Сибирский математический журнал
Июль—август, 2005. Том 46, № 4

УДК 510.56

О ДОПУСТИМЫХ ПРЕДИКАТАХ НА ДОПУСТИМЫХ МНОЖЕСТВАХ

А. С. Морозов

Аннотация: Изучаются допустимые предикаты, т. е. такие предикаты, добавление которых в сигнатуру допустимого множества сохраняет свойства «быть допустимым множеством». Показано, что их семейство далеко не ограничивается Δ-определимыми предикатами. Построен пример такого семейства допустимых предикатов мощности 2^{ω}, что одновременное добавление в сигнатуру любых двух предикатов из этого семейства уже выводит за класс допустимых множеств, а также даны другие примеры семейств допустимых предикатов.

Ключевые слова: допустимое множество, допустимый предикат, обобщенная вычислимость.

В работе в основном использованы стандартные определения и обозначения из теории допустимых множеств, содержащиеся в $[1, 2]$.

В теории вычислимости весьма важную роль играет понятие оракула. В классической теории под оракулом обычно понимается некоторый предикат на натуральных числах, играющий в процессе вычисления роль подпрограммы-функции, выходными значениями которой могут быть только 0 и 1. При этом можно считать, что метод, который используется для определения значений этой функции, скрыт от нас, а в остальном используемое нами вычислительное устройство является вполне обычным.

В рамках одной из интерпретаций допустимых множеств, рассматривающих их как вычислительные устройства, в которых программами являются Σ-формулы, мы можем рассматривать в качестве оракулов предикаты на этих допустимых множествах. Естественным ограничением здесь является требование, чтобы при добавлении этих предикатов в качестве примитивных средств программирования то, что мы получим в результате, т. е. допустимое множество с добавленным в сигнатуру предикатом, снова могло бы быть проинтерпретировано как вычислительное устройство. Иначе говоря, если $\mathbb{A}$ — допустимое множество и мы намереваемся использовать $R \subseteq \mathbb{A}$ в качестве оракула, то $\langle \mathbb{A}; R \rangle$ должно быть моделью теории KPU. Предикаты, удовлетворяющие этому условию, называют *допустимыми предикатами.*

Таким образом, при вышеупомянутой интерпретации допустимых множеств, допустимые предикаты можно рассматривать как интерпретацию для понятия оракула.

Первое, с чем можно столкнуться при осмыслении данной аналогии, это то, что в отличие от классического случая уже не всякий предикат годится в

Работа поддержана международным Российско-Германским грантом РФФИ–ННИО (№ 01–01–04003 ННИОа), Фондом содействия отечественной науке и Грантом ведущих научных школ (код проекта НШ 2112.2003.1).

качестве оракула. Эта проблема не возникает при рассмотрении допустимых множеств вида $\mathrm{HF}_{\mathfrak{M}}$, поскольку для любого $R \subseteq \mathrm{HF}_{\mathfrak{M}}$ модель $\langle \mathrm{HF}_{\mathfrak{M}}; R\rangle$ снова является моделью теории KPU. (Классической теории соответствует допустимое множество $\mathrm{HF}_{\varnothing}$.) Если же мы рассмотрим допустимое множество HYP_{ω}, то даже добавление некоторых подмножеств ω может привести к потере свойства «быть допустимым множеством». В качестве примера достаточно рассмотреть любое вполне упорядочение R множества ω по типу ω_1^{CK} и взять кодирующее его множество $S \subseteq \omega$. В модели $\langle \mathrm{HYP}_{\omega}; S\rangle$ в этом случае будет определимо Σ-отображение из ω на ω_1^{CK}, что по аксиоме Σ-выборки приводит к противоречию: $\omega_1^{\mathrm{CK}} \in \mathrm{HYP}_{\omega}$.

Нетрудно показать (см. [2]), что любой предикат, определимый в $\mathbb{A}$ вместе со своим дополнением Σ-формулами с параметрами, является допустимым. Из данной работы следует, что класс допустимых предикатов, однако, далеко не исчерпывается такими предикатами.

Мы будем обозначать класс всех множеств, построенных исходя из семейства праэлементов, образующих модель $\mathfrak{M}$, через $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$. Через $\mathrm{TC}(x)$ будем обозначать операцию взятия транзитивного замыкания. Ограничение функции f на множество a будем обозначать через $f \upharpoonright a$, ограничение предиката R на множество a — через $R \upharpoonright a$. Мы обозначаем Σ-операцию выделения i-го компонента из n-ки через $(\cdot)_i$, т. е. если $a = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$, то $x_i = (a)_i$, $i = 1, \dots, n$. Для кодирования пар натуральных чисел зафиксируем специальные рекурсивные функции c, ℓ и r, удовлетворяющие тождествам $c(\ell(x), r(x)) = x$, $\ell(c(x,y)) = x$, $r(c(x,y)) = y$.

Напомним, что допустимое множество называется *рекурсивно развернутым,* если существует Σ-определимое отображение из его ординала на все это множество. Известно, например, что множество HYP_{ω} рекурсивно развернуто [2].

Мы докажем следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{A}$ — счетное рекурсивно развернутое допустимое множество, ординал которого больше, чем ω. Тогда существует семейство допустимых унарных предикатов мощности 2^{ω} такое, что добавление любых двух различных предикатов из этого семейства в сигнатуру модели $\mathbb{A}$ приводит к потере свойства «быть допустимым множеством».*

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{A}$ — счетное рекурсивно развернутое допустимое множество. Тогда существует семейство $(R_\xi)_{\xi\in 2^{\omega}}$ подмножеств ординала $o(\mathbb{A})$ такое, что*

1) *для любого конечного семейства $J \subseteq 2^{\omega}$ модель $\langle \mathbb{A}; R_j\rangle_{j\in J}$ является допустимым множеством;*

2) *для любого конечного семейства $J \subseteq 2^{\omega}$ и для любого $k \in 2^{\omega} \setminus J$ множество R_k не Δ-определимо в модели $\langle \mathbb{A}; R_j\rangle_{j\in J}$.*

Снова сделаем несколько методологических замечаний. Как уже отмечалось, допустимые предикаты могут ассоциироваться с оракулами для допустимых множеств, рассматриваемых как вычислительные устройства. Из приведенных результатов выясняется, что, даже если предикаты годятся по отдельности для использования в качестве оракулов, они не всегда могут годиться для совместного использования в качестве оракулов. Теоремы 1, 2 показывают, что тем не менее подходящих оракулов и семейств, внутри которых не возникает таких проблем, существует достаточно много. Уточним сказанное следующим образом.

Определение. Семейство предикатов Γ на допустимом множестве $\mathbb{A}$ назовем *совместным*, если после одновременного добавления любого конечного набора предикатов из Γ в сигнатуру $\mathbb{A}$ полученная модель остается допустимым множеством.

Следствие 3. *Для любого счетного рекурсивно развернутого допустимого множества*

1) *существует совместное семейство предикатов мощности* 2^ω;

2) *существует не менее* 2^ω *попарно различных максимальных совместных семейств предикатов.*

Доказательство следствия. П. 1 является переформулировкой теоремы 2. П. 2 следует из теоремы 1 и леммы Цорна. Следствие доказано.

Отметим также, что теоремы 2 и 1 могут быть проинтерпретированы как некоторые утверждения об устройстве структур Σ-сводимости на допустимых множествах в рамках определений работы [3].

Мы начнем доказательство основных теорем с вспомогательных утверждений.

Истинность следующей леммы легко устанавливается индукцией по сложности формул.

Лемма 1. *Пусть B и C — произвольные транзитивные подмножества в $\mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$, причем $B \subseteq C$. Пусть также на C заданы некоторые унарные предикаты $R_1, \dots, R_k$, и пусть $\psi(x_1, \dots, x_k)$ — произвольная Δ_0-формула в сигнатуре, расширенной символами для $R_1, \dots, R_k$. Тогда для любого набора $\bar{q} = q_1, \dots, q_s \in B$ выполнено*

$$\langle B; R_1 \restriction B, \dots, R_k \restriction B\rangle \models \psi(\bar{q}) \Leftrightarrow \langle C; R_1, \dots, R_k\rangle \models \psi(\bar{q}).$$

Напомним, что подмножество $R \subseteq \mathbb{A}$ называется *регулярным,* если для любого $a \in \mathbb{A}$ выполнено $R \cap a \in \mathbb{A}$. Нетрудно проверить, что

1) произвольное отображение f из $o(\mathbb{A})$ в $\{0, 1\}$ регулярно в том и только в том случае, когда для любого $a \in \mathbb{A}$ выполнено $f \restriction a \in \mathbb{A}$;

2) любой предикат $R \subseteq \mathbb{A}$ регулярен тогда и только тогда, когда регулярна его характеристическая функция χ_R.

Следующая лемма дает нам некоторое ограничение (необходимое и достаточное), выполнив которое при построении предиката $R \subseteq \mathbb{A}$, мы гарантированно получим выполнимость схемы аксиом Δ_0-выделения на модели $\langle\mathbb{A}; R\rangle$. Из этой леммы следует, что если мы будем строить характеристическую функцию χ_R предиката R как объединение возрастающей цепочки функций:

$$d_0 \subseteq d_1 \subseteq d_2 \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{i<\omega} d_i = \chi_R,$$

при этом для всех $i < \omega$ будет выполнено $d_i \in \mathbb{A}$, то тогда $\langle\mathbb{A}; R\rangle$ будет удовлетворять схеме Δ_0-выделения. Это свойство будет использовано в конструкции.

Лемма 2. *Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество и $R_1, \dots, R_k \subseteq \mathbb{A}$ — унарные предикаты. Тогда модель $\langle\mathbb{A}, R_1, \dots, R_k\rangle$ удовлетворяет схеме аксиом Δ_0-выделения тогда и только тогда, когда предикаты $R_1, \dots, R_k$ регулярны.*

Доказательство леммы. Предположим, что модель $\langle\mathbb{A}, R\rangle$ удовлетворяет схеме аксиом Δ_0-выделения. Тогда, в частности, и $R_i \cap a = \{x \in a \mid x \in R_i\} \in \mathbb{A}$ для любых $a \in \mathbb{A}$ и $i = 1, \dots, k$, т. е. все предикаты R_i регулярны.

Докажем обратную импликацию. Пусть предикаты $R_1,\dots,R_k$ регулярны, и пусть $\varphi(x,\bar p)$ — произвольная Δ_0-формула сигнатуры, расширенной унарными символами для $R_1,\dots,R_k$, с параметрами $\bar p = p_1,\dots,p_s \in \mathbb{A}$, и пусть $a \in \mathbb{A}$. Требуется показать, что $\{x \in a \mid \varphi(x,\bar p)\} \in \mathbb{A}$.

Положим $b = \mathrm{TC}(\{a,p_1,\dots,p_s\})$. По лемме 1 для любого $x \in b$ имеем

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{A}, R_1,\dots,R_k\rangle \models \varphi(x,\bar p) &\Leftrightarrow \langle b, R_1\restriction b,\dots,R_k\restriction b\rangle \models \varphi(x,\bar p)\\ &\Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, R_1\restriction b,\dots R_k\restriction b\rangle \models \varphi(x,\bar p). \qquad (1)\end{aligned}$$

Заменив в формуле $\varphi(x,\bar p)$ все вхождения подформул вида $R_i(x)$ на $x \in c_i$, где $c_i = R_i \cap b$, получим новую Δ_0-формулу $\varphi^*(x,\bar p,c_1,\dots,c_k)$, уже не содержащую предикатных символов $R_1,\dots,R_k$, для которой в силу $a \subseteq b$ и (1), очевидно, выполняется

$$\{x \in a \mid \langle \mathbb{A}, R_1,\dots,R_k\rangle \models \varphi(x,\bar p)\} = \{x \in a \mid \mathbb{A} \models \varphi^*(x,\bar p,c_1,\dots,c_k)\},$$

откуда и следует лемма. Лемма доказана.

Положим $\mathscr{F}(\mathbb{A}) \leftrightharpoons \{f \in \mathbb{A} \mid \exists \alpha \in o(\mathbb{A})\,(f : \alpha \to \{0,1\})\}$.

При построении предикатов нам будет удобнее работать с их характеристическими функциями. Введем новое обозначение. Если $h_1,\dots,h_k$ — конечная последовательность произвольных функций и ψ — некоторая формула, а $Q_1,\dots,Q_k$ — унарные предикатные символы, то через $\psi\,\begin{matrix}h_1,\dots,h_k\\ Q_1,\dots,Q_k\end{matrix}$ будем обозначать результат одновременной замены в формуле ψ всех вхождений подформул вида $Q_1(v),\dots,Q_k(v)$ утверждениями $\langle v,1\rangle \in h_1,\dots,\langle v,1\rangle \in h_k$ соответственно. Заметим, что если функции $h_1,\dots,h_k$ взяты из $\mathscr{F}(\mathbb{A})$, то все утверждения $\langle v,1\rangle \in h_1,\dots,\langle v,1\rangle \in h_k$ эквивалентны Δ_0-формулам с параметрами $h_1,\dots,h_k$, и поэтому результат такой подстановки в Δ_0-формулу (Σ-формулу) можно рассматривать как Δ_0-формулу (Σ-формулу).

Лемма 3. *Пусть $\mathbb{A}$ — рекурсивно развернутое допустимое множество, $f_1,\dots,f_s \in \mathscr{F}(\mathbb{A})$, $\varphi(x,y,z_1,\dots,z_k)$ — Δ_0-формула в языке, расширенном новыми унарными предикатными символами $R_1,\dots,R_s$ и a, $p_1,\dots,p_k \in \mathbb{A}$. Тогда существуют $f_1',\dots,f_s' \in \mathscr{F}(\mathbb{A})$ такие, что $f_i' \supseteq f_i$, $i = 1,\dots,s$, и выполнено одно из двух условий:*

1) существует $b \in \mathbb{A}$ такое, что для любых $f_1'',\dots,f_s'' \in 2^{o(\mathbb{A})}$, удовлетворяющих условиям $f_i'' \supseteq f_i'$, $i = 1,\dots,s$, выполнено

$$\mathbb{A} \models \forall x \in a\, \exists y \in b\, \varphi(x,y,p_1,\dots,p_k)\,\begin{matrix}f_1'',\dots,f_s''\\ R_1,\dots,R_s\end{matrix};$$

2) для любых регулярных $f_1'',\dots,f_s'' \in 2^{o(\mathbb{A})}$, удовлетворяющих условиям $f_i'' \supseteq f_i'$, $i = 1,\dots,s$, выполнено

$$\mathbb{A} \models \neg\forall x \in a\, \exists y\, \varphi(x,y,p_1,\dots,p_k)\,\begin{matrix}f_1'',\dots,f_s''\\ R_1,\dots,R_s\end{matrix}.$$

Доказательство леммы. Зафиксируем некоторое Σ-отображение e из $o(\mathbb{A})$ на $\mathbb{A}$. Под *номером* элемента $x \in \mathbb{A}$ мы будем понимать любой ординал $\zeta \in o(\mathbb{A})$ такой, что $e(\zeta) = x$. Из рекурсивной развернутости множества $\mathbb{A}$ также следует существование некоторого ординала $\gamma_0 < o(\mathbb{A})$ и отображения $g \in \mathbb{A}$ из γ_0 на a. Зафиксируем это отображение и определим по индукции Σ-отображение h.

Значение $h(\delta)$, $\delta < \gamma_0$, определяется следующим образом. Если все значения $h(\zeta)$, $\zeta < \delta$, определены, то сначала ищем элемент $\langle \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_s, y_0 \rangle \in \mathscr{F}(\mathbb{A})^s \times \mathbb{A}$ с наименьшим номером такой, что

1) $f_i \cup \bigcup\limits_{\zeta<\delta} (h(\zeta))_i \subseteq \hat{f}_i$ для всех $i = 1, \ldots, s$;

2) $\mathbb{A} \models \varphi(g(\delta), y_0, p_1, \ldots, p_k) \begin{array}{l} \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_s \\ R_1, \ldots, R_s \end{array}$.

Далее, пусть β — наименьший ординал, не содержащийся в множестве $c = \mathrm{TC}(\{g(\delta), \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_s, y_0, p_1, \ldots, p_k\})$. Расширим все $\hat{f}_i$, $i = 1, \ldots, s$, нулевыми значениями на ординал β. Получим значения $f_1^*, \ldots, f_s^*$. Положим значение $h(\delta)$ равным $\langle f_1^*, \ldots, f_s^* \rangle$.

Следующие свойства функции h легко следуют из ее определения и леммы 1.

1. Областью определения h является начальный сегмент ординала γ_0.

2. Значения функции $(h(\alpha))_j$, $j = 1, \ldots, s$, образуют монотонную цепочку элементов из $\mathscr{F}(\mathbb{A})$:

$$(h(0))_j \subseteq (h(1))_j \subseteq \cdots \subseteq (h(\xi))_j \subseteq \ldots.$$

3. Если значение $h(\delta)$ определено, то для любого набора $q_1, \ldots, q_n \in 2^{o(\mathbb{A})}$ такого, что $(h(\delta))_j \subseteq q_j$, $j = 1, \ldots, s$, выполнено

$$\mathbb{A} \models \exists y\, \varphi(g(\delta), y, p_1, \ldots, p_k) \begin{array}{l} q_1, \ldots, q_s \\ R_1, \ldots, R_s \end{array}.$$

Последнее свойство следует из того, что в этом случае для транзитивного элемента $c = \mathrm{TC}(\{g(\delta), \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_s, y_0, p_1, \ldots, p_k\}) \in \mathbb{A}$ вместе с предикатами, унаследованными от $\mathbb{A}$, обозначаемыми здесь через «__», будет выполнено

$$\langle c, \underline{\quad} \rangle \models \varphi(g(\delta), y_0, p_1, \ldots, p_k) \begin{array}{c} (h(\delta))_1 \restriction c, \ldots, (h(\delta))_s \restriction c \\ R_1, \ldots, R_s \end{array},$$

откуда по лемме 1 получим искомое

$$\mathbb{A} \models \exists y\, \varphi(g(\delta), y, p_1, \ldots, p_k) \begin{array}{l} q_1, \ldots, q_s \\ R_1, \ldots, R_s \end{array}.$$

Предположим, что значение $h(\beta)$ определено для всех $\beta < \gamma_0$. Покажем, что тогда реализуется случай 1 леммы. Пусть $f_i^* = f_i \cup \bigcup\limits_{\beta<\gamma_0} (h(\beta))_i$, $i = 1, \ldots, s$. Заметим, что для всех $i = 1, \ldots, s$ выполнено $f_i^* \in \mathscr{F}(\mathbb{A})$. Из вышеуказанных свойств следует, что для любых $q_1, \ldots, q_s \in 2^{o(\mathbb{A})} \cup \mathscr{F}(\mathbb{A})$ таких, что $f_i^* \subseteq q_i$, $i = 1, \ldots, s$, выполнено

$$\mathbb{A} \models \forall x \in a \exists y\, \varphi(x, y, p_1, \ldots, p_k) \begin{array}{l} q_1, \ldots, q_s \\ R_1, \ldots, R_s \end{array}.$$

Отсюда по схеме аксиом Δ_0-выборки получим существование $b \in \mathbb{A}$ такого, что

$$\mathbb{A} \models \forall x \in a \exists y \in b\, \varphi(x, y, p_1, \ldots, p_k) \begin{array}{l} f_1^*, \ldots, f_s^* \\ R_1, \ldots, R_s \end{array}.$$

Возьмем теперь минимальный ординал α_0, не содержащийся в множестве $\mathrm{TC}(\{f_1^*, \ldots, f_s^*, a, b, p_1, \ldots, p_k\})$. Доопределим все f_i^* на множестве α_0 нулевыми значениями. Полученные отображение обозначим через $f_1', \ldots, f_s'$. Нетрудно убедиться, что $f'_i \in \mathbb{A}$ для всех $i = 1, \dots, s$ и что $f'_1, \dots, f'_s$ удовлетворяют случаю данной леммы.

Если значение $h(\beta)$ определено не для всех $\beta < \gamma_0$, то тогда существует наименьший ординал $\beta_0 < \gamma_0$, для которого $h(\beta_0)$ не определено. Положим $f'_i \leftrightharpoons f_i \cup \bigcup\limits_{\beta<\beta_0} (h(\beta))$, $i = 1, \dots, s$. Заметим, что все f'_i принадлежат $\mathbb{A}$. Покажем, что эти элементы годятся для второго случая леммы. Предположим противное. Пусть регулярные отображения $f''_1, \dots, f''_s \in 2^{o(\mathbb{A})}$ таковы, что $f''_i \supseteq f'_i$ для всех $i = 1, \dots, s$ и

$$\mathbb{A} \models \forall x \in a \exists y\, \varphi(x, y, p_1, \dots, p_k)\, \begin{matrix} f''_1, \dots, f''_s \\ R_1, \dots, R_s \end{matrix}.$$

Тогда, в частности, и

$$\mathbb{A} \models \exists y\, \varphi(g(\beta_0), y, p_1, \dots, p_k)\, \begin{matrix} f''_1, \dots, f''_s \\ R_1, \dots, R_s \end{matrix}.$$

Выберем некоторое $y_0 \in \mathbb{A}$ такое, что

$$\mathbb{A} \models \varphi(g(\beta_0), y_0, p_1, \dots, p_k)\, \begin{matrix} f''_1, \dots, f''_s \\ R_1, \dots, R_s \end{matrix}.$$

Учитывая регулярность $f''_1, \dots, f''_s$, можно рассуждениями, аналогичными проведенным ранее, построить расширения $\hat{f}_1 \supseteq f'_1, \dots, \hat{f}_s \supseteq f'_s$, $\hat{f}_i \in \mathscr{F}(\mathbb{A})$, $i = 1, \dots, s$, такие, что

$$\mathbb{A} \models \varphi(g(\beta_0), y_0, p_1, \dots, p_k)\, \begin{matrix} \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_s \\ R_1, \dots, R_s \end{matrix}.$$

Отсюда следует, что значение $h(\beta_0)$ будет определено; противоречие. Лемма доказана.

Заметим, что в последней лемме для любых регулярных предикатов $R_1, \dots, R_s \subseteq o(\mathbb{A})$ таких, что $\chi_{R_1} \supseteq f'_1, \dots, \chi_{R_s} \supseteq f'_s$, будет выполнен частный случай схемы аксиом Δ_0-выборки:

$$\langle \mathbb{A}; R_1, \dots, R_s \rangle \models \forall x \in a\, \exists y\, \varphi(x, y, \bar{p}) \to \exists b\, \forall x \in a\, \exists y \in b\, \varphi(x, y, \bar{p}),$$

поскольку при любом дальнейшем доопределении характеристических функций $f'_1, \dots, f'_s$ предикатов до всюду определенных регулярных характеристических функций в рассматриваемом условии либо будет неверна посылка, либо будет верно заключение.

Лемма 4. *Пусть $\exists y \varphi(y, \bar{p})$ — Σ_1-формула в языке, расширенном унарными предикатами $R_1, \dots, R_k$, с параметрами $\bar{p} = p_1, \dots, p_s$, и пусть $\widehat{R}_1, \dots, \widehat{R}_k \subseteq o(\mathbb{A})$ — предикаты такие, что $\langle \mathbb{A}, \widehat{R}_1, \dots, \widehat{R}_k \rangle \models \exists y\, \varphi(y, \bar{p})$. Тогда существуют отображения $f_i \subseteq \chi_{\widehat{R}_i}$, $i = 1, \dots, k$, такие, что $\mathrm{dom}(f_i) \in o(\mathbb{A})$ и для любых $R'_i \subseteq o(\mathbb{A})$, $i = 1, \dots, k$, таких, что $f_i \subseteq \chi_{R'_i}$, $i = 1, \dots, k$, выполнено $\langle \mathbb{A}, R'_1, \dots, R'_k \rangle \models \exists y\, \varphi(y, \bar{p})$. При этом если $\widehat{R}_i$, $i = 1, \dots, k$, — регулярные предикаты, то можно выбрать все f_i из $\mathscr{F}(\mathbb{A})$.*

Доказательство леммы. Предположим, что выполнено

$$\langle \mathbb{A}, \widehat{R}_1, \dots, \widehat{R}_k \rangle \models \exists y\, \varphi(y, \bar{p}).$$

Возьмем некоторое $y = y_0$, существование которого утверждается, и положим $b = \mathrm{TC}(\{y_0, p_1, \dots, p_s\})$. По лемме 1 имеем $\langle b, R_1 \restriction b, \dots, R_k \restriction b \rangle \models \varphi(y_0, \bar{p})$.

Возьмем $f_i = \chi_{R_i} \upharpoonright (b \cap o(\mathbb{A}))$. Ввиду транзитивности b в случае регулярности всех предикатов R_i имеем также $f_i \in \mathscr{F}(\mathbb{A})$. Теперь, опять применяя лемму 1, получим, что для любых $R'_i \subseteq \mathbb{A}$ таких, что $f_i \subseteq \chi_{R'}$, выполнено $\langle \mathbb{A}, R'_1, \ldots, R'_k \rangle \models \exists y\, \varphi(y, \bar{p})$. Лемма доказана.

Теперь можно перейти к непосредственному доказательству теорем.

Доказательство теоремы 1. Пусть $(\varphi_i(x,y))_{i<\omega}$ — произвольное перечисление всех Δ_0-формул с конечными наборами параметров из $\mathbb{A}$, существующее ввиду счетности $\mathbb{A}$. Зафиксируем произвольное отображение $a \mapsto a_n$ из ω на $\mathbb{A}$. Зафиксируем также произвольную монотонно возрастающую последовательность ординалов $(\alpha_i)_{i<\omega}$ такую, что $\sup\limits_{i<\omega} \alpha_i = o(\mathbb{A})$. От этих отображений не требуется никакой вычислимости или определимости внутри допустимого множества $\mathbb{A}$.

Зафиксируем некоторое множество $S \subseteq \omega$ и покажем, как можно построить семейство предикатов $(R_\xi)_{\xi \in 2^\omega}$ такое, что для любого $\xi \in 2^\omega$ модель $\langle \mathbb{A}; R_\xi \rangle$ — допустимое множество, а для любых различных $\xi_0, \xi_1 \in 2^\omega$ в модели $\langle \mathbb{A}; R_{\xi_0}, R_{\xi_1} \rangle$ множество S и его дополнение определимы с помощью Σ-формул. Теперь если выбрать множество S так, чтобы оно кодировало отношение $<_S = \{\langle (s)_0, (s)_1 \rangle \mid s \in S\}$, вполне упорядочивающее ω по типу $o(\mathbb{A})$, то предположение о том, что $\langle \mathbb{A}; R_{\xi_0}, R_{\xi_1} \rangle$ — допустимое множество, приводит к противоречию, а именно, из этого следует существование в данном допустимом множестве взаимно-однозначного Σ-отображения из ω на $o(\mathbb{A})$, что противоречит принципу Σ-выборки.

Мы построим по шагам семейство функций $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in 2^{<\omega}}$ так, чтобы предикаты R_ξ с характеристическими функциями $\chi_{R_\xi} = \bigcup\limits_m f_{\xi \upharpoonright m}$ удовлетворяли условиям теоремы. В результате каждого шага t для всех $\varepsilon \in 2^t$ будут определены функции f_ε.

Построение.

Шаг 0. Полагаем $f_\varnothing = \varnothing$.

Шаг $t+1$. Расположим все $\varepsilon \in 2^t$ в некотором порядке и последовательно для каждого из них проделаем следующее.

1. Для каждого частного случая аксиомы Δ_0-выборки

$$\forall x \in a_l\, \exists y \varphi_i(x,y) \to \exists b\, \forall x \in a_l\, \exists y \in b\, \varphi_i(x,y), \quad i, l < t, \tag{2}$$

последовательно расширим f_ε, как в лемме 3, чтобы гарантировать выполнение всех формул с параметрами (2) на любой модели $\langle \mathbb{A}; R \rangle$, где R — регулярный предикат, характеристическая функция которого содержит данное расширение. В результате получим функцию f'_ε.

2. Расширяем точно такими же кусками все остальные текущие значения функций f_θ, $\theta \in 2^t \setminus \{\varepsilon\}$, т. е. добавляем к ним множество пар $f'_\varepsilon \setminus f_\varepsilon$.

После этого еще раз расширим все полученные функции нулевыми значениями так, чтобы их области определения совпадали и содержали ординал α_t.

В результате получим некоторые значения $g_\varepsilon \in \mathscr{F}(\mathbb{A})$ такие, что $g_\varepsilon \supseteq f_\varepsilon$ для всех $\varepsilon \in 2^t$. Теперь задача состоит в том, чтобы расширить каждое значение g_ε, $\varepsilon \in 2^t$, до функций $f_{\varepsilon 0}$ и $f_{\varepsilon 1}$ таким образом, чтобы по любой паре f_ε, f_θ, $\varepsilon, \theta \in 2^{t+1}$, $\varepsilon \neq \theta$, можно было определить, истинно ли утверждение $t \in S$.

Предлагается следующий способ расширения. Для получения функции f_ε, $\varepsilon \in 2^{t+1}$ надо взять ε' равным ε без последнего элемента и расширить функцию

$g_{\varepsilon'}$, удлинив ее область определения еще на ω и дав ей на этом добавленном отрезке нулевые значения, потом еще раз удлинив ее область определения на ω и дав ей в качестве значений на этом добавленном сегменте последовательно следующий набор из 0 и 1 (здесь $\varepsilon = \varepsilon_0 \dots \varepsilon_t$):

$$\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_t,\ \chi_S(t),\ 1,\ 0,\ 0, \dots.$$

Проверим, что если определить для всех $\xi \in 2^\omega$ предикат R_ξ как такое подмножество $o(\mathbb{A})$, характеристическая функция которого равна $\bigcup\limits_{m\in\omega} f_{\zeta\restriction m}$, то каждая модель $\langle \mathbb{A}; R_\xi\rangle$ будет допустимым множеством. В самом деле, по построению все предикаты R_ξ регулярны. Отсюда по лемме 2 получается выполнение схемы аксиом Δ_0-выделения. Из леммы 3 и сделанного после нее замечания следует, что и схема аксиом Δ_0-выборки также выполнена на каждой модели $\langle \mathbb{A}; R_\xi\rangle$.

Нетрудно написать Σ-формулы, не зависящие от ξ_0 и ξ_1 и при любых различных $\xi_0, \xi_1 \in 2^\omega$ определяющие в модели $\langle \mathbb{A}; R_{\xi_0}, R_{\xi_1}\rangle$ множество S и его дополнения с точностью до конечного числа элементов. Покажем, как это можно сделать. Предикаты R_ξ неформально устроены следующим образом: последовательность значений их характеристических функций состоит из последовательно расположенных ω сегментов $H_1, C_{1,\xi},\ H_2, C_{2,\xi},\ H_3, C_{3,\xi}, \dots,$ причем сегменты H_i являются общими для всех ξ, а сегменты $C_{i,\xi}$ начинаются с предельного ординала, имеют длину ω и в каждом сегменте $C_{i,\xi}$ закодировано $\xi \restriction i$ (в виде последовательности значений

$$\chi_{R_\xi}(\alpha+0), \chi_{R_\xi}(\alpha+1), \dots, \chi_{R_\xi}(\alpha+(i-1))),$$

затем следует значение $\chi_S(i-1)$, наконец, 1, а потом дальше идут значения 0.

Теперь очевидно, что для почти всех $i \in \omega$ условие $i \in S$ эквивалентно

$$\exists\alpha(\mathrm{Lim}(\alpha)\ \&\ \exists m \in i\, \neg(R_{\xi_0}(\alpha+m) \leftrightarrow R_{\xi_1}(\alpha+m)))\ \& \\ R_{\xi_0}(\alpha+i+1)\ \&\ \forall x \in \omega \neg R_{\xi_0}(\alpha+i+2+x)\ \&\ R_{\xi_0}(\alpha+i).$$

Аналогично для почти всех $i \in \omega$ условие $i \notin S$ эквивалентно

$$\exists\alpha(\mathrm{Lim}(\alpha)\ \&\ \exists m \in i\, \neg(R_{\xi_0}(\alpha+m) \leftrightarrow R_{\xi_1}(\alpha+m)))\ \& \\ R_{\xi_0}(\alpha+i+1)\ \&\ \forall x \in \omega \neg R_{\xi_0}(\alpha+i+2+x)\ \&\ \neg R_{\xi_0}(\alpha+i)$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем

(а) строго возрастающую последовательность ординалов $(\alpha_i)_{i<\omega}$ такую, что $\sup\{\alpha_i \mid i < \omega\} = o(\mathbb{A})$;

(б) нумерацию $(\varphi_i(x, y, \overline{Q}))_{i<\omega}$ всех Δ_0-формул с параметрами из $\mathbb{A}$ в языке модели $\mathbb{A}$, расширенном счетным семейством попарно различных унарных предикатных символов $(Q_i)_{i<\omega}$;

(в) нумерацию $(\exists u \Phi_i(x, y, u, \overline{Q}))_{i<\omega}$ всех Σ_1-формул с параметрами из $\mathbb{A}$ в языке модели $\mathbb{A}$, расширенном счетным семейством попарно различных унарных предикатных символов $(Q_i)_{i<\omega}$ (здесь Φ_i — Δ_0-формулы с параметрами);

(г) нумерацию $(a_j)_{j<\omega}$ всех элементов из $\mathbb{A}$.

Будем строить по шагам наше семейство предикатов. Результатом каждого шага t будет конечное семейство функций $(f_\varepsilon)_{\varepsilon\in 2^t} \in (\mathscr{F}(\mathbb{A}))^{2^t}$. При этом будут выполнены следующие условия:

1) $\alpha_m \subseteq \mathrm{dom}(f_\varepsilon)$ для всех $\varepsilon \in 2^{m+1}$;

2) $f_\varepsilon \subseteq f_\sigma \Leftrightarrow \varepsilon \subseteq \sigma$ для всех $\varepsilon, \sigma \in 2^{<\omega}$.

Предикаты, существование которых нам необходимо доказать, получатся как предикаты R_ζ, $\zeta \in 2^\omega$, характеристические функции которых имеют вид

$$\chi_{R_\zeta} = \bigcup_{\varepsilon \in 2^{<\omega},\ \varepsilon \subseteq \zeta} f_\varepsilon.$$

Выполнение условия 2 обеспечит нам, что все R_ζ будут попарно различны. Выполнимость остальных свойств следует из построения и будет доказана ниже.

Построение.

Шаг 0. Определяем $f_\varnothing = \varnothing$;

Шаг $t+1$ состоит из следующих подшагов.

Подшаг А. Обеспечение всюду определенности функций. Доопределим все построенные к данному моменту функции f_ε, $\varepsilon \in 2^t$, нулевыми значениями так, чтобы полученные в результате функции $f_\varepsilon^{(1)} \supseteq f_\varepsilon$, $\varepsilon \in 2^t$, удовлетворяли условиям $\alpha_t \subseteq \mathrm{dom}\, f_\varepsilon^{(1)}$ для всех $\varepsilon \in 2^t$.

Подшаг Б. Обеспечение выполнения схемы Δ_0-выборки. Заметим, что множество формул F с параметрами вида

$$\varphi_i(x, y, \overline{Q})\,\frac{h_1, \ldots, h_k}{Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_k}},$$

где $h_1, \ldots, h_k \subseteq \{f_\varepsilon^{(1)} \mid \varepsilon \in 2^t\}$, в которых в результате подстановки уже не содержится вхождений предикатов Q_j и $i < t$, конечно. Для каждой пары, состоящей из элемента ψ из F и из некоторого элемента a_j, $j < t$, используя лемму 3, последовательно расширим все $f_\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon \in 2^t$, до функций $f_\varepsilon^{(2)}$ так, чтобы при любых дальнейших регулярных расширениях наших функций обеспечить выполнение всех аксиом Δ_0-выборки вида

$$\forall x \in a_j\, \exists y\, \psi \to \exists b\, \forall x \in a_j\, \exists y \in b\, \psi, \quad \psi \in F,\ j < t.$$

Подшаг В. Обеспечение независимости предикатов. Для каждого конечного набора $J \subseteq 2^\omega$ и $k \in 2^\omega \setminus J$ и каждой формулы $\exists u \Phi_i(x, y, u)\,\dfrac{\bar f}{\bar Q}$, $i < t$, $\bar f \subseteq \{f_\varepsilon^{(2)} \mid \varepsilon \in J\}$, в которой в результате подстановки уже не содержится ни одного вхождения предикатов Q_l, последовательно проделываем следующее: если у функций $\bar f$ есть одновременное расширение $\overline{f^*}$ функциями из $\mathscr{F}(\mathbb{A})$ такое, что

$$\mathbb{A} \models \exists u\, \Phi_i(\alpha, m, u)\,\frac{\overline{f^*}}{\bar Q},$$

для некоторого ординала $\alpha \notin \mathrm{dom}(f_j)$ и $m \in \{0, 1\}$, то, используя лемму 4, расширим $\overline{f^*}$ еще до функций $\bar g$ из $\mathscr{F}(\mathbb{A})$ так, чтобы для любого их одновременного расширения $\bar g'$ регулярными функциями было выполнено

$$\mathbb{A} \models \exists u\, \Phi_i(\alpha, m, u)\,\frac{\bar g'}{\bar Q},$$

и расширим f_j до $f_j^* \in \mathscr{F}(\mathbb{A})$ так, чтобы $f_j^*(\alpha) \neq m$. В результате получим функции $f_\varepsilon^{(3)}$, $\varepsilon \in 2^\omega$. Потом доопределим все функции $f_\varepsilon^{(3)}$, $\varepsilon \in 2^\omega$, нулями так, чтобы их области определения были одним и тем же ординалом из $\mathbb{A}$. В результате получим функции $f_\varepsilon^{(4)}$, $\varepsilon \in 2^\omega$.

Подшаг Г. Введение новых функций. Для $m \in \{0,1\}$ положим

$$f_{\varepsilon m}(\alpha) = \begin{cases} m, & \text{если } \alpha = \operatorname{dom}\bigl(f_\varepsilon^{(4)}\bigr), \\ f_\varepsilon^{(4)}(\alpha), & \text{если } \alpha \in \operatorname{dom}\bigl(f_\varepsilon^{(4)}\bigr), \\ \text{не определена} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Легко проверяется, что семейство, состоящее из предикатов вида

$$R_\zeta = \bigcup_{\xi \in 2^{<\omega},\ \xi \subseteq \zeta} f_\xi^{-1}(1),$$

обладает всеми нужными свойствами. Теорема доказана.

Автор благодарит профессора Теодора Сламана, короткое обсуждение с которым исследуемых в данной работе проблем сыграло ключевую роль в их решении, а также рецензента за исправление ряда неточностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
2. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1975.
3. *Морозов А. С.* Об отношении Σ-сводимости между допустимыми множествами // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 633–651.

Статья поступила 14 октября 2004 г.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru