} \int\limits_{G_{\eta^\varkappa}(x)} |f(y)|^p\, dy \right)^{\frac{\tau}{p}} \frac{d\eta}{\eta}$$

$$\ge \sup_{x \in G} \sup_{0 < 2t < t_0} \left([2t]_1^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \varkappa_j a_j} \int\limits_{G_{t^\varkappa}(x)} |f(y)|^p\, dy \right)^{\frac{\tau}{p}} \int_t^{2t} \frac{d\eta}{\eta}$$

$$\geq C \sup_{x\in G} \sup_{0<2t<t_0} \left([t]_1^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \varkappa_j a_j} \int\limits_{G_{t^\varkappa}(x)} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{\tau}{p}} = C\|f\|^{\tau}_{p,\mathbf{a},\varkappa;G}. \quad (5)$$

Неравенство для векторных $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ получается последовательным применением неравенства (5) по каждой переменной в отдельности. Аналогично доказывается неравенство (4).

3. Пространства $L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)$ и $W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)$ полные.

4. Для любого вещественного $c > 0$

$$\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},c\varkappa,\tau;G} = c^{-\frac{1}{\tau}}\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau;G}, \quad \|f\|_{W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},c\varkappa,\tau}(G)} = c^{-\frac{1}{\tau}}\|f\|_{W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)}.$$

5. При любом $\varkappa > 0$ справедливы соотношения

а) $\|f\|_{\mathbf{p},0,\varkappa,\infty;G} = \|f\|_{\mathbf{p};G}$, $\|f\|_{W^l_{\mathbf{p},0,\varkappa,\infty}(G)} = \|f\|_{W^l_{\mathbf{p}}(G)}$,

б) $\|f\|_{\mathbf{p},1,\varkappa,\tau;G} \geq \|f\|_{\infty;G}$, $\|f\|_{W^l_{\mathbf{p},1,\varkappa,\tau}(G)} \geq \|f\|_{W^l_{\infty}(G)}$.

Здесь χ_G — характеристическая функция множества G,

$$\|f\|_{\mathbf{p};G} = \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\dots \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_G(y)|f(y)|^{p_1} dy_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dy_2 \right\}^{\frac{p_3}{p_2}} \dots \right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dy_n \right\}^{\frac{1}{p_n}},$$

$$\|f\|_{W^l_{\mathbf{p}}(G)} = \|f\|_{\mathbf{p};G} + \sum_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{\mathbf{p};G}, \quad \|f\|_{W^l_{\infty}(G)} = \|f\|_{\infty;G} + \sum_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{\infty;G}.$$

6. Если G — ограниченная область, $p_j \leq q_j$, $\frac{1-b_j}{q_j} \leq \frac{1-a_j}{p_j}$, $j = 1, \dots, n$, $1 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq \infty$, то

$$L_{\mathbf{q},b,\varkappa,\tau_1}(G) \hookrightarrow L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_2}(G).$$

Для доказательства основных теорем нам понадобятся некоторые вспомогательные неравенства, приводимые в формулируемых ниже леммах. Пусть $M(\cdot, y, z) \in C_0^\infty$ такая, что

$$S(M) = \operatorname{supp} M \subset I_1 = \{y : |y_j| < 1/2, \ j = 1, 2, \dots, n\},$$

$0 < T \leq 1$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Положим

$$V = \bigcup_{0<t\leq T} \{y : (y/t^\lambda) \in S(M)\}.$$

Ясно, что $V \subset I_{T^\lambda}$, U — открытое множество, содержащееся в области G. В дальнейшем всегда будем считать, что $U + V \subset G$. Пусть

$$G_{T^\varkappa}(U) = \bigcup_{x\in U} G_{T^\varkappa}(x) = (U + I_{T^\varkappa}(x)) \cap G.$$

Заметим, что если $0 < \varkappa \leq \lambda, \ 0 < T \leq 1$, то $I_{T^\lambda} \subset I_{T^\varkappa}$ и, следовательно,

$$U + V \subset G_{T^\varkappa}(U) = Q.$$

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{1} \le \mathbf{p} \le \mathbf{q} \le \mathbf{r} \le \infty$, $0 < \varkappa \le \lambda$, $0 < t \le T \le 1$, $0 < \rho < \infty$, $1 \le \tau \le \infty$, $0 < \eta \le T, \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $\nu_j \ge 0$ *целые,* $j = 1, 2, \dots, n$, $\Phi \in L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)$,

$$\mu_\iota = \lambda_i l_i - \sum_{j=1}^{n} [\nu_j \lambda_j + (\lambda_j - \varkappa_j a_j)(1/p_j - 1/q_j)], \tag{6}$$

$$A_\eta^{(i)}(x) = \int_0^\eta t^{-1-|\lambda|-|\nu,\lambda|+\lambda_i l_i} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x+y) M\left(\frac{y}{t^\lambda}, \frac{\rho(t^\lambda, x)}{t^\lambda}, \rho'(t^\lambda, x)\right) dydt, \tag{7}$$

$$A_{\eta T}^{(i)}(x) = \int_\eta^T t^{-1-|\lambda|-|\nu,\lambda|+\lambda_i l_i} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x+y) M(\frac{y}{t^\lambda}, \frac{\rho(t^\lambda, x)}{t^\lambda}, \rho'(t^\lambda, x))\, dydt, \tag{8}$$

где

$$\rho'(u, x) = \frac{\partial}{\partial u} \rho(u, x), \quad |\lambda| = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j, \quad |\nu, \lambda| = \sum_{j=1}^{n} \nu_j \lambda_j.$$

Тогда

$$\sup_{\bar{x} \in U} \left\| A_\eta^{(i)} \right\|_{q, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})} \le C_1 \|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;,\tau;Q} [\rho]_1^{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\varkappa_j \alpha_j}{q_j}} \eta^{\mu_i} \quad (\mu_i > 0), \tag{9}$$

$$\sup_{\bar{x} \in U} \left\| A_{\eta T}^{(i)} \right\|_{q, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})} \le C_2 \|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;,\tau;Q} [\rho]_1^{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\varkappa_j \alpha_j}{q_j}} \begin{cases} T^{\mu_i}, & \mu_i > 0, \\ \ln \frac{T}{\eta}, & \mu_i = 0, \\ \eta^{\mu_i}, & \mu_i < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь $U_{\rho^\varkappa}(\bar{x}) = \{x : |x_j - \bar{x}_j| < \frac{1}{2}\rho^{\varkappa_j},\ j = 1, 2, \dots, n\}$ *и* C_1, C_2 — *константы, не зависящие от* Φ, ρ, η *и* T .

Доказательство. Пусть вначале $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$, $q_1 = \dots = q_n = q$, $r_1 = \dots = r_n = r$. Применяя обобщенное неравенство Минковского, для любого $\bar{x} \in U$ получим

$$\left\| A_\eta^{(i)} \right\|_{q, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})} \le C \int_0^\eta t^{-1-|\lambda|-|\nu,\lambda|+\lambda_i l_i} \|F(\cdot, t)\|_{q, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})}\, dt, \tag{11}$$

где

$$F(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x+y) M\left(\frac{y}{t^\lambda}, \frac{\rho(t^\lambda, x)}{t^\lambda}, \rho'(t^\lambda, x)\right) dy.$$

Оценим норму $\|F(\cdot, t)\|_{q, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})}$. В силу неравенства Гёльдера ($q \le r$) имеем

$$\|F(\cdot, t)\|_{q, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})} \le \|F(\cdot, t)\|_{r, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})} \rho^{(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) \sum\limits_{j=1}^{n} \varkappa_j}. \tag{12}$$

Пусть χ — характеристическая функция множества $S(M)$. Замечая, что $1 \le p \le r \le \infty$, $s \le r$ ($\frac{1}{s} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$),

$$|\Phi M| = (|\Phi|^p |M|^s)^{\frac{1}{r}} (|\Phi|^p \chi)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} (|M|^s)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}}$$

и применяя неравенство Гёльдера ($\frac{1}{r} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) + (\frac{1}{s} - \frac{1}{r}) = 1$), имеем

$$|F(x, t)| \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x+y)|^p \left| M(\frac{y}{t^\lambda}, \frac{\rho(t^\lambda, x)}{t^\lambda}, \rho'(t^\lambda, x)) \right|^s dy \right)^{1/r}$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\Phi(x+y)|^p\chi(y:t^\lambda)\,dy\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|M\left(\frac{y}{t^\lambda},\frac{\rho(t^\lambda,x)}{t^\lambda},\rho'(t^\lambda,x)\right)\right|^s dy\right)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}}.$$

Отсюда получим

$$\|F(\cdot,t)\|_{r,U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})}\le\sup_{x\in U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\Phi(x+y)|^p\chi(y:t^\lambda)\,dy\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$$
$$\times\sup_{y\in V}\left(\int\limits_{U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})}|\Phi(x+y)|^p dx\right)^{1/r}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|M\left(\frac{y}{t^\lambda},\frac{\rho(t^\lambda,x)}{t^\lambda},\rho'(t^\lambda,x)\right)\right|^s dy\right)^{\frac{1}{s}}.\quad(13)$$

Так как $Q_{t^\lambda}(x)\subset Q_{t^\varkappa}(x)$ при любом $0<t\le 1,\varkappa\le\lambda$, то для любого $x\in U$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\Phi(x+y)|^p\chi(y:t^\lambda)\,dy\le\int\limits_{Q_{t^\varkappa}(x)}|\Phi(y)|^p\,dy\quad\le\|\Phi\|^p_{p,a,\varkappa;Q}t^{\sum\limits_{j=1}^n\varkappa_j a_j}.\quad(14)$$

При $y\in V$

$$\int\limits_{U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})}|\Phi(x+y)|^p dx\le\int\limits_{Q_{\rho^\varkappa}(\bar{x}+y)}|\Phi(x)|^p dx\le\|\Phi\|^p_{p,a,\varkappa;Q}[\rho]_1^{\sum x_j a_j},\quad(15)$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|M\left(\frac{y}{t^\lambda},\frac{\rho(t^\lambda,x)}{t^\lambda},\rho'(t^\lambda,x)\right)\right|^s dy=t^{|\lambda|}\|M\|_s^s.\quad(16)$$

Из (12)–(16) следует, что

$$\|F(\cdot,t)\|_{q,U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})}\le C\|\Phi\|_{p,a,\varkappa;Q}t^{\sum\limits_{j=1}^n\lambda_j-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\sum\limits_{j=1}^n(\lambda_j-\varkappa_j a_j)}[\rho]_1^{\frac{1}{r}\sum\limits_{j=1}^n\varkappa_j a_j}\rho^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\sum\limits_{j=1}^n\varkappa_j}.\quad(17)$$

Учитывая неравенство (3) ($1\le\tau\le\infty$) и применяя неравенство (17) по каждой переменной в отдельности, получим для векторных $\mathbf{p}=(p_1,\dots,p_n)$, $\mathbf{q}=(q_1,\dots,q_n)$ и $\mathbf{r}=(r_1,\dots,r_n)$ неравенство

$$\|F(\cdot,t)\|_{\mathbf{q},U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})}\le C_1\|\Phi\|_{\mathbf{p},a,\varkappa,\tau;Q}t^{\sum\limits_{j=1}^n\left[\lambda_j-(\lambda_j-\varkappa_j a_j)\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{r_j}\right)\right]}[\rho]_1^{\sum\limits_{j=1}^n\varkappa_j a_j\frac{1}{r_j}}\rho^{\sum\limits_{j=1}^n\varkappa_j\left(\frac{1}{q_j}-\frac{1}{r_j}\right)}.\quad(18)$$

Подставляя неравенство (18) в (11) ($r_j=q_j, j=1,2,\dots,n$), приходим к (9). Аналогично доказывается неравенство (10).

Следствие 1. *Полагая в неравенстве* (17) $\mathbf{r}=\infty$ *при* $0<\rho\le 1$ *или* $\mathbf{r}=\mathbf{q}$ *при* $\rho>1$, *получим*

$$\sup_{\bar{x}\in U}\|F(\cdot,t)\|_{\mathbf{q},U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})}\le C\|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,Q}[\rho]_1^{\sum\limits_{j=1}^n\varkappa_j\frac{1}{q_j}}$$

или

$$\|F(\cdot,t)\|_{\mathbf{q},b,\varkappa,U}\le C\|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;Q},$$

а отсюда при $1\le\tau_1<\tau_2\le\infty$, *учитывая неравенство* (3), *имеем*

$$\|F(\cdot,t)\|_{\mathbf{q},b,\varkappa,\tau_2;U}\le C'\|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1;Q}.\quad(19)$$

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{1} \le \mathbf{p} \le \mathbf{q} < \infty$, $0 < \varkappa \le \lambda$, $0 < T \le 1$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $\nu_j \ge 0$ *целые,* $j = 1, 2, \dots, n$, $1 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \infty$, $\mu_i > 0$ *и*

$$\mu_{i,0} = \lambda_i l_i - \sum_{j=1}^{n} \left[\nu_j \lambda_j + (\lambda_j - \varkappa_j a_j) \frac{1}{p_j} \right].$$

Тогда для функции $A_T^{(i)}(x)$, *определенной равенством* (7), *справедлива оценка*

$$\big\| A_T^{(i)} \big\|_{\mathbf{q}, b, \varkappa, \tau_2; U} \le \| \Phi \|_{\mathbf{p}, \mathbf{a}, \varkappa, \tau_1; Q}, \tag{20}$$

где $b = (b_1, \dots, b_n)$, b_j — *произвольное число, удовлетворяющее неравенствам*

$$\begin{gathered} 0 \le b_j \le 1, \quad \textit{если } \mu_{i,0} > 0, \\ 0 \le b_j < 1, \quad \textit{если } \mu_{i,0} = 0, \\ 0 \le b_j < 1 + \frac{\mu_{i,0} q_j (1 - a_j)}{n(\lambda_j - \varkappa_j a_j)} = a_j + \frac{\mu_i q_j (1 - a_j)}{n(\lambda_j - \varkappa_j a_j)}, \quad \textit{если } \mu_{i,0} < 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Доказательство. Оценим $\big\| A_T^{(i)} \big\|_{\mathbf{q}, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})}$, $\bar{x} \in U$, $0 < \rho < \infty$. Предположим сначала, что $0 < \rho < T$. Тогда

$$\big\| A_T^{(i)} \big\|_{\mathbf{q}, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})} \le \big\| A_\rho^{(i)} \big\|_{\mathbf{q}, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})} + \big\| A_{\rho^T}^{(i)} \big\|_{\mathbf{q}, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})}. \tag{22}$$

В силу неравенства (9) ($\eta = \rho$)

$$\big\| A_\rho^{(i)} \big\|_{\mathbf{q}, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})} \le C_1 \| \Phi \|_{\mathbf{p}, \mathbf{a}, \varkappa; Q} \, \rho^{\mu_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\varkappa_j a_j}{q_j}}, \tag{23}$$

где C_1 не зависит от Φ и ρ.

Далее, на основании обобщенного неравенства Минковского и неравенства (10) при $\tau = \infty$ имеем

$$\big\| A_{\rho^T}^{(i)} \big\|_{\mathbf{q}, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})} \le C_2 \| \Phi \|_{\mathbf{p}, \mathbf{a}, \varkappa; Q} \, \varphi(\rho, T; r), \tag{24}$$

здесь

$$\varphi(\rho, T; r) = \rho^{\delta(r)} \int_{\rho}^{T} t^{\mu_i(r) - 1} \, dt, \quad \delta(r) = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\varkappa_j}{q_j} - \frac{\varkappa_j}{r_j} (1 - a_j) \right],$$

$$\mu_i(r) = \lambda_i l_i - \sum_{j=1}^{n} \left[\nu_j \lambda_i + (\lambda_j - \varkappa_j a_j) \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j} \right) \right],$$

где C_2 — константа, не зависящая от Φ и ρ.

Выберем $\mathbf{r}$ ($\mathbf{q} \le \mathbf{r} \le \infty$) таким образом, чтобы показатель степени у ρ в оценке (24) был максимальным. Для этого заметим, что $\delta(r)$ монотонно возрастает, а $\mu_i(r)$ монотонно убывает на $[\mathbf{q}, \infty]$, причем $\mu_i(q) = \mu_i$, $\mu_i(\infty) = \mu_{i,0}$.

Рассматриваем два случая: $\mu_{i,0} \ge 0$ и $\mu_{i,0} < 0$. Если $\mu_{i,0} \ge 0$, то максимальный показатель у ρ в оценке (24) равен $\mathbf{r} = \infty$ и $\delta(\infty) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\varkappa_j}{q_j}$, при этом

$$\varphi(\rho, T, \infty) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_{i,0}} \rho^{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\varkappa_j}{q_j}} (T^{\mu_{i,0}} - \rho^{\mu_{i,0}}), & \text{если } \mu_{i,0} > 0, \\ \rho^{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\varkappa_j}{q_j}} \ln \frac{T}{\rho}, & \text{если } \mu_{i,0} = 0. \end{cases}$$

Пусть $\mu_{i,0} < 0$. Так как $\mu_i(q) = \mu_i > 0$, $\mu_i(\infty) < 0$, при некотором $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{q} < \mathbf{r}_0 < \infty$, будет $\mu_i(r_0) = 0$. Нетрудно видеть, что наилучшая оценка в этом случае получается, если в $\varphi(\rho, T; r)$ положить $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Тогда $\varphi(\rho, T; r_0) = \rho^{\delta(r_0)} \ln \frac{T}{\rho}$, где

$$\delta(r_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varkappa_j}{q_j}\left(1 + \frac{\mu_{i,0} q_j (1-a_j)}{n(\lambda_j - \varkappa_j a_j)}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varkappa_j}{q_j}\left(a + \frac{\mu_i q_j (1-a_j)}{n(\lambda_j - \varkappa_j a_j)}\right)$$

($\lambda_j - \varkappa_j a_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, поскольку $\mu_i > 0$, $\mu_{i,0} < 0$). Замечая, что

$$\mu_i + \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j \frac{a_j}{q_j} \geq \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j \frac{1}{q_j}, \quad \text{если} \ \ \mu_{i,0} \geq 0,$$

$$\mu_i + \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j \frac{a_j}{q_j} \geq \delta(r_0), \quad \text{если } \mu_{i,0} < 0,$$

на основании (22)–(24) получаем

$$\|A_T^{(i)}\|_{\mathbf{q}, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})} \leq C_3 \|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,Q} \begin{cases} \rho^{\sum_{j=1}^{n} \varkappa_j \frac{1}{q_j}} T^{\mu_{i,0}}, & \text{если } \mu_{i,0} > 0, \\ \rho^{\sum_{j=1}^{n} \varkappa_j \frac{1}{q_j}} \ln \frac{T}{\rho}, & \text{если } \mu_{i,0} = 0, \\ \rho^{\delta(r_0)} \ln \frac{T}{\rho}, & \text{если } \mu_{i,0} < 0. \end{cases} \tag{25}$$

Пусть теперь $\rho \geq T$. Применяя снова оценку (9) ($\eta = T$), имеем

$$\|A_T^{(i)}\|_{\mathbf{q}, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})} \leq C_4 \|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;Q} \begin{cases} \rho^{\sum_{j=1}^{n} \varkappa_j \frac{a_j}{q_j} + \mu_i}, & \text{если } T \leq \rho \leq 1, \\ T^{\mu_i}, & \text{если } \rho > 1. \end{cases} \tag{26}$$

Из неравенств (25) и (26) следует, что при любом $\bar{x} \in U$ и любом ρ, $0 < \rho < \infty$,

$$\|A_T^{(i)}\|_{\mathbf{q}, U_{\rho^\varkappa}(\bar{x})} \leq C_5 \|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;Q} [\rho]_1^{\sum_{j=1}^{n} \varkappa_j \frac{b_j}{q_j}},$$

где $b = (b_1, \dots, b_n)$, b_j — число, удовлетворяющее неравенствам (21), а C_5 — константа, не зависящая от Φ, ρ, $\bar{x}$.

Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\|A_T^{(i)}\|_{\mathbf{q},b,\varkappa,U} \leq C \|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;Q},$$

и, следовательно, при $1 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \infty$ имеем

$$\|A_T^{(i)}\|_{\mathbf{q},b,\varkappa,\tau_2;U} \leq C \|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1,Q}.$$

Теорема 1. *Пусть открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию гибкого λ-рога, $\lambda \in (0,\infty)^n$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{q} \leq \infty$, $\overline{\varkappa} = c\varkappa$, где $\frac{1}{c} = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \frac{\varkappa_j}{\lambda_j}$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $\nu_j \geq 0$ целые, $j = 1, 2, \dots, n$; $1 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \infty$, $\mu_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$; $\mu_i, \mu_{i,0}$ определены в леммах 1 и 2, и пусть $f \in W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1}(G)$.*

Тогда

$$D^\nu : W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1}(G) \hookrightarrow L_{\mathbf{q},b,\varkappa,\tau_2}(G), \quad D^\nu : W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1}(G) \hookrightarrow W^{l^1}_{\mathbf{q},b,\varkappa,\tau_2}(G)$$

и справедливы неравенства

$$\|D^\nu f\|_{\mathbf{q},G} \le C_1\left(T^{\mu_0}\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1;G} + \sum_{i=1}^n T^{\mu_i}\big\|D_i^{l_i} f\big\|_{\mathbf{p},a,\varkappa,\tau_1;G}\right), \tag{27}$$

$$\|D^\nu f\|_{\mathbf{q},b,\varkappa,\tau_2;G} \le C_2\|f\|_{W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1}(G)} \quad (\mathbf{p}\le\mathbf{q}<\infty), \tag{28}$$

где

$$\mu_0 = \mu_i - \lambda_i l_i = -\sum_{j=1}^n\left[\nu_j\lambda_j + (\lambda_j - \varkappa_j a_j)\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right)\right],$$

а если $\mu_i - l_j^1\lambda_j > 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, *то*

$$\|D^\nu f\|_{W^{l^1}_{\mathbf{q}}(G)} \le C_3\left(T^{\mu_0-\lambda_j l_j^1}\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1;G} + \sum_{i=1}^n T^{\mu_i-\lambda_j l_j^1}\big\|D_i^{l_i} f\big\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1;G}\right), \tag{29}$$

$$\|D^\nu f\|_{W^{l^1}_{\mathbf{q},b,\varkappa,\tau_2}(G)} \le C_4\|f\|_{W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1}(G)} \quad (\mathbf{p}\le\mathbf{q}<\infty), \tag{30}$$

причем $T \le \min(1, T_0)$, C_1–C_4 *— константы, не зависящие от* f, C_1, *и* C_3 *не зависят также от* T.

В частности, если $\mu_{i,0} > 0$, $i = 1, \dots, n$, то $D^\nu f$ непрерывна на G и

$$\sup_{x\in G}|D^\nu f| \le C\left(T^{\mu_{i,0}-\lambda_i l_i}\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1;G} + \sum_{i=1}^n T^{\mu_{i,0}}\|D^\nu f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1;G}\right). \tag{31}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что, поскольку $\overline{\varkappa} = c\varkappa$, $c > 0$, на основании свойства 4 мы можем считать, что $f \in W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\overline{\varkappa},\tau_1}(G)$, и заменить всюду в неравенствах (27)–(31) и в равенстве (6) для μ_i значение $\varkappa$ на $\overline{\varkappa}$. Именно такие неравенства мы и будем доказывать (чем больше $\varkappa$, тем больше μ_i). Существование обобщенной производной $D^\nu f$ в условиях нашей теоремы вытекает из [1, теорема 10.1, с. 119].

Действительно, если $\mu_i > 0$, то $l_i\lambda_i - |\nu : l| > 0$, так как $\mathbf{p}\le\mathbf{q}$, $0 \le \mathbf{a} \le \mathbf{1}$, $\varkappa \le \lambda$. Поскольку $f \in W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G) \hookrightarrow W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa}(G) \hookrightarrow W^l_{\mathbf{p}}(G)$, на основании теоремы 10.1 из [1, с. 119] на G существует $D^\nu f \in L_{\mathbf{p}}(G)$. Тогда для почти каждой точки $x \in G$ имеет место тождество, полученное О. В. Бесовым (см. [1, с. 81]):

$$D^\nu f(x) = f^{(\nu)}_{T^\lambda}(x) + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^n t^{-1-|\lambda|-|\nu,\lambda|+\lambda_i l_i} \times L_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{t^\lambda}, \frac{\rho(t^\lambda, x)}{t^\lambda}, \rho'(t^\lambda, x)\right) D_i^{l_i} f(x+y)\,dydt, \tag{32}$$

$$f^{(\nu)}_{T^\lambda}(x) = T^{-|\lambda|-|\nu,\lambda|}\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\Omega^{(\nu)}\left(\frac{y}{T^\lambda}, \frac{\rho(t^\lambda, x)}{T^\lambda}\right) dy, \tag{33}$$

$0 < T \le \min(1, T_0)$, функции $\Omega^{(\nu)}(\cdot; y)$, $L_i^{(\nu)}(\cdot, y, z)$ являются функциями класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, а их носители содержатся в I_1, носитель представления (32), (33) содержится в гибком роге $x + V(\lambda, x, \theta) \subset G$. Отсюда на основании неравенства Минковского имеем

$$\|D^\nu f\|_{\mathbf{q},G} \le \big\|f^{(\nu)}_{T^\lambda}(x)\big\|_{\mathbf{q},G} + \sum_{i=1}^n \big\|A_T^{(i)}\big\|_{\mathbf{q},G}. \tag{34}$$

С помощью неравенства (18) при $U=G$, $t=T$, $\rho\to\infty$, $\mathbf{r}=\mathbf{q}$ получим

$$\left\|f^{(\nu)}_{T^\lambda}(x)\right\|_{\mathbf{q},G}\le C_1T^{\mu_0}\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\overline{\varkappa},\tau_1;G},\tag{35}$$

а из неравенства (9) при $U=G$, $\rho\to\infty$, которое применимо, так как $\mu_i>0$, $i=1,\dots,n$, —

$$\left\|A^{(i)}_T\right\|_{\mathbf{q},G}\le C_1T^{\mu_i}\left\|D^{l_i}_if\right\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\overline{\varkappa},\tau_1;G}.\tag{36}$$

Следовательно,

$$\|D^\nu f\|_{\mathbf{q},G}\le C_1\left(T^{\mu_0}\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\overline{\varkappa},\tau_1;G}+\sum_{i=1}^nT^{\mu_i}\|D^{l_i}_if\|_{\mathbf{p},a,\overline{\varkappa},\tau_1;G}\right).$$

Для доказательства неравенств (29) и (30) в (32), (33) заменим ν на $\nu+l^1_j$:

$$D^{\nu+l^1_j}f(x)=f^{(\nu+l^1)}_{T^\lambda}(x)+\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^nt^{-1-|\lambda|-|\nu+l^1_j,\lambda|+\lambda_il_i}\times L^{(\nu+l^1_j)}_i\left(\frac{y}{t^\lambda},\frac{\rho(t^\lambda,x)}{t^\lambda},\rho'(t^\lambda,x)\right)D^{l_i}_if(x+y)\,dydt,\tag{37}$$

$$f^{(\nu+l'_j)}_{T^\lambda}(x)=T^{-|\lambda|-|\nu+l^1_j,\lambda|}\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(x+y)\Omega^{(\nu+l^1_j)}\left(\frac{y}{T^\lambda},\frac{\rho(t^\lambda,x)}{T^\lambda}\right)dy.\tag{38}$$

Тогда с помощью неравенств (9) и (18) в случае $\mu_i-\lambda_jl^1_j>0$ $(j=1,2,\dots,n)$ получим

$$\left\|D^{\nu+l^1_j}f\right\|_{\mathbf{q},G}\le C_2\left(T^{\mu_0-\lambda_jl^1_j}\|f\|_{\mathbf{p},a,\overline{\varkappa},\tau_1;G}+\sum_{i=1}^nT^{\mu_i-\lambda_jl^1_j}\|D^{l_i}_if\|_{\mathbf{p},a,\overline{\varkappa},\tau_1;G}\right)$$

и, следовательно,

$$\|D^\nu f\|_{W^{l^1}_{\mathbf{q}}(G)}\le C_3\left(T^{\mu_0-\lambda_jl^1_j}\|f\|_{\mathbf{p},a,\overline{\varkappa},\tau_1;G}+\sum_{i=1}^nT^{\mu_i-\lambda_jl^1_j}\|D^{l_i}_if\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\overline{\varkappa},\tau_1;G}\right).$$

Аналогичном образом на основании неравенств (19) и (20) устанавливается оценка (28) и (30).

Пусть теперь $\mu_{i,0}>0$, $i=1,\dots,n$. Покажем, что тогда $D^\nu f$ непрерывна на G. Из равенств (32), (33) и неравенства (36) при $\mathbf{q}=\infty$, $\mu_i=\mu_{i,0}>0$ имеем

$$\|D^\nu f-D^\nu f_{T^\lambda}\|_{\mathbf{q};G}\le\sum_{i=1}^nT^{\mu_i}\left\|D^{l_i}_if\right\|_{\mathbf{p},a,\overline{\varkappa},\tau_1;G}.$$

Отсюда вытекает, что левая часть неравенства стремится к нулю при $T\to0$. Так как $D^\nu f_{T^\lambda}$ непрерывна на G, сходимость на $L_\infty(G)$ совпадает в данном случае с равномерной и, следовательно, предельная функция $D^\nu f$ непрерывна на G. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда при* $\mu_i>0$, $i=1,2,\dots,n$, *производная* $D^\nu f$ *удовлетворяет на* G *условию Гёльдера в метрике* $L_{\mathbf{q}}$ *с показателем* β^1, *точнее*

$$\|\Delta(\gamma,G)D^\nu f\|_{\mathbf{q},G}\le C\|f\|_{W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)}|\gamma|^{\beta^1},\tag{39}$$

где β^1 — любое число, удовлетворяющее неравенствам

$$
\begin{aligned}
0 \le \beta^1 \le 1, &\quad \textit{если } \frac{\mu^0}{\lambda_0} > 1, \\
0 \le \beta^1 < 1, &\quad \textit{если } \frac{\mu^0}{\lambda_0} = 1, \\
0 \le \beta^1 < \frac{\mu^0}{\lambda_0}, &\quad \textit{если } \frac{\mu^0}{\lambda_0} < 1,
\end{aligned}
\tag{40}
$$

$\mu^0 = \min \mu_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $\lambda_0 = \max \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Если $\mu_{i,0} > 0$, *то*

$$
\sup_{x \in G} |\Delta(\gamma, G) D^\nu f| \le C \|f\|_{W^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)} |\gamma|^{\beta_0^1}, \tag{41}
$$

где β_0^1 удовлетворяет тем же условиям, что β^1, но с заменой μ_i на $\mu_{i,0}$.

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 1, мы можем в дальнейших рассмотрениях заменить вектор $\varkappa$ на $\overline{\varkappa} = c\varkappa$, где $1/c = \max\limits_{1 \le j \le n} \frac{\varkappa_j}{\lambda_j}$. Пусть γ — n-мерный вектор. Согласно [1, лемма 8.6, с. 102] существует область

$$
G_\sigma \subset G \quad (\sigma = \xi r_\lambda(x),\ \xi > 0,\ r_\lambda(x) = \rho_\lambda(x, \partial G),\ x \in G).
$$

Предположим, что $|\gamma|_\lambda < \sigma$. Тогда для любых $x \in G_\sigma$ отрезок, соединяющий точки x, $x + \gamma$, содержится в G. Следовательно, для всех точек этого отрезка справедливы (32), (33) с теми же ядрами. После нескольких преобразований имеем

$$
\begin{aligned}
|\Delta(\gamma, G) D^\nu f| \le T^{-|\lambda| - |\nu, \lambda|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x+y) \\
\times \left| \Omega^{(\nu)} \left(\frac{y - \gamma}{T^\lambda}, \frac{\rho(T^\lambda, x)}{T^\lambda} \right) - \Omega^{(\nu)} \left(\frac{y}{T^\lambda}, \frac{\rho(T^\lambda, x)}{T^\lambda} \right) \right| dy \\
+ \sum_{i=1}^n \left\{ \int\limits_0^{|\gamma|^{\frac{1}{\lambda_0}}} t^{-1-|\lambda|-|\nu,\lambda|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\left| D_i^{l_i} f(x + \gamma + y) \right| + \left| D_i^{l_i} f(x+y) \right| \right) \right. \\
\times L_i^{(\nu)} \left(\frac{y}{t^\lambda}, \frac{\rho(t^\lambda, x)}{t^\lambda}, \rho'(t^\lambda, x) \right) dy dt \\
+ \int\limits_{|\gamma|^{\frac{1}{\lambda_0}}}^{T} t^{-1-|\lambda|-|\nu,\lambda|+\lambda_i l_i} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| D_i^l f(x+y) \right| \left| L_i^{(\nu)} \left(\frac{y - t}{t^\lambda}, \frac{\rho(t^\lambda, x)}{t^\lambda}, \rho'(t^\lambda, x) \right) \right. \\
\left. \left. - L_i^{(\nu)} \left(\frac{y}{t^\lambda}, \frac{\rho(t^\lambda, x)}{t^\lambda}, \rho'(t^\lambda, x) \right) \right| dy dt \right\} = B(x, \gamma) + \sum_{i=1}^n (Z_i(x, \gamma) + E_i(x, \gamma)),
\end{aligned}
\tag{42}
$$

где $0 < T \le \min(1, T_0)$, $|\gamma|^{\frac{1}{\lambda_0}} < T$ и, следовательно, $|\gamma| < \min(\sigma, T^{\lambda_0})$. Если $x \in G \backslash G_\sigma$, то по определению

$$
\Delta(\gamma, G) D^\nu f(x) = 0.
$$

На основании (42)

$$\|\Delta(\gamma,G)D^{\nu}f\|_{\mathbf{q},G}=\|\Delta(\gamma)D^{\nu}f\|_{\mathbf{q},G_\sigma}$$
$$\le \|B(\cdot,\gamma)\|_{\mathbf{q},G_\sigma}+\sum_{i=1}^{n}(\|Z_i(\cdot,\gamma)\|_{\mathbf{q},G_\sigma}+\|E_i(\cdot,\gamma)\|_{\mathbf{q},G_\sigma}). \quad (43)$$

Заметим, что

$$\left|\Omega^{(\nu)}\left(\frac{y-\gamma}{T^{\lambda}},\frac{\rho(T^{\lambda},x)}{T^{\lambda}}\right)-\Omega^{(\nu)}\left(\frac{y}{T^{\lambda}},\frac{\rho(T^{\lambda},x)}{T^{\lambda}}\right)\right|$$
$$\le\sum_{j=1}^{n}T^{-\lambda_j}\int_0^{|\gamma|}\left|D_j\Omega^{(\nu)}\left(\frac{y-\xi e_\gamma}{T^{\lambda}},\frac{\rho(T^{\lambda},x)}{T^{\lambda}}\right)\right|d\xi,$$

где $e_\gamma=\frac{\gamma}{|\gamma|}$. Поэтому

$$B(x,\gamma)\le\sum_{j=1}^{n}T^{-\lambda_j-|\lambda|-(\nu,\lambda)}\int_0^{|\gamma|}d\xi\int_{\mathbb{R}^n}f(x+\xi e_\gamma+y)\left|D_j\Omega^{(\nu)}\left(\frac{y}{T^{\lambda}},\frac{\rho(T^{\lambda},x)}{T^{\lambda}}\right)\right|dy. \quad (44)$$

Аналогично

$$E(x,\gamma)\le\sum_{j=1}^{n}\int_0^{|\gamma|}t^{-1-|\lambda|-|\nu,\lambda|-\lambda_j+l_i\lambda_i}dt\int_{\mathbb{R}^n}\left|D_i^{l_i}f(x+\xi e_\gamma+y)\right|$$
$$\times\left|D_jL_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{t^{\lambda}},\frac{\rho(t^{\lambda},x)}{t^{\lambda}},\rho'(t^{\lambda},x)\right)\right|dy. \quad (45)$$

С учетом неравенства (18) при $\mathbf{r}=\mathbf{q}$, $U=G$, $t=T$, $\rho\to\infty$ получаем

$$\|B(\cdot,\gamma)\|_{\mathbf{q},G}\le C_1|\gamma|\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\overline{\varkappa},\tau;G}. \quad (46)$$

Из (9) при $U=G,\eta=|\gamma|^{\frac{1}{\lambda_0}}$, $\rho\to\infty$ вытекает оценка

$$\|Z_i(\cdot,\gamma)\|_{\mathbf{q},G_\sigma}\le C_2|\gamma|^{\frac{\mu_i}{\lambda_0}}\left\|D_i^{l_i}f\right\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\overline{\varkappa},\tau_1;G}, \quad (47)$$

а из (10) при $U=G$, $\eta=|\gamma|^{\frac{1}{\lambda_0}}$, $\rho\to\infty$ — оценка

$$\|E_i(\cdot,\gamma)\|_{\mathbf{q},G_\sigma}\le C_3|\gamma|^{\beta}\left\|D_i^{l_i}f\right\|_{\mathbf{p},a,\overline{\varkappa},\infty;G}=C_3|\gamma|^{\beta^1}\left\|D_i^{l_i}f\right\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\overline{\varkappa},\tau;G}, \quad (48)$$

где $\beta^1>\beta$, β^1 — число, удовлетворяющее неравенствам (40), C_1–C_3 — константы, не зависящие от f и $|\gamma|$.

Из неравенств (43) и (46)–(48) вытекает, что

$$\|\Delta(\gamma,G)D^{\nu}f\|_{\mathbf{q},G}\le C\|f\|_{W^{l}_{\mathbf{p},a,\overline{\varkappa},r}(G)}|\gamma|^{\beta^1}.$$

Предположим теперь, что $|\gamma|\ge\min(\sigma,T^{\lambda_0})$. Тогда

$$\|\Delta(\gamma,G)D^{\nu}f\|_{\mathbf{q},G}\le 2\|D^{\nu}f\|_{\mathbf{q},G}\le C(\sigma,T)\|D^{\nu}f\|_{\mathbf{q},G}|\gamma|^{\beta^1}.$$

Оценивая $\|D^{\nu}f\|_{\mathbf{q},G}$ с помощью неравенства (27), в этом случае также получаем требуемое неравенство. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу о гладкости решений уравнения

$$\sum_{(\alpha,\lambda)\le 1,\,(\beta,\lambda))\le 1} D^\alpha a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u = \sum_{(\alpha,\lambda)\le 1} D^\alpha f_\alpha, \tag{49}$$

где $x=(x_1,\dots,x_n)$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$. Пусть $p_1=p_2=\dots=p_n=2$, $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_j^{-1}=l_j$, $j=1,2,\dots,n$, — целые положительные числа, а коэффициенты $a_{\alpha\beta}(x)\equiv a_{\beta\alpha}(x), a_{\alpha\beta}(x)$ ограничены, измеримы в G и

$$\sum_{(\alpha,\lambda)=(\beta,\lambda)=1} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \ge C_0 \sum_{(\alpha,\lambda)=1} |\xi_\alpha|^2, \quad C_0=\mathrm{const}. \tag{50}$$

Будем предполагать, что $f_\alpha\in L_2(G)$ при $(\alpha,\lambda)<1$, а $f_\alpha\in L_{2,a,\varkappa}(G)$ при $(\alpha,\lambda)=1$.

Обобщенным решением уравнения (49) в G называется функция $u(x)\in W_2^l(G)$ такая, что

$$\sum_{(\alpha,\lambda)\le 1,\,(\beta,\lambda)\le 1} \int_G (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u D^\alpha \vartheta\,dx = \sum_{(\alpha,\lambda)\le 1} \int_G (-1)^{|\alpha|} f_\alpha D^\alpha\vartheta\,dx \tag{51}$$

для любой функции $\vartheta(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$.

Теорема 3. *Если* $\frac{|\lambda|}{2}+|\nu,\lambda|\le 1$, $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$, $\nu_j\ge 0$ *целые*, $j=1,2,\dots,n$, *то всякое обобщенное решение уравнения* (49) *из* $W_2^l(G)$ *принадлежит пространству* $C_{\nu+\beta^1}(G^d)$, $\overline{G}^d\subset G$.

Доказательство. Пусть сначала $a_{\alpha\beta}\equiv 0$, за исключением тех, для которых $(\alpha,\lambda)=(\beta,\lambda)=1$, и все f_α тождественно нулевые. Пусть область G ограничена, $x_0\in G$, $\Pi_b(x_0)$ — параллелепипед в $\mathbb{R}^n$:

$$\Pi_b(x_0)=\{x: |x_j-x_{j0}|<b^{\lambda_j}, j=1,2,\dots,n\},$$

G^d — подобласть области G такая, что $(0<d<1,\ d=\mathrm{const})$,

$$G^d=\{y: |y_j-x_j|>d^{\lambda_j},\ x\in\partial G,\ j=1,2,\dots,n\}$$

и $b\le d$. Из вариационного принципа следует, что

$$\int_{\Pi_b(x_0)} \sum_{(\alpha,\lambda)=(\beta,\lambda)=1} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta\theta(u-p(x)) D^\alpha\theta(x)(u-p(x))\,dx$$

$$\ge \int_{\Pi_b(x_0)} \sum_{(\alpha,\lambda)=(\beta,\lambda)=1} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta(u-p(x)) D^\alpha(u-p(x)) = A(u-p(x),\Pi_b(x_0)) \tag{52}$$

при любой $\theta(x)\in C^\infty(\Pi_b(x_0))$ такой, что $\theta(x)\equiv 1$ в окрестности $\partial\Pi_b(x_0)$, любом полиноме $p(x)$ вида $p(x)=\sum\limits_{(\alpha,\lambda)=1} C_\alpha x^\alpha$ и при любом решении $u(x)$ уравнения (49).

Пусть

$$\theta(x)=1-\prod_{i=1}^n \sigma_i\Big(\frac{x_i-x_i^0}{b^{\lambda_i}}\Big),$$

где $\sigma_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $\sigma(t) \equiv 1$ при $|t| < 2^{-\lambda_i}$, $\sigma_i(t) \equiv 0$ при $|t| \geq 1$, $0 \leq \sigma(t) \leq 1$. Ясно, что $\theta(x) \equiv 0$ в $\Pi_{\frac{b}{2}}(x_0)$, $\theta(x) \equiv 1$ в окрестности $\partial\Pi_b(x_0)$, а коэффициенты $p(x)$ подберем так, чтобы

$$\int\limits_{(\Pi_b(x_0))\backslash(\Pi_{b/2}(x_0))} (u - p(x))x^\alpha \, dx = 0.$$

С помощью неравенств (27) и (52) получаем

$$\begin{aligned} A(u - p(x), \Pi_b(x_0)) &\leq A(u - p(x), \Pi_b(x_0)\backslash\Pi_{b/2}(x_0)) \\ &+ \int\limits_{(\Pi_b(x_0))\backslash(\Pi_{b/2}(x_0))} \sum_{(\alpha,\lambda)<1} b^{2(\alpha,\lambda)-2}(D^\alpha(u - p(x)))^2 \, dx \\ &\leq A(u - p(x), \Pi_b(x_0)\backslash\Pi_{b/2}(x_0)) + C_1 A(u - p(x), \Pi_b(x_0)\backslash\Pi_{b/2}(x_0)) \\ &\leq qA(u - p(x), \Pi_b(x_0)\backslash\Pi_{b/2}(x_0)). \end{aligned} \tag{53}$$

Так как $A(u - p(x), G) = A(u, G)$, имеем

$$A(u, \Pi_{b/2}(x_0)) \leq (1 - 1/q)A(u, \Pi_b(x_0)).$$

Отсюда по индукции

$$A(u, \Pi_{b/2^k}(x_0)) \leq (1 - 1/q)^k A(u, \Pi_b(x_0)).$$

Пусть $0 < \delta < \frac{b}{2^k}$. Тогда $\Pi_b(x_0) \subset \Pi_{\frac{b}{2^k}}(x_0)$. Далее, $2^k < \frac{b}{\delta}$, $k \ln 2 < \ln \frac{b}{\delta}$. Возьмем $k = \left[\frac{\ln b/\delta}{\ln 2}\right]$, $\zeta = 1 - \frac{1}{q}$. Тогда

$$\begin{aligned} A(u, \Pi_\delta(x_0)) &< \zeta^k A(u, G) < \zeta^{\frac{\ln \frac{b}{\delta}}{\ln 2} - 1} A(u, G) = e^{\frac{\ln \frac{b}{\delta}}{\ln 2} \ln \frac{b}{\delta} - \ln \zeta} A(u, G) \\ &= e^{\left(\frac{\ln \zeta}{\ln 2} - \frac{\ln \zeta}{\ln \frac{b}{\delta}}\right) \ln \frac{b}{\delta}} A(u, G) = (e^{\ln \frac{b}{\delta}})^{\left(\frac{\ln \zeta}{\ln 2} - \frac{\ln \zeta}{\ln \frac{b}{\delta}}\right)} A(u, G) \\ &= \left(\frac{b}{\delta}\right)^{\left(\frac{\ln \zeta}{\ln 2} - \frac{\ln \zeta}{\ln \frac{b}{\delta}}\right)} A(u, G) = \left(\frac{\delta}{b}\right)^{\left|\frac{\ln \zeta}{\ln 2} - \frac{\ln \zeta}{\ln \frac{b}{\delta}}\right|} A(u, G) \leq \left(\frac{\delta}{b}\right)^{\left|\frac{\ln \zeta}{\ln 2}\right| - \left|\frac{\ln \zeta}{\ln \frac{b}{\delta}}\right|} A(u, G) \end{aligned}$$

при любом $\delta \leq b$, $x_0 \in G^d$, $b \leq d$.

Если обозначить $\xi = \left|\frac{\ln \zeta}{\ln 2}\right|$ и $\sigma = \left|\frac{\ln \zeta}{\ln \frac{b}{\delta}}\right|$, то получим

$$A(u, \Pi_\delta(x_0)) \leq \left(\frac{\delta}{b}\right)^{\xi - \sigma} A(u, G).$$

В наших обозначениях $A(u, G) = N_f$, $t = \delta$, $\varkappa = \lambda$,

$$\int\limits_0^1 \left[\eta^{-\xi} \int\limits_{\Pi_\eta(x_0)} u^2 \, dx\right]^{1/2} \frac{d\eta}{\eta} \leq C \int\limits_0^1 \frac{db}{b^{1 - \frac{1}{2}\sigma}} < \infty.$$

Из $0 < \xi < 1$, $\xi = \varkappa_1 a_1 + \dots + \varkappa_n a_n$ следует, что $u \in L_{2,a,\varkappa,1}(G^d) \in L_{2,a,\varkappa,\tau}(G^d)$, а также $D^{\frac{1}{\lambda_i}} u \in L_{2,a,\varkappa,\tau}(G^d)$. Если проверить условия теоремы 1, то окажется, что $\mu_i > 0$, $\mu_{i,0} > 0$ при $0 < \eta < 1$ и выполняются условия теорем 1 и 2. Таким образом, по теореме 1 $D^\nu u$ непрерывна на G^d, а по теореме 2 $D^\nu u$ удовлетворяет условию Гёльдера, т. е.

$$\sup_{x \in G} |D^\nu u(x + \gamma) - D^\nu u(x)| \leq c\|u\|_{W^l_{2,a,\varkappa,\tau}(G)} |\gamma|^{\beta^1},$$

где β^1 — число, удовлетворяющее неравенствам (40).

Рассмотрим теперь неоднородное квазиэллиптическое уравнение. Пусть $a_{\alpha\beta} = 0$, за исключением тех $a_{\alpha\beta}$, для которых $(\alpha, \lambda) = (\beta, \lambda) = 1$, а правые части уравнения (49) уже могут быть ненулевыми, т. е. уравнение имеет вид

$$\sum_{(\alpha,\lambda)=(\beta,\lambda)=1} D^\alpha(a_{\alpha\beta}, D^\beta u) = \sum_{(\alpha,\lambda)\le 1} D^\alpha f_\alpha. \tag{54}$$

Пусть $x_0 \in G^d$, $0 < \delta < d$, $b < d$. Рассмотрим решения u_{b,x_0} уравнения (54) в $\Pi_b(x_0)$ из $\overset{\circ}{W}{}^l_2(\Pi_b(x_0))$. Решение понимается в обобщенном смысле, т. е. справедливо тождество

$$\sum_{(\alpha,\lambda)=1,\,(\beta,\lambda)=1} (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Pi_b(x_0)} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u_{b,x_0} D^\alpha \vartheta dx = \sum_{(\alpha,\lambda)\le 1} (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Pi_b(x_0)} f_\alpha D^\alpha \vartheta\, dx \tag{55}$$

при любой $\vartheta \in \overset{\circ}{W}{}^l_2(\Pi_b(x_0))$. Существование такого решения доказывается функциональным методом на основании теоремы Рисса.

Положив в (55) $\vartheta \equiv u_{b,x_0}$, получим

$$\int\limits_{\Pi_b(x_0)} \sum_{(\alpha,\lambda)=1} (D^\alpha u_{b,x_0})^2 dx \le \sum_{(\alpha,\lambda)\le 1} b^{2-2(\alpha,\lambda)} \int\limits_{\Pi_b(x_0)} f_\alpha^2 dx. \tag{56}$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Pi_b(x_0)} \sum_{(\alpha,\lambda)=1} (D^\alpha u_{b,x_0})^2 dx \le \sum_{(\alpha,\lambda)<1} b^{2-2(\alpha,\lambda)} \int\limits_{\Pi_b(x_0)} f_\alpha^2 dx + \sum_{(\alpha,\lambda)=1} \int\limits_{\Pi_b(x_0)} f_\alpha^2 dx \le C b^\Delta,$$

если $\Delta = \min\limits_{(\alpha,\lambda)<1}[2 - 2(\alpha,\lambda), |\varkappa, a|]$. Тогда

$$\int\limits_{\Pi_b(x_0)} \sum_{(\alpha,\lambda)=1} (D^\alpha u_{b,x_0})^2 dx \le C_1 b^\Delta, \quad \Delta > 0, \tag{57}$$

здесь C_1 и Δ не зависят от u, x_0. Функция $\bar{u} = u - u_{b,x_0}$ — решение однородного уравнения (49) в $\Pi_b(x_0)$, следовательно, для нее справедливо неравенство

$$A(\bar{u}, \Pi_\delta(x_0)) \le C_2 \left(\frac{\delta}{b}\right)^{\xi-\sigma} A(\bar{u}, G) \tag{58}$$

для любого $\delta < b$, если $x_0 \in G^b$, $\xi, \sigma = \mathrm{const} > 0$,

$$A(u, \Pi_b(x_0)) \le 2A(\bar{u}, \Pi_b(x_0)) + 2A(u_{\delta,x_0}, \Pi_b(x_0)).$$

Из неравенств (57) и (58) получаем, что $(b^\Delta = \left(\frac{\delta}{b}\right)^{\xi-\sigma})$

$$A(u, \Pi_b(x_0)) \le C_2 \left(\frac{\delta}{b}\right)^{\xi-\sigma} A(u, G) + C_3 b^\Delta \le C_4 \left(\frac{\delta}{b}\right)^{\xi-\sigma}, \tag{59}$$

$$\int\limits_0^1 \left(\delta^{-\xi} \int\limits_{\Pi_\delta(x_0)} u^2\, dx\right)^{1/2} \frac{d\delta}{\delta} \le C \int\limits_0^1 \frac{db}{b^{1-\frac{1}{2}\sigma}} < \infty.$$

Применяя теоремы 1 и 2, получаем, что $D^\nu u$ непрерывна и удовлетворяет условию Гёльдера на G.

Рассмотрим уравнение (49). Обобщенное решение уравнения (49) является обобщенным решением уравнения

$$\sum_{(\alpha,\lambda)=(\beta,\lambda)=1} D^\alpha a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u = \sum_{(\alpha,\lambda)\le 1} D^\alpha f^1_\alpha,$$

здесь $f^1_\alpha = f_\alpha - \sum\limits_{(\beta,\lambda)<1} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u$, так что $f^1_\alpha \in L_2(G)$ и для решения (49) справедливы все утверждения относительно решения уравнение (54).

Теорема доказана.

Автор искренне благодарит профессоров А. Дж. Джабраилова, В. С. Гулиева и Г. В. Демиденко за внимание к работе и сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. Москва: Наука, 1996.
   Интегральные представления функций и теоремы вложения.
2. *Ильин В. П.* О некоторых свойствах функций из пространств $W^l_{p,a,\varkappa}(G)$ // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1971. Т. 23. С. 33–40.
3. *Giusti E.* Equazioni quassi elliptic c spazi $S^{p,\theta}(\Omega,\delta)$. I // Ann. Math. Pure Appl. Ser. 4. 1967. V. 75. P. 313–353.
4. *Arkeryd L.* On L^p estimates for quasi-elliptic boundary problems // Math. Scand. 1969. V. 24, N 1. P. 141–144.
5. *Багиров Л. А.* Априорные оценки, теоремы существования и поведение на бесконечности решений квазиэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$ // Мат. сб. 1979. Т. 110, № 4. С. 475–492.
6. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
7. *Гусейнов Р. В.* О гладкости решений одного класса квазиэллиптических уравнений // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1992. № 6. С. 10–14.
8. *Филатов П. С.* Локальные анизотропные гёльдеровы оценки решений уравнения квазиэллиптического типа // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 6. С. 1397–1409.

Статья поступила 17 сентября 2002 г., окончательный вариант — 8 октября 2004 г.

Наджафов Алик Малик оглы
Азербайджанский архитектурно-строительный университет,
кафедра высшей математики,
ул. А. Султанова, 5, Az-1073 Баку, Азербайджан
nadjafov@rambler.ru