Сибирский математический журнал
Июль—август, 2005. Том 46, № 4

УДК 517.958:532.516.5

О ПОВЕДЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ ПРИ $t \to \infty$

К. Пилецкас

Аннотация: Нестационарное решение Пуазейля, описывающее течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном цилиндре, определяется как решение обратной задачи для уравнения теплопроводности. Исследуется поведение при $t \to \infty$ нестационарного решения Пуазейля, соответствующего заданному потоку вектора скорости $F(t)$. В частности, доказывается, что если поток $F(t)$ экспоненциально стремится к постоянному потоку F_*, то нестационарное решение Пуазейля экспоненциально стремится при $t \to \infty$ к стационарному решению Пуазейля, соответствующему потоку F_*.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, уравнение теплопроводности, обратная задача, нестационарное решение Пуазейля, асимптотическое поведение решения.

§ 1. Введение

Первым шагом при изучении асимптотики решений нестационарной системы уравнений Навье — Стокса

$$\begin{gathered} \mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}) + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad (x,t) \in \Omega\times(0,T), \\ \mathbf{v}(x,t) = 0, \ (x,t) \in \partial\Omega\times(0,T), \quad \mathbf{v}(x,0) = \mathbf{a}(x) \end{gathered} \tag{1.1}$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, с цилиндрическими выходами на бесконечность является нахождение точного решения типа Пуазейля в бесконечном цилиндре $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : x' = (x_1,\dots,x_{n-1}) \in \omega,\ x_n \in \mathbb{R}\}$, где ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$. Рассмотрим задачу (1.1) в области $\Pi \times (0,T)$ и дополнительно зададим поток вектора скорости через сечение ω:

$$\int\limits_\omega v_3(x,t)\,dx' = F(t). \tag{1.2}$$

Кроме того, предположим, что $\mathbf{a} = (0,0,a)$, $a = a(x')$ не зависит от переменной x_3, и пусть выполнено необходимое условие согласования

$$\int\limits_\omega a(x')\,dx' = F(0). \tag{1.3}$$

Нестационарное решение Пуазейля имеет вид

$$\mathbf{v}(x,t) = (0,0,v(x',t)), \quad p(x,t) = -q(t)x_3 + p_0(t), \tag{1.4}$$

где $p_0(t)$ — произвольная функция от t, а пара $(v(x',t), q(t))$ является решением следующей обратной задачи:

$$\begin{gathered} v_t(x',t) - \nu\Delta' v(x',t) = q(t), \quad (x',t) \in Q^T = \omega \times (0,T), \\ v(x',t) = 0, \ (x,t) \in \partial\omega \times (0,T), \quad v(x',0) = a(x'), \\ \int\limits_{\omega} v(x',t)\,dx' = F(t) \end{gathered} \tag{1.5}$$

(Δ' — оператор Лапласа по переменным x'). В (1.5) функции $a(x')$ и $F(t)$ заданы, а $v(x',t)$ и $q(t)$ подлежат определению.

Существование решения обратной задачи (1.5) в пространстве Гёльдера доказано в работе [1]. Точная формулировка результата о существовании и единственности решения задачи (1.5) приведена в § 2. В данной работе исследуется поведение этого решения при $t \to \infty$. В частности, доказывается, что если поток $F(t)$ экспоненциально стремится к постоянному потоку F_*, то решение задачи (1.5) экспоненциально стремится при $t \to \infty$ к стационарному решению Пуазейля, соответствующему потоку F_*. Стационарное решение Пуазейля в цилиндре Π определяется формулами (см., например, [2])

$$\mathbf{u}_{F_*}(x) = (0, 0, q_{F_*} u_0(x')), \quad p_{F_*}(x) = -\nu q_{F_*} x_3 + p_0, \tag{1.6}$$

где p_0 — произвольная постоянная, а $u_0(x')$ — решение первой краевой задачи для уравнения Пуассона

$$-\nu\Delta' u_0(x') = 1, \ x' \in \omega, \quad u_0(x') = 0, \ x' \in \partial\omega. \tag{1.7}$$

Поскольку

$$\int\limits_{\omega} u_0(x')\,dx' = \nu \int\limits_{\omega} |\nabla' u_0(x')|^2\,dx' := \kappa_0 > 0,$$

постоянную q_{F_*} можно выбрать так, чтобы решение Пуазейля имело заданный поток

$$q_F \int\limits_{\omega} u_0(x')\,dx' = F, \tag{1.8}$$

т. е. $q_{F_*} = F_* \kappa_0^{-1}$.

Следует отметить, что теория обратных задач для параболических уравнений исследовалась многими авторами (см., например, [3, 4], а также книгу [5] и цитируемую в ней литературу). Однако во всех этих работах вместо условия потока (1.5_3) ставилось «весовое» условие

$$\int\limits_{\omega} \psi(x') v(x',t)\,dx' = F(t), \tag{1.9}$$

где вес ψ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\omega)$. Поведение при $t \to \infty$ решения обратной задачи (1.5_1), (1.5_2), (1.9) изучалось в работах [6, 7]. Во всех упомянутых выше работах существенно использовался тот факт, что $\psi(x) = 0$ при $x \in \partial\omega$.

В дальнейшем при рассмотрении задачи (1.5) штрих будет опускаться.

§ 2. О разрешимости задачи (1.5)

Приведем сначала определения функциональных пространств, используемых в работе. Как обычно, через $C^{l+\delta}(\overline{\omega})$, где $l \geq 0$ целое, $\delta \in [0,1)$, обозначим пространство функций, непрерывных в $\overline{\omega}$ по Гёльдеру с показателем δ вместе со своими производными до порядка l включительно. Норма в пространстве $C^{l+\delta}(\overline{\omega})$ определяется по формуле

$$\|u; C^{l+\delta}(\overline{\omega})\| = \sum_{|\alpha|=0}^{l} \sup_{x\in\overline{\omega}} \bigl|D_x^\alpha u(x)\bigr| + \sum_{|\alpha|=l} \sup_{x,y\in\overline{\omega}} \frac{\bigl|D_x^\alpha u(x) - D_y^\alpha u(y)\bigr|}{|x-y|^\delta}.$$

При $\delta = 0$ последнее слагаемое в определении нормы отсутствует.

Аналогично определяется пространство $C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$, где $\Delta^T = (0,T)$. Через $\widehat{C}^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$ обозначим подпространство функций из $C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$, удовлетворяющих условиям

$$h(0) = 0,\ \frac{d}{dt}h(0) = 0, \dots, \frac{d^l}{dt^l}h(0) = 0. \tag{2.1}$$

Через $C^{2l+2\delta, l+\delta}(\overline{Q^T})$, где $\delta \in (0,1/2)$, обозначим пространство непрерывных функций, имеющих в $\overline{Q^T} = \overline{\omega} \times [0,T]$ непрерывные производные D_x^α по x до порядка $2l$, непрерывные производные D_t^r по t до порядка l и конечную норму

$$\begin{aligned}\|u; C^{2l+2\delta, l+\delta}(\overline{Q^T})\| = \sum_{|\alpha|=0}^{2l} \sup_{(x,t)\in\overline{Q^T}} \bigl|D_x^\alpha u(x,t)\bigr| + \sum_{r=0}^{l} \sup_{(x,t)\in\overline{Q^T}} \bigl|D_t^r u(x,t)\bigr| \\ + \sum_{|\alpha|=2l} \sup_{(x,t),(y,t)\in\overline{Q^T}} \frac{\bigl|D_x^\alpha u(x,t) - D_y^\alpha u(y,t)\bigr|}{|x-y|^{2\delta}} \\ + \sum_{r=l} \sup_{(x,t),(x,\tau)\in\overline{Q^T}} \frac{\bigl|D_t^r u(x,t) - D_\tau^r u(x,\tau)\bigr|}{|t-\tau|^{\delta}}.\end{aligned}$$

При исследовании поведения решения задачи (1.5) при $t \to \infty$ нам также понадобится весовое пространство функций $C_\mu^l(\Delta)$ ($\mu \in \mathbb{R}$, $l \geq 0$ целое), заданных на бесконечном интервале $\Delta = (0,\infty)$ и имеющих конечную норму

$$\bigl\|u; C_\mu^l(\Delta)\bigr\| = \|\exp(\mu t)u; C^l(\Delta)\|.$$

Отметим, что при $\mu > 0$ элементы пространства $C_\mu^l(\Delta)$ и их производные до порядка l включительно экспоненциально стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Далее $W_2^l(\omega)$, $l \geq 0$ целое, — пространство Соболева с нормой

$$\bigl\|u; W_2^l(\omega)\bigr\| = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{l} \int_\omega \bigl|D_x^\alpha u(x,t)\bigr|^2 dx\right)^{1/2}.$$

В работе [1] доказан следующий результат о разрешимости задачи (1.5).

Теорема 2.1. *Предположим, что* $\partial\omega \in C^{2l+2+2\delta}$, $a \in C^{2l+2+2\delta}(\overline{\omega})$, $l \geq 0$, $\delta \in (0,1/2)$, $F \in C^{l+1+\delta}(\overline{\Delta}_T)$, *и пусть выполнены условия согласования порядка* $l+1$:

$$(\Delta^m a(x))|_{\partial\omega} = 0, \quad \frac{d^m}{dt^m}F(0) = \int_\omega \Delta^m a(x)\,dx, \quad m = 0,\dots,l+1. \tag{2.2}$$

Тогда при любом $T > 0$ существует единственное решение (v, q) задачи (1.5) в пространстве $C^{2l+2+2\delta,l+1+\delta}(\overline{Q^T}) \times \widehat{C}^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$ и имеет место оценка

$$\|v; C^{2l+2+2\delta,l+1+\delta}(\overline{Q^T})\| + \|q; C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\| \\ \leq c(T)(\|F; C^{l+1+\delta}(\overline{\Delta^T})\| + \|a; C^{2l+2+2\delta}(\overline{\omega})\|). \quad (2.3)$$

Кроме того, если $a(x) \equiv 0$, то справедливо неравенство

$$\left|\frac{d^s}{dt^s} q(t)\right| \leq \frac{|\omega|}{\beta_1^2} \exp(\lambda_1 t) \sup_{\tau \in \overline{\Delta^t}} \left|\frac{d^{s+1}}{d\tau^{s+1}} F(\tau)\right|, \quad s = 0, \dots, l, \quad (2.4)$$

где $\lambda_1 > 0$ является наименьшим собственным числом оператора Лапласа в пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)$:

$$-\nu \Delta u(x) = \lambda u(x), \ x \in \omega; \quad u = 0, \ x \in \partial\omega. \quad (2.5)$$

§ 3. Поведение решения задачи (1.5) при $t \to \infty$

Рассмотрим сначала случай $a \equiv 0$. Предположим, что в дополнение к условиям теоремы 2.1 функция F имеет конечную норму $\|F; C^2_\mu(\Delta)\|$, $\mu > 0$. Докажем, что тогда решение (v, q) задачи (1.5) экспоненциально стремится к нулю при $t \to \infty$.

Лемма 3.1. *Предположим, что $a \equiv 0$, а F удовлетворяет условиям теоремы 2.1 при $l \geq 1$ и, кроме того, $F \in C^2_\mu(\Delta)$, $\mu > 0$. Тогда имеют место неравенства*

$$\int_\omega |v_t(x,t)|^2 dx \leq c_1 A_F \exp(-2\lambda_1 t) \\ \times \left(\int_0^t \exp((2\lambda_1 - \mu)\tau)|q(\tau)| \, d\tau + \exp((2\lambda_1 - \mu)t)|q(t)| \right), \quad (3.1)$$

$$|q(t)| \leq c_2 \left(\left[\int_\omega |v_t(x,t)|^2 dx \right]^{1/2} + \exp(-\mu t) A_F \right), \quad (3.2)$$

где $A_F = \|F; C^2_\mu(\Delta)\|$.

Доказательство. Для доказательства неравенства (3.1) продифференцируем уравнение (1.5_1) по t:

$$v_{tt}(x,t) - \nu \Delta v_t(x,t) = q'(t). \quad (3.3)$$

Поскольку $a \equiv 0$ и $q(0) = 0$ ($q \in \widehat{C}^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$), из (1.5_1) находим, что $v_t(x,0) = 0$. Умножая (3.3) на v_t и интегрируя по частям, выводим соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_\omega |v_t(x,t)|^2 \, dx + 2\nu \int_\omega |\nabla v_t(x,t)|^2 \, dx = 2q'(t) \int_\omega v_t(x,t) \, dx = 2q'(t)F'(t). \quad (3.4)$$

Применяя ко второму слагаемому в левой части (3.4) неравенство Фридрихса

$$\int_\omega |w(x)|^2 \, dx \leq \frac{\nu}{\lambda_1} \int_\omega |\nabla w(x)|^2 \, dx, \quad (3.5)$$

справедливое для любой функции w, равной нулю на $\partial\omega$, находим, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega}|v_t(x,t)|^2\,dx+2\lambda_1\int\limits_{\omega}|v_t(x,t)|^2\,dx\le 2q'(t)F'(t).$$

Умножая это неравенство на $\exp(2\lambda_1 t)$ и интегрируя от 0 до t, получим оценку

$$\exp(2\lambda_1 t)\int\limits_{\omega}|v_t(x,t)|^2\,dx\le 2\int\limits_0^t\exp(2\lambda_1\tau)q'(\tau)F'(\tau)\,d\tau$$
$$=-2\int\limits_0^t\exp(2\lambda_1\tau)q(\tau)F''(\tau)\,d\tau-4\lambda_1\int\limits_0^t\exp(2\lambda_1\tau)q(\tau)F'(\tau)\,d\tau$$
$$+2\exp(2\lambda_1 t)q(t)F'(t)\le c_1A_F\left(\int\limits_0^t\exp((2\lambda_1-\mu)\tau)|q(\tau)|\,d\tau+\exp(2\lambda_1-\mu)|q(t)|\right),$$

из которой следует (3.1).

Для доказательства (3.2) умножим уравнение (1.5_1) на $u_0(x)$, где u_0 является решением краевой задачи (1.7). Проинтегрировав по частям в ω, придем к соотношению

$$\int\limits_{\omega}v_t(x,t)u_0(x)\,dx-\nu\int\limits_{\omega}v(x,t)\Delta u_0(x)\,dx=q(t)\int\limits_{\omega}u_0(x)\,dx. \tag{3.6}$$

Таким образом,

$$|q(t)|=\left|\left(\int\limits_{\omega}u_0(x)\,dx\right)^{-1}\left(\int\limits_{\omega}v_t(x,t)u_0(x)\,dx-\nu\int\limits_{\omega}v(x,t)\Delta u_0(x)\,dx\right)\right|$$
$$=\left(\int\limits_{\omega}u_0(x)\,dx\right)^{-1}\left|\left(\int\limits_{\omega}v_t(x,t)u_0(x)\,dx-\int\limits_{\omega}v(x,t)\,dx\right)\right|$$
$$\le\left(\int\limits_{\omega}u_0(x)\,dx\right)^{-1}\left(\left[\int\limits_{\omega}|v_t(x,t)|^2\,dx\right]^{1/2}\left[\int\limits_{\omega}|u_0(x)|^2\,dx\right]^{1/2}+|F(t)|\right)$$
$$\le c_2\left(\left[\int\limits_{\omega}|v_t(x,t)|^2\,dx\right]^{1/2}+\exp(-\mu t)A_F\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия леммы* 3.1 *и* $0<\mu<\lambda_1$. *Тогда имеют место оценки*

$$|q(t)|\le cA_F\exp(-\mu t), \tag{3.7}$$

$$\int\limits_{\omega}|v_t(x,t)|^2dx\le cA_F^2\exp(-2\mu t). \tag{3.8}$$

Доказательство. Положим $\mu=b\lambda_1$, где $0<b<1$. В силу (2.4) справедливо неравенство

$$|q(t)|\le c_0\exp(\lambda_1 t)A_F, \tag{3.9}$$

где $c_0 = |\omega|/\beta_1^2$. Из (3.1) и (3.9) следует, что

$$\int\limits_{\omega} |v_t(x,t)|^2\,dx \le c_0c_1A_F^2 \exp(-2\lambda_1 t)\left(\int\limits_0^t \exp(\lambda_1(3-b)\tau)\,d\tau + \exp(\lambda_1(3-b)t)\right)$$
$$\le c_0c_1A_F^2\left(\frac{1}{\lambda_1(3-b)}+1\right)\exp(\lambda_1(1-b)t)$$
$$\le c_0c_1A_F^2\left(\frac{1}{2\lambda_1(1-b)}+1\right)\exp(-2\lambda_1 bt + \lambda_1(1+b)t)$$
$$:= c_0c_1A_F^2a_0\gamma\exp(-2\lambda_1 bt+\lambda_1(1+b)t), \quad (3.10)$$

где $a_0 = 1$, $\gamma = \frac{1}{2\lambda_1(1-b)} + 1$. Далее, из (3.10) и (3.2) выводим соотношение

$$|q(t)| \le c_2A_F[(c_0c_1a_0\gamma)^{1/2}+1]\exp\left(-\lambda_1 bt + \frac{\lambda_1}{2}(1+b)t\right)$$
$$= c_2A_Fa_1\exp\left(-\lambda_1 bt+\frac{\lambda_1}{2}(1+b)t\right), \quad (3.11)$$

где $a_1 = (c_*c_1a_0\gamma)^{1/2}+1$, $c_* = \max(c_0, c_2)$. Докажем, что для любого $k = 1, 2, \dots$ имеет место оценка

$$|q(t)| \le c_2A_Fa_k\exp(-\lambda_1 bt + \lambda_1(1+b)2^{-k}t), \quad a_k = (c_*c_1a_{k-1}\gamma)^{1/2}+1. \quad (3.12)$$

При $k = 1$ оценка (3.12) совпадает с (3.11). Предположим, что неравенство (3.12) верно для $k = l$ и докажем его для $k = l+1$. Из (3.1) и (3.12) при $k = l$ находим, что

$$\int\limits_{\omega}|v_t(x,t)|^2\,dx \le c_1c_2a_lA_F^2\exp(-2\lambda_1 t)\left(\int\limits_0^t \exp(2\lambda_1(1-b)\tau + \lambda_1(1+b)2^{-l}\tau)\,d\tau\right.$$
$$\left. + \exp(2\lambda_1(1-b)t+\lambda_1(1+b)2^{-l}t)\right)$$
$$\le c_1c_2a_lA_F^2\left(\frac{1}{2\lambda_1(1-b)+\lambda_1(1+b)2^{-l}}+1\right)\exp(2\lambda_1(1-b)t+\lambda_1(1+b)2^{-l}t)$$
$$\le c_1c_2a_l\gamma A_F^2\exp(2\lambda_1(1-b)t+\lambda_1(1+b)2^{-l}t), \quad (3.13)$$

и из (3.2), (3.13) выводим неравенство

$$|q(t)| \le c_2A_F((c_2c_1a_l\gamma)^{1/2}\exp(-\lambda_1 bt+\lambda_1(1+b)2^{-l-1}t)+\exp(-\lambda_1 bt))$$
$$\le c_2A_F((c_*c_1a_l\gamma)^{1/2}+1)\exp(-\lambda_1 bt + \lambda_1(1+b)2^{-l-1}t)$$
$$\le c_2A_Fa_{l+1}\exp(-\lambda_1 bt+\lambda_1(1+b)2^{-l-1}t).$$

Таким образом, (3.12) справедливо для любого $k = 1, 2, \dots$.

Покажем, что последовательность $\{a_k\}$ ограниченная. Действительно, если для какого-либо k имеет место соотношение $a_{k+1} \ge a_k$, то

$$a_k^2 - (2 + c_*c_1\gamma)a_k + 1 \le 0$$

и, следовательно, $a_k \le y_0 = (1 + c_*c_1\gamma/2 + \sqrt{c_*^2c_1^2\gamma^2/4 + c_*c_1\gamma})$. Так как $a_0 = 1$, то $a_k \le y_0$ для любого k. Таким образом, в (3.12) можно перейти к пределу при $k \to \infty$. В результате получим оценку

$$|q(t)| \le cA_F\exp(-\lambda_1 bt). \quad (3.14)$$

Наконец, из (3.1) и (3.14) вытекает, что

$$\int\limits_\omega |v_t(x,t)|^2\,dx \le c_1cA_F^2\exp(-2\lambda_1 t)\left(\int\limits_0^t \exp(2\lambda_1(1-b)\tau)\,d\tau + \exp(2\lambda_1(1-b)t)\right)$$
$$\le c_1c\left(\frac{1}{2\lambda_1(1-b)}+1\right)A_F^2\exp(-2\lambda_1 bt).$$

Лемма доказана.

Замечание 3.3. Легко видеть, что постоянные в неравенствах (3.7), (3.8) зависят от μ и неограниченно возрастают при $\mu \to \lambda_1$.

Рассмотрим теперь случай $\mu \ge \lambda_1$.

Лемма 3.4. *Пусть выполнены условия леммы* 3.1 *и* $\mu \ge \lambda_1$. *Тогда имеют место оценки*

$$|q(t)| \le cA_F\exp(-\lambda_* t), \tag{3.15}$$

$$\int\limits_\omega |v_t(x,t)|^2dx \le cA_F^2\exp(-2\lambda_* t), \tag{3.16}$$

где $\lambda_* = \lambda_1(1-\varepsilon)$ $\forall\varepsilon > 0$ *при* $\mu = \lambda_1$ *и* $\lambda_* = \lambda_1$ *при* $\mu > \lambda_1$. *Постоянные в неравенствах* (3.15), (3.16) *зависят от* ε, μ *и неограниченно возрастают при* $\varepsilon \to 0$ *или* $\mu \to \lambda_1$.

Доказательство. Положим $\mu = b\lambda_1$, где $b \ge 1$. Если $b > 3$, то из (3.1), (3.9) следует, что

$$\int\limits_\omega |v_t(x,t)|^2\,dx \le cA_F^2\exp(-2\lambda_1 t)\left(\int\limits_0^t \exp(\lambda_1(3-b)\tau)\,d\tau + \exp(\lambda_1(3-b)t)\right)$$
$$\le cA_F^2\exp(-2\lambda_1 t)$$

и в силу (3.2)

$$|q(t)| \le cA_F\exp(-\lambda_1 t).$$

Рассмотрим случай $\mu = \lambda_1$. Из (3.1), (3.9) и (3.2) вытекают оценки

$$\int\limits_\omega |v_t(x,t)|^2\,dx \le c_*c_1\left(\frac{1}{2\lambda_1}+1\right)A_F^2, \quad |q(t)| \le c_2\left((c_*c_1)^{1/2}\left(\frac{1}{2\lambda_1}+1\right)^{1/2}+1\right)A_F.$$

Рассуждая так же, как в лемме 3.2, по индукции выводим неравенства

$$\int\limits_\omega |v_t(x,t)|^2\,dx \le c_1c_2a_k\gamma_kA_F^2\exp(-2\lambda_1 t + 2^{-k}\lambda_1 t), \tag{3.17}$$

$$|q(t)| \le c_2A_Fa_{k+1}\exp(-\lambda_1 t + 2^{-k-1}\lambda_1 t), \tag{3.18}$$

где $\gamma_k = 2^k\lambda_1 + 1$, $a_{k+1} = (c_*c_1)^{1/2}a_k^{1/2}\gamma_k^{1/2} + 1$, $a_0 = 1$. В неравенствах (3.17), (3.18) нельзя перейти к пределу по k, поскольку γ_k неограниченно возрастают при $k \to \infty$. Однако для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, что $\lambda_* = \lambda_1(1-\varepsilon) \le \lambda_1(1-2^{-k})$ и, следовательно, (3.15), (3.16) имеют место для любого $\varepsilon > 0$.

Предположим теперь, что

$$\frac{2^{k+2}+1}{2^{k+2}-1} < b < \frac{2^{k+1}+1}{2^{k+1}-1}, \quad k = 0, 1, \dots. \tag{3.19}$$

Применяя поочередно неравенства (3.1) и (3.2), после $k+1$ итераций получим соотношение

$$|q(t)| \le c_2 A_F a_{k+1} \exp(-\lambda_1 bt + \lambda_1(1+b)2^{-k-1}t), \tag{3.20}$$

где

$$a_{k+1} = (c_* c_1 a_k \gamma_k)^{1/2} + 1, \quad a_0 = 1, \quad \gamma_k = \frac{1}{2\lambda_1(1-b) + 2^{-k}\lambda_1(1+b)} + 1.$$

Из (3.1) и (3.20) следует, что

$$\int\limits_\omega |v_t(x,t)|^2\,dx \le c_2 c_1 a_{k+1} A_F^2 \exp(-2\lambda_1 t)\Biggl(\int\limits_0^t \exp(2\lambda_1(1-b)\tau$$

$$+ 2^{-k-1}\lambda_1(1+b)\tau)\,d\tau + \exp(2\lambda_1(1-b)t + 2^{-k-1}\lambda_1(1+b)t)\Biggr). \tag{3.21}$$

В силу (3.19) $2\lambda_1(1-b)+2^{-k-1}\lambda_1(1+b) < 0$. Следовательно, выражение, стоящее в скобках в правой части (3.21), ограничено и

$$\int\limits_\omega |v_t(x,t)|^2\,dx \le c(b) A_F^2 \exp(-2\lambda_1 t),$$

где $c(b) \to \infty$ при $b \to 1$. Из (3.2) вытекает теперь, что

$$|q(t)| \le c(b) A_F \exp(-\lambda_1 t).$$

Наконец, рассмотрим случай

$$b = \frac{2^{k+1}+1}{2^{k+1}-1}, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Тогда $2\lambda_1(1-b) + 2^{-k}\lambda_1(1+b) = 0$ и после k итераций выводим соотношение

$$\int\limits_\omega |v_t(x,t)|^2\,dx \le c(b) A_F^2 \exp(-2\lambda_1 t)\Biggl(\int\limits_0^t d\tau + 1\Biggr)$$

$$\le c(b,\delta) A_F^2 \exp(-2\lambda_1(1-\delta)t) \quad \forall \delta > 0.$$

Подставив это неравенство в (3.2), получим

$$|q(t)| \le c(b,\varepsilon) A_F \exp(-\lambda_1(1-\delta)t)$$

и из (3.1) находим, что

$$\int\limits_\omega |v_t(x,t)|^2\,dx \le c(b,\varepsilon) A_F^2 \exp(-2\lambda_1 t)$$

$$\times \Biggl(\int\limits_0^t \exp(\lambda_1(1-b)\tau + \varepsilon\lambda_1\tau)\,d\tau + \exp(\lambda_1(1-b)t + \varepsilon\lambda_1 t)\Biggr). \tag{3.22}$$

Если $\delta < \frac{2}{2^{k+1}-1}$, то $\lambda_1(1-b) + \delta\lambda_1 < 0$ и из (3.22), (3.2) следуют неравенства

$$\int\limits_\omega |v_t(x,t)|^2\,dx \le c(b) A_F^2 \exp(-2\lambda_1 t), \quad |q(t)| \le c(b) A_F \exp(-\lambda_1 t).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть выполнены условия леммы* 3.1 *и* $\mu > 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\big\|v(\cdot,t);W_2^2(\omega)\big\| \le c(\mu)A_F\exp(-\lambda_* t), \tag{3.23}$$

где $\lambda_* = \mu$ *при* $\mu < \lambda_1$, $\lambda_* = \lambda_1(1-\varepsilon)$ $\forall\varepsilon > 0$ *при* $\mu = \lambda_1$ *и* $\lambda_* = \lambda_1$ *при* $\mu > \lambda_1$. *Постоянная в неравенстве* (3.23) *стремится к бесконечности при* $\varepsilon \to 0$ *или* $\mu \to \lambda_1$.

Доказательство. Рассмотрим v как решение первой краевой задачи для уравнения Пуассона

$$\begin{gathered} -\nu\Delta v(x,t) = q(t) - v_t(x,t), \quad x \in \omega, \\ v(x,t) = 0, \quad x \in \partial\omega. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Поскольку q не зависит от x, а $v_t \in L_2(\omega)$, решение v задачи (3.24) принадлежит пространству $W_2^2(\omega)$ и

$$\big\|v(\cdot,t);W_2^2(\omega)\big\| \le c\|q(t)+v_t(\cdot,t);L_2(\omega)\| \le c(|q(t)||\omega|^{1/2} + \|v_t(\cdot,t);L_2(\omega)\|).$$

Оценивая правую часть этого соотношения при помощи неравенств из лемм 3.2 и 3.4, получим (3.23). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь общий случай, т. е. без предположения $a(x) \equiv 0$.

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *при* $l \ge 1$ *и, кроме того,* $F \in C^2_\mu(\Delta)$, $\mu > 0$. *Тогда имеет место оценка*

$$\begin{aligned} \|v_t(\cdot,t);L_2(\omega)\| &+ \big\|v(\cdot,t);W_2^2(\omega)\big\| + |q(t)| \\ &\le c(\mu)\exp(-\lambda_* t)\big(\big\|F;C^2_\mu(\Delta)\big\| + \|a;C^{2l+2+2\delta}(\overline{\omega})\|\big), \end{aligned} \tag{3.25}$$

где λ_* *такое же, как в лемме* 3.5, *а постоянная* $c(\mu)$ *стремится к бесконечности при* $\varepsilon \to 0$ *или* $\mu \to \lambda_1$.

Доказательство. Решение (v,q) задачи (1.5) представим в виде суммы $(v(x),q(t)) = (v_1(x),0) + (v_2(x),q(t))$, где v_1 — решение начально-краевой задачи

$$\begin{gathered} v_{1t}(x,t) - \nu\Delta v_1(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q^T, \\ v_1(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\omega \times \Delta^T, \\ v_1(x,0) = a(x), \quad x \in \omega, \end{gathered} \tag{3.26}$$

а $(v_2(x),q(t))$ — решение обратной задачи

$$\begin{gathered} v_{2t}(x,t) - \nu\Delta v_2(x,t) = q(t), \quad (x,t) \in Q^T, \\ v_2(x,t) = 0,\ x \in \partial\omega \times \Delta^T, \quad v_2(x,0) = 0,\ x \in \omega, \\ \int\limits_\omega v_2(x,t)dx = F(t) - \int\limits_\omega v_1(x,t)dx := \widetilde{F}(t). \end{gathered} \tag{3.27}$$

Стандартным образом доказывается, что

$$\begin{aligned} \|v_{1t}(\cdot,t);L_2(\omega)\| + \big\|v_1(\cdot,t);W_2^2(\omega)\big\| &\le c\exp(-\lambda_1 t)\big\|a;W_2^2(\omega)\big\| \\ &\le c\exp(-\lambda_1 t)\|a;C^{2l+2+2\delta}(\overline{\omega})\|. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Поскольку $a(x)$ удовлетворяет условиям согласования (см. (2.2)), функция $V(x,t)=v_{1t}(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{gathered} V_t(x,t)-\nu\Delta V(x,t)=0, \quad (x,t)\in Q^T, \\ V(x,t)=0, \quad (x,t)\in\partial\omega\times\Delta^T, \\ V(x,0)=\nu\Delta a(x), \quad x\in\omega, \end{gathered} \tag{3.29}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|v_{1tt}(\cdot,t);L_2(\omega)\| = \|V_t(\cdot,t);L_2(\omega)\| &\le c\exp(-\lambda_1 t)\big\|\Delta a; W_2^2(\omega)\big\| \\ &\le c\exp(-\lambda_1 t)\|a; C^{2l+2+2\delta}(\overline{\omega})\|. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Из соотношений

$$\frac{d^m}{dt^m}\widetilde{F}(t)=\frac{d^m}{dt^m}F(t)-\int\limits_\omega \frac{d^m}{dt^m}v_1(x,t)\,dx, \quad m=0,1,2,$$

получаем неравенства

$$\begin{aligned} \left|\frac{d^m}{dt^m}\widetilde{F}(t)\right| &\le \left|\frac{d^m}{dt^m}F(t)\right| + \left|\int\limits_\omega \frac{d^m}{dt^m}v_1(x,t)\,dx\right| \\ &\le \left|\frac{d^m}{dt^m}F(t)\right| + |\omega|^{1/2}\bigg(\int\limits_\omega \left|\frac{d^m}{dt^m}v_1(x,t)\right|^2 dx\bigg)^{1/2}. \end{aligned}$$

Поэтому $\widetilde{F}\in C^2_{\mu_*}(\Delta)$, где $\mu_*=\min(\lambda_1,\mu)$, и

$$\big\|\widetilde{F}; C^2_{\mu_*}(\Delta)\big\| \le c\big(\big\|F; C^2_\mu(\Delta)\big\| + \|a; C^{2l+2+2\delta}(\overline{\omega})\|\big). \tag{3.31}$$

Кроме того, в силу вторых равенств в условиях согласования (2.2) видим, что

$$\frac{d^m}{dt^m}\widetilde{F}(0)=0, \quad m=0,\dots,l+1.$$

Таким образом, выполнены условия лемм 3.2, 3.4 и 3.5, из которых следует, что

$$\begin{aligned} \|v_{2t}(\cdot,t);L_2(\omega)\| &+ \big\|v_2(\cdot,t);W_2^2(\omega)\big\| + |q(t)| \\ &\le c(\mu)\exp(-\lambda_* t)\big(\big\|F; C^2_\mu(\Delta)\big\| + \|a; C^{2l+2+2\delta}(\overline{\omega})\|\big). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Оценка (3.25) для $(v(x),q(t))$, где $v(x)=v_1(x)+v_2(x)$, вытекает из (3.28), (3.32). Теорема доказана.

В завершение рассмотрим случай, когда поток $F(t)$ представи́м в виде $F(t)=F_*+\widehat{F}(t)$, где $F_*\in\mathbb{R}$, а $\widehat{F}(t)\in C^{l+1+\delta}(\overline{\Delta^T})\cap C^2_\mu(\Delta)$, $\mu>0$.

Теорема 3.7. *Предположим, что* $\partial\omega\in C^{2l+2+2\delta}$. *Пусть* $F(t)=F_*+\widehat{F}(t)$, $F_*\in\mathbb{R}$, $\widehat{F}(t)\in C^{l+1+\delta}(\overline{\Delta^T})\cap C^2_\mu(\Delta)$, $a\in C^{2l+2+2\delta}(\omega)$, $\mu>0$, $l\ge 1$, $\delta\in(0,1/2)$, *и для* $\widehat{F}(t)$, $\hat{a}(x)=a(x)-q_{F_*}u_0(x)$, *где* $u_0(x)$, q_{F_*} *определяются формулами* (1.6)–(1.8), *выполнены условия согласования* (2.2). *Тогда существует единственное решение* (v,q) *задачи* (1.5), *для которого имеет место представление*

$$v(x,t)=q_{F_*}u_0(x)+\hat{v}(x,t), \quad q(t)=\nu q_{F_*}+\hat{q}(t), \tag{3.33}$$

и справедлива оценка

$$\|\hat{v}_t(\cdot,t);L_2(\omega)\| + \left\|\hat{v}(\cdot,t);W_2^2(\omega)\right\| + |\hat{q}(t)| \\ \le c(\mu)\exp(-\lambda_* t)\left(\left\|\widehat{F};C_\mu^2(\Delta)\right\| + |F_*| + \|a;C^{2l+2+2\delta}(\overline{\omega})\|\right). \quad (3.34)$$

Доказательство. Решение (v,q) задачи (1.5) будем искать в виде (3.33). Для $(\hat{v}(x,t),\hat{q}(t))$ получаем обратную задачу

$$\begin{gathered} \hat{v}_t(x,t) - \nu\Delta\hat{v}(x,t) = \hat{q}(t), \quad (x,t)\in Q^T, \\ \hat{v}(x,t)=0,\ x\in\partial\omega\times\Delta^T, \quad \hat{v}(x,0)=\hat{a}(x),\ x\in\omega, \\ \int\limits_\omega \hat{v}(x,t)dx = \widehat{F}(t). \end{gathered} \quad (3.35)$$

По условиям теоремы $\hat{a}$ и $\widehat{F}$ удовлетворяют условиям согласования (2.2). Так как $\|u_0;C^{l+2+\delta}(\omega)\| \le \text{const}$, а постоянная q_{F_*} пропорциональна F_*, то

$$\|\hat{a};C^{2l+2+2\delta}(\overline{\omega})\| \le c(|F_*| + \|a;C^{2l+2+2\delta}(\overline{\omega})\|)$$

и согласно теореме 3.6 имеет место оценка (3.34). Теорема доказана.

Замечание 3.8. Используя условия согласования (2.2) и рассуждая аналогично, можно также оценить убывание L_2-норм более высоких производных решения (v,q) задачи (1.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пилецкас К., Кебликас В.* О существовании нестационарных решений Пуазейля // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 649–663.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
3. *Орловский Д. Г.* Слабые и сильные решения обратных задач для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. С. 867–874.
4. *Орловский Д. Г.* О разрешимости одной задачи для параболического уравнения в классе Гёльдера // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 3. С. 107–112.
5. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York; Basel: Marsel Dekker, 1999.
6. *Васин И. А., Камынин В. Л.* Об асимптотическом поведении решений обратных задач для параболических уравнений // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 4. С. 750–766.
7. *Kalantarov V., Guvenilir F.* The asymptotic behavior of solutions to an inverse problem for differential operator equations // Math. Comput. Modelling. 2003. V. 37. P. 907–914.

Статья поступила 3 сентября 2004 г.

Пилецкас Константин
Институт математики и информатики,
Академиёс, 4, Вильнюс 08663, Литва
pileckas@ktl.mii.lt