Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2005. Том 46, № 5

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В. С. Белоносов

Аннотация: Рассмотрены общие краевые задачи с данными на границе полупространства для квазиэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами. Найдены интегральные представления решений таких задач и исследованы свойства ядер соответствующих интегральных операторов. Полученные результаты применены к доказательству обобщений принципа максимума Миранды — Агмона.

Ключевые слова: квазиэллиптическое уравнение, краевая задача, ядро Пуассона, принцип максимума.

Памяти Тадея Ивановича Зеленяка

В теории эллиптико-параболических краевых задач важную роль играют интегральные представления решений в виде поверхностных потенциалов, содержащих граничные или начальные данные. Простейшими примерами таких представлений являются классические формулы Пуассона, задающие решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа и решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. В более общих случаях ядра соответствующих потенциалов также называются ядрами Пуассона. Явный вид этих ядер для эллиптических уравнений высокого порядка с постоянными коэффициентами при общих граничных условиях на границе полупространства был найден С. Агмоном, А. Дуглисом и Л. Ниренбергом [1]. В параболическом случае аналогичные результаты установлены В. А. Солонниковым [2]. Данная работа посвящена построению ядер Пуассона для еще более широкого класса квазиэллиптических уравнений. В качестве приложения этих результатов будет доказан так называемый «принцип максимума Миранды — Агмона», т. е. специальная оценка решений квазиэллиптических краевых задач, обобщающая классический принцип максимума для эллиптических и параболических уравнений второго порядка.

1. Определения. Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное n-мерное пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_n)$; D_i — операция дифференцирования по x_i; $D_x = (D_1, \dots, D_n)$. Скалярное произведение элементов x и y пространства $\mathbb{R}^n$ обозначим через xy, а евклидову норму вектора x — через $\|x\|$; $|x| = |x_1| + \dots + |x_n|$. Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, т. е. вектор с неотрицательными целыми компонентами, то $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $D_x^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$.

Возьмем какой-нибудь вектор $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ с положительными компонентами. Функция $f(x)$ называется однородной относительно вектора μ (или, короче, μ-однородной) порядка k, если $f(\lambda^{\mu_1} x_1, \dots, \lambda^{\mu_n} x_n) = \lambda^k f(x)$ при всех

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00162) и Президиума РАН (программа № 16, проект № 115).

$\lambda > 0$, $x \neq 0$; μ-порядком (степенью) одночлена x^α называется число $\alpha\mu$, а μ-порядком (степенью) многочлена — наибольший из μ-порядков составляющих его одночленов. Для всякого линейного дифференциального оператора вида $L(D_x) = \sum c_\alpha D_x^\alpha$ также можно определить μ-порядок, равный μ-степени многочлена $L(i\xi) = \sum c_\alpha (i\xi)^\alpha$.

Каждая ненулевая точка $x \in \mathbb{R}^n$ однозначно характеризуется единичным вектором ω и положительным числом ρ такими, что $x_j = \rho^{\mu_j}\omega_j$, $1 \leq j \leq n$. Вектор ω и число ρ являются μ-однородными функциями от x порядков 0 и 1 соответственно. Будем называть их μ-однородными полярными координатами точки x. Всякая μ-однородная функция $f(x)$ порядка k может быть записана в виде $\rho^k f(\omega)$. В частности, якобиан перехода от декартовых к μ-однородным полярным координатам равен $\rho^{|\mu|-1}\Phi(\omega)$, где функция Φ бесконечно дифференцируема в окрестности сферы $\|\omega\| = 1$.

Стандартное пространство функций, имеющих непрерывные производные порядка l в замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, обозначим через $C^l(\Omega)$; $\|\varphi\|_l^\Omega$ — норма в этом пространстве. Верхний индекс Ω будем для краткости опускать, когда это не вызывает недоразумений.

Для каждой функции $\varphi(x)$, бесконечно дифференцируемой в шаре $B_r = \{x : \|x\| \leq r\}$, и любого $\sigma \geq 0$ определен тейлоровский многочлен

$$T_\sigma^\mu[\varphi](x) = \sum_{\alpha\mu \leq \sigma} \frac{1}{\alpha!} x^\alpha D_x^\alpha \varphi(0).$$

В случае $\sigma < 0$ положим $T_\sigma^\mu[\varphi] \equiv 0$. Перечислим необходимые далее элементарные свойства тейлоровских многочленов. Для всякого мультииндекса α и любого μ-однородного полинома $P(x)$ μ-степени k справедливы тождества

$$D_x^\alpha T_\sigma^\mu[\varphi](x) = T_{\sigma-\alpha\mu}^\mu\big[D_x^\alpha\varphi\big](x), \quad T_\sigma^\mu[P\varphi](x) = P(x) \cdot T_{\sigma-k}^\mu[\varphi](x). \tag{1}$$

Существуют целое $l \geq 0$ и вещественное $\gamma > 0$, зависящие только от σ и μ, для которых

$$\big|\varphi(x) - T_\sigma^\mu[\varphi](x)\big| \leq C_{\sigma,\mu,r}\rho^{\sigma+\gamma}\|\varphi\|_l^{B_r}, \tag{2}$$

где ρ — μ-однородный полярный радиус точки x.

Классическое преобразование Фурье $F[f]$ суммируемой функции $f(x)$ условимся вычислять по формуле

$$F[f](\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} f(x)\,dx.$$

Как обычно, обратное преобразование F^{-1} отличается от прямого знаком аргумента: $F^{-1}[g](x) = F[g](-x)$.

Наряду с $\mathbb{R}^n$ мы будем рассматривать $(n+1)$-мерное пространство переменных (t, x), где $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$; $\mathbb{R}_+^{n+1}$ — полупространство $\{(t,x) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$; D_t — дифференцирование по t. Буквой C будем обозначать любые положительные константы, точные значения которых для нас несущественны.

2. Краевая задача. Пусть $m_0, m_1, \ldots, m_n$ — произвольные натуральные числа, максимальное из которых равно m; $\mu_j = m/m_j$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Предметом нашего исследования является квазиэллиптическое уравнение

$$A(D_t, D_x)u(t,x) \equiv \sum_{k\mu_0+\alpha\mu=m} a_{k\alpha} D_t^k D_x^\alpha u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \tag{3}$$

относительно комплекснозначной функции $u(t,x)$ с постоянными комплексными коэффициентами $a_{k\alpha}$. Напомним, что однородное относительно вектора (μ_0,μ) дифференциальное выражение $A(D_t,D_x)$ называется квазиэллиптическим, если его символ $A(i\tau,i\xi)$ отличен от нуля для всех ненулевых $(\tau,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Иными словами, алгебраическое уравнение $A(i\tau,i\xi)=0$ не имеет вещественных корней по переменной τ ни при каких ненулевых $\xi\in\mathbb{R}^n$. Будем считать, что при каждом $\xi\neq 0$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\tau>0$ лежит ровно m_+ корней этого уравнения с учетом кратности ($1\le m_+\le m_0$). Обозначим их через $\tau_k(\xi)$, $1\le k\le m_+$, и положим

$$A_+(\tau,\xi)=\prod_{k=1}^{m_+}(\tau-\tau_k(\xi)).$$

На границе полупространства $\mathbb{R}^{n+1}_+$ зададим краевые условия

$$B_j(D_t,D_x)u(t,x)|_{t=0}\equiv\sum_{k\mu_0+\beta\mu=n_j}b^j_{k\beta}D^k_tD^\beta_x u(t,x)|_{t=0}=f_j(x),\quad j=1,\dots,m_+, \tag{4}$$

с постоянными комплексными коэффициентами $b^j_{k\beta}$. Числа n_j — порядки граничных операторов относительно вектора (μ_0,μ) — могут быть нецелыми. Всюду далее предполагается, что операторы B_j удовлетворяют условию Я. Б. Лопатинского по отношению к A. Это значит, что при всех ненулевых $\xi\in\mathbb{R}^n$ выражения $B_j(i\tau,i\xi)$ как полиномы по τ линейно независимы по модулю многочлена $A_+(\tau,\xi)$.

3. Ядра Пуассона. Будем говорить, что функции $G_k(t,x)$, $k=1,\dots,m_+$, образуют систему ядер Пуассона краевой задачи (3), (4), если эти функции бесконечно дифференцируемы в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$, удовлетворяют уравнениям

$$A(D_t,D_x)G_k(t,x)=0,\quad (t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}_+, \tag{5}$$

и граничным условиям

$$\lim_{t\to+0}B_j(D_t,D_x)G_k(t,x)=\delta^j_k\delta(x),\quad j,k=1,\dots,m_+, \tag{6}$$

где $\delta(x)$ — мера Дирака, а δ^j_k — символ Кронекера. Пределы (6) понимаются в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ядра Пуассона позволяют для любых бесконечно дифференцируемых финитных функций $f_j(x)$ записать решение задачи (3), (4) в виде суммы потенциалов

$$u(t,x)=\sum_{j=1}^{m_+}(G_j*f_j)(t,x)\equiv\sum_{j=1}^{m_+}\int_{\mathbb{R}^n}G_j(t,x-y)f_j(y)\,dy. \tag{7}$$

Для построения ядер Пуассона применим к равенствам (5) и (6) формальное преобразование Фурье по переменной x. Полагая $H_k(t,\xi)=F[G_k]$, придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A(D_t,i\xi)H_k(t,\xi)=0,\quad t>0, \tag{8}$$

с начальными условиями

$$B_j(D_t,i\xi)H_k(+0,\xi)=(2\pi)^{-n/2}\delta^j_k. \tag{9}$$

Задачи такого вида подробно изучены в [1–4]. Установлено, что для каждого фиксированного $\xi\neq0$ система (8), (9) имеет бесконечно дифференцируемое на множестве $\{t \geq 0, \xi \neq 0\}$ решение $J_k(t,\xi)$. При этом все производные $J_k^{q,\alpha}(t,\xi) \equiv D_t^q D_x^\alpha J_k(t,\xi)$ обладают свойствами

$$J_k^{q,\alpha}(t, \lambda^{\mu_1}\xi_1, \dots, \lambda^{\mu_n}\xi_n) = \lambda^{q\mu_0 - \alpha\mu - n_k} J_k^{q,\alpha}(\lambda^{\mu_0} t, \xi), \quad \lambda > 0; \tag{10}$$

$$\left| J_k^{q,\alpha}(t,\xi) \right| \leq C_{q\alpha} \rho^{q\mu_0 - \alpha\mu - n_k} \exp(-a\rho^{\mu_0} t). \tag{11}$$

Здесь ρ — μ-однородный полярный радиус точки ξ, положительные константы a и $C_{q\alpha}$ определяются коэффициентами операторов A и B_j.

Как показывает оценка (11), при $|\mu| > n_k$ и $t > 0$ функция $J_k(t,\xi)$ суммируема по переменной ξ. Значит, к ней можно применить обратное преобразование Фурье и вычислить искомое ядро Пуассона (см. [4]). В случае $n_k \geq |\mu|$ функция $J_k(t,\xi)$, вообще говоря, имеет в точке $\xi = 0$ неинтегрируемую особенность, поэтому обратное преобразование Фурье $F^{-1}[J_k]$ не существует даже в рамках теории обобщенных функций. Для придания смысла этому преобразованию надо так модифицировать ядро $J_k(t,\xi)$, чтобы получить решение $H_k(t,\xi)$ задачи (8), (9), принадлежащее при каждом фиксированном $t > 0$ пространству $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ медленно растущих обобщенных функций. Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение.

Пусть q и σ — неотрицательные целое и вещественное числа соответственно, а функция $\varphi(\xi)$ бесконечно дифференцируема в шаре $\|\xi\| \leq 1$. Определим на множестве $\{0 \leq t,\ 0 < \|\xi\| \leq 1\}$ следующее выражение:

$$I_k^{q,\sigma}[\varphi](t,\xi) = D_t^q J_k(t,\xi)\varphi(\xi) - \sum_{s\mu_0 \leq \sigma} \frac{t^s}{s!} D_t^{s+q} J_k(0,\xi) T^\mu_{\sigma - s\mu_0}[\varphi](\xi).$$

При $\sigma < 0$ считаем, что $I_k^{q,\sigma}[\varphi] \equiv D_t^q J_k(t,\xi)\varphi(\xi)$. С помощью (1) нетрудно проверить, что для всякого целого $l \geq 0$ и любого μ-однородного полинома $P(\xi)$ μ-степени ν

$$D_t^l I_k^{q,\sigma}[\varphi](t,\xi) = I_k^{q+l,\sigma - l\mu_0}[\varphi](t,\xi), \quad I_k^{q,\sigma}[P\varphi](t,\xi) = P(\xi) I_k^{q,\sigma-\nu}[\varphi](t,\xi). \tag{12}$$

Кроме того, для $I_k^{q,\sigma}$ выполнена оценка, аналогичная неравенству (2).

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$\left| I_k^{q,\sigma}[\varphi](t,\xi) \right| \leq Q(t) \rho^{\sigma + q\mu_0 - n_k + \varepsilon} \|\varphi\|_l,$$

где ρ — μ-однородный полярный радиус точки ξ; числа $l \geq 0$ и $\varepsilon > 0$ зависят только от параметров μ, σ и q; $Q(t)$ — многочлен, коэффициенты которого определяются этими же параметрами и константами из неравенства (11).

Доказательство. При $\sigma < 0$ нужный результат сразу следует из (11). Рассмотрим случай $\sigma \geq 0$. Обозначим через s_0 наименьшее целое число, для которого $s_0\mu_0 > \sigma$, и разложим производную $D_t^q J_k(t,\xi)$ в определении $I_k^{q,\sigma}$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа:

$$I_k^{q,\sigma}[\varphi](t,\xi) = \frac{t^{s_0}}{s_0!} D_t^{q+s_0} J_k(\theta t,\xi)\varphi(\xi) + \sum_{s\mu_0 \leq \sigma} \frac{t^s}{s!} D_t^{s+q} J_k(0,\xi) \bigl\{ \varphi(\xi) - T^\mu_{\sigma - s\mu_0}[\varphi](\xi) \bigr\}.$$

Из этого равенства, (11) и (2) вытекает, что при некоторых $l \geq 0$ и $\gamma > 0$

$$\left| I_k^{q,\sigma}[\varphi](t,\xi) \right| \leq C \Bigl[t^{s_0} \rho^{(s_0+q)\mu_0 - n_k} + \sum_{s\mu_0 \leq \sigma} t^s \rho^{(s+q)\mu_0 - n_k} \rho^{\sigma - s\mu_0 + \gamma} \Bigr] \cdot \|\varphi\|_l.$$

Выбирая $\varepsilon = \min\{\gamma, s_0\mu_0 - \sigma\}$, приходим к утверждению леммы. $\square$

4. Построение H_k. Идея дальнейших рассуждений была предложена в [5] при выводе формул для фундаментального решения уравнения Лапласа и развита затем в [6] при отыскании фундаментальных решений для произвольных квазиэллиптических уравнений. Положим $\Lambda(\xi) = A(0, i\xi)$ и будем искать решение задачи (8), (9) среди отображений $H_k^p : t \mapsto H_k^p(t,\xi)$ со значениями в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций медленного роста, действующих на пробные функции $\varphi(\xi)$ из класса Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$\big(H_k^p(t,\xi), \varphi(\xi)\big) = \int\limits_{\|\xi\|>1} J_k(t,\xi)\varphi(\xi)\frac{d\xi}{\Lambda^p(\xi)} + \int\limits_{\|\xi\|<1} I_k^{0,n_k+mp-|\mu|}[\varphi](t,\xi)\frac{d\xi}{\Lambda^p(\xi)}. \tag{13}$$

Покажем, что при каждом $t \geq 0$ эта формула действительно определяет обобщенную функцию, принадлежащую $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Более того, отображение H_k^p : $t \mapsto H_k^p(t,\xi)$ бесконечно дифференцируемо по t на полупрямой $t \geq 0$. Формально применив к обеим частям (13) операцию D_t^q с учетом (12), находим

$$D_t^q\big(H_k^p(t,\xi), \varphi(\xi)\big) = \int\limits_{\|\xi\|>1} D_t^q J_k(t,\xi)\varphi(\xi)\frac{d\xi}{\Lambda^p(\xi)} + \int\limits_{\|\xi\|<1} I_k^{q,n_k+mp-|\mu|-q\mu_0}[\varphi](t,\xi)\frac{d\xi}{\Lambda^p(\xi)}. \tag{14}$$

Первый из этих интегралов оценим с помощью (11), а во втором перейдем к μ-однородным полярным координатам (ρ,ω) и воспользуемся леммой 1. В итоге получим

$$\big|D_t^q\big(H_k^p(t,\xi), \varphi(\xi)\big)\big| \leq C \sup_{\|\xi\|>1} |\rho^s\varphi(\xi)| \int\limits_{\|\xi\|>1} \rho^{q\mu_0-n_k-mp-s}\,d\xi + C|Q(t)|\cdot\|\varphi\|_l^{B_1}\int\limits_0^1 \frac{\rho^{mp-|\mu|+\varepsilon}}{\rho^{mp}}\rho^{|\mu|-1}\,d\rho \int\limits_{\|\omega\|=1}\frac{|\Phi(\omega)|dS_\omega}{|\Lambda^p(\omega)|},$$

где s — произвольное положительное число. Выберем s настолько большим, чтобы функция $\rho^{q\mu_0-n_k-mp-s}$ была суммируема в области $\|\xi\|>1$. Тогда интегралы в правой части последнего неравенства, а вместе с ними и оба интеграла в (14) будут сходиться равномерно по $t \geq 0$ на любом конечном промежутке. Непрерывность функционала (14) в пространстве $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ следует из того, что сходимость элементов в $\mathscr{S}$ влечет их сходимость по норме $\sup\limits_{\|\xi\|>1}|\rho^s\varphi(\xi)| + \|\varphi\|_l^{B_1}$.

Вычислим значения обобщенных функций $P(\xi)D_t^qH_k^p(t,\xi)$, где $P(\xi)$ — μ-однородный полином порядка ν. Согласно (14) и (12) имеем

$$\begin{aligned}\big(P(\xi)D_t^qH_k^p(t,\xi), \varphi(\xi)\big) &= D_t^q\big(H_k^p(t,\xi), P(\xi)\varphi(\xi)\big)\\ &= \int\limits_{\|\xi\|>1} D_t^qJ_k(t,\xi)\frac{P(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi}{\Lambda^p(\xi)} + \int\limits_{\|\xi\|<1} P(\xi)I_k^{q,n_k+mp-|\mu|-q\mu_0-\nu}[\varphi](t,\xi)\frac{d\xi}{\Lambda^p(\xi)}\\ &= \int\limits_{\|\xi\|>1} P(\xi)D_t^qJ_k(t,\xi)\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\Lambda^p(\xi)} + \int\limits_{\|\xi\|<1}\Big\{P(\xi)D_t^qJ_k(t,\xi)\cdot\varphi(\xi)\end{aligned}$$

$$
- \sum_{\substack{s\mu_0+q\mu_0+\nu \\ \le n_k+mp-|\mu|}} \frac{t^s}{s!}\bigl[D_t^s P(\xi) D_t^q J_k(t,\xi)\bigr]_{t=0} T^{\mu}_{n_k+mp-|\mu|-s\mu_0-q\mu_0-\nu}[\varphi]\biggr\}\frac{d\xi}{\Lambda^p(\xi)}.
$$

Пусть теперь $B(D_t, D_x)$ — произвольный однородный относительно вектора (μ_0, μ) дифференциальный оператор (μ_0, μ)-порядка σ с постоянными коэффициентами. Выражение $B(D_t, i\xi)$ является линейной комбинацией операций вида $P_q(\xi) D_t^q$, где $P_q(\xi)$ — μ-однородные полиномы порядков $\sigma - q\mu_0$. Поэтому

$$
\bigl(B(D_t, i\xi) H_k^p, \varphi\bigr) = \int\limits_{\|\xi\|>1} B(D_t, i\xi) J_k(t,\xi) \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{\Lambda^p(\xi)} + \int\limits_{\|\xi\|<1} \biggl\{ B(D_t, i\xi) J_k(t,\xi)\cdot \varphi(\xi)
$$

$$
- \sum_{s\mu_0 \le n_k+mp-|\mu|-\sigma} \frac{t^s}{s!}\bigl[D_t^s B(D_t, i\xi) J_k(t,\xi)\bigr]_{t=0} T^{\mu}_{n_k+mp-|\mu|-s\mu_0-\sigma}[\varphi]\biggr\}\frac{d\xi}{\Lambda^p(\xi)}.
$$

Полагая $B(D_t, i\xi)$ равным $\Lambda^q(\xi)$, $A(D_t, i\xi)$ или $B_j(D_t, i\xi)$ и используя свойства функций $J_k(t,\xi)$, непосредственно придем к следующему заключению.

Лемма 2. *Отображения $H_k^p : t \mapsto H_k^p(t,\xi)$, определенные формулой* (13), *принимают значения в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, бесконечно дифференцируемы при $t \ge 0$ и таковы, что*

$$
\begin{gathered}
\Lambda^q(\xi) H_k^p(t,\xi) \equiv A^q(0, i\xi) H_k^p(t,\xi) = H_k^{p-q}(t,\xi), \quad 0 \le q \le p; \\
A(D_t, i\xi) H_k^p(t,\xi) = 0; \\
B_j(D_t, i\xi) H_k^p(0,\xi) = 0, \quad j \ne k; \\
B_k(D_t, i\xi) H_k^0(0,\xi) = (2\pi)^{-n/2}.
\end{gathered}
$$

Таким образом, отображение $H_k : t \mapsto H_k^0(t,\xi)$ является искомым решением системы (8), (9).

5. Вычисление G_k. Чтобы завершить построение ядер Пуассона, осталось найти обратное преобразование Фурье $G_k^p(t,x) = F^{-1}\bigl[H_k^p(t,\xi)\bigr]$. По определению обратного преобразования Фурье обобщенных функций и в силу (13) для любого элемента $\varphi(x)$ пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\bigl(G_k^p(t,x), \varphi(x)\bigr) \equiv \bigl(F^{-1}\bigl[H_k^p\bigr](t,x), \varphi(x)\bigr) \\
&\quad = \bigl(H_k^p(t,\xi), F^{-1}[\varphi](\xi)\bigr) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\|\xi\|>1} \biggl[\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} J_k(t,\xi) \varphi(x)\, dx\biggr] \frac{d\xi}{\Lambda^p(\xi)} \\
&\qquad + (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\|\xi\|<1} \biggl\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} I_k^{0, n_k+mp-|\mu|}[e^{ix\xi}](t,\xi) \varphi(x)\, dx\biggr\} \frac{d\xi}{\Lambda^p(\xi)}.
\end{aligned}
$$

Ввиду (11) при $t > 0$ здесь можно переставить местами интегралы по x и ξ. После перестановки получится, что искомое преобразование Фурье — регулярная обобщенная функция, порожденная выражением

$$
\begin{aligned}
G_k^p(t,x) = (2\pi)^{-n/2} &\int\limits_{\|\xi\|>1} e^{ix\xi} J_k(t,\xi) \frac{d\xi}{\Lambda^p(\xi)} \\
&+ (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\|\xi\|<1} I_k^{0, n_k+mp-|\mu|}[e^{ix\xi}](t,\xi) \frac{d\xi}{\Lambda^p(\xi)}. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Покажем, что ядра $G_k^p(t,x)$ бесконечно дифференцируемы в замыкании полупространства $\mathbb{R}_+^{n+1}$, исключая начало координат. Для второго слагаемого в правой части (15) это вытекает из (12), леммы 1 и цепочки соотношений

$$\begin{aligned}\bigl|D_t^q D_x^\alpha I_k^{0,n_k+mp-|\mu|}[e^{ix\xi}](t,\xi)\bigr| &= \bigl|I_k^{q,n_k+mp-|\mu|-q\mu_0}[D_x^\alpha e^{ix\xi}](t,\xi)\bigr| \\ &= \bigl|(i\xi)^\alpha I_k^{q,n_k+mp-|\mu|-q\mu_0-\alpha\mu}[e^{ix\xi}](t,\xi)\bigr| \le C(t)\rho^{mp-|\mu|+\varepsilon},\end{aligned}$$

гарантирующих бесконечную дифференцируемость соответствующих интегралов.

Первое слагаемое в правой части (15) рассматривается чуть сложнее. Его дифференцируемость в малых окрестностях точек (t,x), где $t>0$, следует из экспоненциального убывания функции $J_k(t,\xi)$ и ее производных при $\|\xi\|\to\infty$. В малой окрестности всякой точки $(0,x)$, где $x\neq 0$, воспользуемся очевидным тождеством $\Delta_\xi e^{ix\xi} = -\|x\|^2 e^{ix\xi}$ и формулой Грина:

$$\begin{aligned}&\|x\|^2 \int\limits_{\|\xi\|>1} e^{ix\xi} J_k(t,\xi)\frac{d\xi}{\Lambda^p(\xi)} = -\int\limits_{\|\xi\|>1} [\Delta_\xi e^{ix\xi}]\frac{J_k(t,\xi)\,d\xi}{\Lambda^p(\xi)} \\ &= -\int\limits_{\|\xi\|>1} e^{ix\xi}\Delta_\xi\left[\frac{J_k(t,\xi)}{\Lambda^p(\xi)}\right]d\xi + \int\limits_{\|\xi\|=1}\left\{\frac{\partial e^{ix\xi}}{\partial n_\xi}\frac{J_k(t,\xi)}{\Lambda^p(\xi)} - e^{ix\xi}\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left[\frac{J_k(t,\xi)}{\Lambda^p(\xi)}\right]\right\}dS_\xi.\end{aligned}$$

Здесь n_ξ — внешняя нормаль к единичной сфере. Продолжая действовать подобным образом, придем к равенству вида

$$\begin{aligned}&\|x\|^{2l}\int\limits_{\|\xi\|>1} e^{ix\xi}J_k(t,\xi)\frac{d\xi}{\Lambda^p(\xi)} \\ &\qquad = (-1)^l \int\limits_{\|\xi\|>1} e^{ix\xi}\cdot\Delta_\xi^l\left[\frac{J_k(t,\xi)}{\Lambda^p(\xi)}\right]d\xi + \int\limits_{\|\xi\|=1} F_l(t,x,\xi)\,dS_\xi.\end{aligned}$$

Полученный поверхностный интеграл является, очевидно, бесконечно дифференцируемым по t и x, так как он не содержит никаких особенностей. На основании (11) функцию $\Delta_\xi^l[J_k(t,\xi)\Lambda^{-p}(\xi)]$ можно сделать убывающей при $\|\xi\|\to\infty$ быстрее любой наперед заданной степени $\|\xi\|$, если выбрать l достаточно большим. Но тогда и объемный интеграл можно будет дифференцировать по t и x любое наперед заданное число раз.

Из приведенных рассуждений, общих свойств преобразования Фурье и леммы 2 вытекает

Лемма 3. *Ядра $G_k^p(t,x)$ бесконечно дифференцируемы на множестве $t\ge 0$, $t+\|x\|>0$, причем*

$$A^q(0,D_x)G_k^p(t,x) = G_k^{p-q}(t,x),\ 0\le q\le p;\quad A(D_t,D_x)G_k^p(t,x)=0;$$

$$B_j(D_t,D_x)G_k^p(0,x)=0,\ j\neq k;\quad B_k(D_t,D_x)G_k^0(t,x)\xrightarrow[t\to+0]{\mathscr{S}'}\delta(x),\ k=1,\dots,m_+.$$

Следовательно, функции $G_k(t,x)\equiv G_k^0(t,x)$ являются ядрами Пуассона краевой задачи (3), (4). Нам остается переписать формулу (15), определяющую значения $G_k^p(t,x)$, в более обозримом и удобном для приложений виде. Обозначим через r и $(\theta_0,\theta_1,\dots,\theta_n)$ обобщенные полярные координаты точки (t,x) в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, однородные относительно вектора $(\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_n)$, т. е.

$t = r^{\mu_0}\theta_0$, $x_j = r^{\mu_j}\theta_j$, вектор $(\theta_0,\dots,\theta_n)$ принадлежит $(n+1)$-мерной единичной сфере. Положим для краткости $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_n)$ и перейдем в (15) к новым переменным интегрирования $\zeta_j = r^{\mu_j}\xi_j$. Обозначив μ-однородные полярные координаты точки ζ в пространстве $\mathbb{R}^n$ через ρ и ω, заметив, что сфере $\|\xi\| = 1$ соответствует в переменных ζ эллипсоид $\rho = r$, и применив свойство (10), находим

$$G_k^p(t,x) = \frac{r^{n_k+mp-|\mu|}}{(2\pi)^{n/2}}\Bigg\{\int\limits_{\rho>r} e^{i\theta\zeta}J_k(\theta_0,\zeta)\frac{d\zeta}{\Lambda^p(\zeta)}$$

$$+\int\limits_{\rho<r}\Bigg[e^{i\theta\zeta}J_k(\theta_0,\zeta) - \sum_{\substack{s\mu_0+\beta\mu\le\\ n_k+mp-|\mu|}}\frac{t^s(ix)^\beta}{s!\beta!}r^{-s\mu_0-\beta\mu}\zeta^\beta D_t^s J_k(0,\zeta)\Bigg]\frac{d\zeta}{\Lambda^p(\zeta)}\Bigg\}$$

$$= \frac{r^{n_k+mp-|\mu|}}{(2\pi)^{n/2}}\Bigg\{\int\limits_{\rho>1} e^{i\theta\zeta}J_k(\theta_0,\zeta)\frac{d\zeta}{\Lambda^p(\zeta)} + \int\limits_{\rho<1}\Bigg[e^{i\theta\zeta}J_k(\theta_0,\zeta)$$

$$-\sum_{\substack{s\mu_0+\beta\mu\le\\ n_k+mp-|\mu|}}\frac{\theta_0^s(i\theta)^\beta}{s!\beta!}\zeta^\beta D_t^s J_k(0,\zeta)\Bigg]\frac{d\zeta}{\Lambda^p(\zeta)} - \sum_{\substack{s\mu_0+\beta\mu\le\\ n_k+mp-|\mu|}}\frac{t^s(ix)^\beta}{s!\beta!}r^{-s\mu_0-\beta\mu}$$

$$\times\int\limits_1^r \rho^{\beta\mu+s\mu_0-n_k-mp+|\mu|-1}d\rho\int\limits_{\|\omega\|=1}\frac{\omega^\beta D_t^s J_k(0,\omega)|\Phi(\omega)|\,dS_\omega}{\Lambda^p(\omega)}\Bigg\}.$$

Здесь, как и выше, $\Phi(\omega)\rho^{|\mu|-1}$ — якобиан перехода к полярным координатам.

Получившийся интеграл по области $\rho > 1$ обозначим через $(2\pi)^{n/2}U_k^p(\theta_0,\theta)$, интеграл по области $\rho < 1$ — через $(2\pi)^{n/2}V_k^p(\theta_0,\theta)$, а интеграл по ρ в пределах от 1 до r вычислим в явном виде. В результате придем к выражению

$$G_k^p(t,x) = r^{n_k+mp-|\mu|}\Bigg[U_k^p(\theta_0,\theta) + V_k^p(\theta_0,\theta) - \sum_{\substack{s\mu_0+\beta\mu<\\ n_k+mp-|\mu|}} g_k^p(s,\beta)\theta_0^s\theta^\beta\Bigg]$$

$$+\ln r\sum_{\substack{s\mu_0+\beta\mu=\\ n_k+mp-|\mu|}} f_k^p(s,\beta)t^s x^\beta + \sum_{\substack{s\mu_0+\beta\mu<\\ n_k+mp-|\mu|}} g_k^p(s,\beta)t^s x^\beta,$$

где

$$f_k^p(s,\beta) = -\int\limits_{\|\omega\|=1}\frac{(i\omega)^\beta D_t^s J_k(0,\omega)|\Phi(\omega)|\,dS_\omega}{(2\pi)^{n/2}s!\beta!\Lambda^p(\omega)},$$

$$g_k^p(s,\beta) = -\int\limits_{\|\omega\|=1}\frac{(i\omega)^\beta D_t^s J_k(0,\omega)|\Phi(\omega)|\,dS_\omega}{(2\pi)^{n/2}s!\beta!(\beta\mu+s\mu_0-n_k-mp+|\mu|)\Lambda^p(\omega)}.$$

Полагая

$$W_k^p(\theta_0,\theta) = U_k^p(\theta_0,\theta) + V_k^p(\theta_0,\theta) - \sum_{\substack{s\mu_0+\beta\mu<\\ n_k+mp-|\mu|}} g_k^p(s,\beta)\theta_0^s\theta^\beta,$$

$$P_k^p(t,x) = \sum_{\substack{s\mu_0+\beta\mu=\\ n_k+mp-|\mu|}} f_k^p(s,\beta)t^s x^\beta,\quad Q_k^p(t,x) = \sum_{\substack{s\mu_0+\beta\mu<\\ n_k+mp-|\mu|}} g_k^p(s,\beta)t^s x^\beta,$$

получаем разложение

$$G_k^p(t,x) = r^{n_k+mp-|\mu|}W_k^p(\theta_0,\theta) + P_k^p(t,x)\ln r + Q_k^p(t,x). \qquad (16)$$

Итог изложенному подведем в следующей теореме.

Теорема 1. *Всякая квазиэллиптическая краевая задача вида* (3), (4), *удовлетворяющая условию Лопатинского, обладает системой ядер Пуассона* $G_k(t,x)$, $k = 1,\dots,m_+$. *При любом целом* $p \geq 0$ *эти ядра записываются в дивергентной форме* $G_k = A^p(0,D_x)G_k^p$. *Для* G_k^p *справедливо разложение* (16), *где* W_k^p — *бесконечно дифференцируемая функция,* P_k^p — *однородный полином степени* $n_k + mp - |\mu|$ *относительно вектора* (μ_0,μ), *а* (μ_0,μ)*-степень многочлена* Q_k^p *меньше* $n_k + mp - |\mu|$. *Если* $n_k + mp < |\mu|$, *то полином* P_k^p *равен нулю. Многочлен* Q_k^p *обращается в нуль при* $n_k + mp \leq |\mu|$.

6. Принцип максимума Миранды — Агмона. Итак, формула (7) дает явный вид классических решений краевой задачи (3), (4) не только для бесконечно дифференцируемых и финитных граничных данных, но также для всех $f_j(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Разумеется, теорема 1 позволяет существенно ослабить требования к f_j. Однако мы не будем на этом останавливаться, а приведем более интересный результат, обобщающий классический принцип максимума для эллиптических и параболических уравнений второго порядка. Речь идет об оценке решений задачи (3), (4), которая в эллиптическом случае ($m_0 = m_1 = \dots = m$, $m = 2m_+$) имеет вид (см. [1, теорема 2.2])

$$\left|D_x^\alpha B_j(D_t,D_x)u(t,x)\right| \leq C_l \sum_{k=1}^{m_+} \sum_{|\beta|=l-n_k} \sup\left|D_x^\beta f_k(x)\right|, \quad |\alpha| = l - n_j. \qquad (17)$$

Здесь l — произвольное целое число, не меньшее порядков всех граничных операторов B_j. Впервые такое неравенство было установлено Мирандой [7] для уравнений с двумя независимыми переменными, а использованные при этом формулы для ядер Пуассона соответствующих краевых задач найдены Агмоном [8]. Мы распространим эту оценку на квазиэллиптические уравнения и нецелые значения параметра l.

Приведем необходимые далее определения. Будем говорить, что число l является μ-целым, если существует мультииндекс α (с целыми компонентами), для которого $l = \alpha\mu$. Если α и β — два мультииндекса, то неравенство $\alpha \leq \beta$ эквивалентно совокупности n скалярных неравенств $\alpha_j \leq \beta_j$, $j = 1,2,\dots,n$. Неравенство $\alpha < \beta$ означает, что $\alpha \leq \beta$ и $\alpha \neq \beta$. Символом e^k обозначим единичный вектор, направленный вдоль оси x_k; компонента e_j^k вектора e^k равна единице при $j = k$ и нулю в противном случае.

Пусть $l \geq 0$, а функция $f(x)$ определена и непрерывна в пространстве $\mathbb{R}^n$ вместе с производными $D_x^\alpha f$ порядков $\alpha\mu \leq l$. Определим полунорму

$$[f]_l = \sup\left|D_x^\alpha f(x)\right| + \sup \frac{\left|D_x^\alpha f(x+he^j) - D_x^\alpha f(x)\right|}{|h|^{(l-\alpha\mu)/\mu_j}}.$$

В первом случае супремум берется по всем $x \in \mathbb{R}^n$ и всем таким α, что $\alpha\mu = l$. Если l не является μ-целым, то первое слагаемое не имеет смысла и его нужно вообще опустить. Во втором слагаемом верхняя грань вычисляется по всевозможным α и j, для которых $0 < l - \alpha\mu < \mu_j$, и всем $x \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}$. Если множество соответствующих значений α окажется пустым (например, при $l = 0$), то последнее слагаемое также следует опустить.

Теорема 2. *Для всякого* $l \geq \max_j n_j$ *и любого набора* $f_j(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *решение краевой задачи* (3), (4), *определенное формулой* (7), *удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{j=1}^{m_+}[B_j(D_t,D_x)u(t,x)]_{l-n_j} \leq C\sum_{k=1}^{m_+}[f_k(x)]_{l-n_k}, \quad t \geq 0,$$

где C *зависит только от* l, n, m_j *и коэффициентов уравнений* (3), (4).

Доказательство. Сначала выведем необходимые для доказательства следствия из формулы (16). Пусть $B(D_t,D_x)$ — однородный относительно вектора (μ_0,μ) оператор порядка σ. Число $\lambda = \sigma+|\mu|-mp-n_k$ назовем показателем выражения $B(D_t,D_x)G_k^p$. Если $\lambda > 0$, то в силу (16) выражение BG_k^p является (μ_0,μ)-однородным порядка $-\lambda$. При этом

$$\left|BG_k^p(t,x)\right| \leq Cr^{-\lambda} \to 0 \quad (|x_s| \to \infty,\ 1 \leq s \leq n).$$

Отсюда и из формулы Ньютона — Лейбница вытекает, что при $\lambda > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} D_s BG_k^p(t,x)\,dx_s = 0. \tag{18}$$

Если BG_k^p обращается в нуль для $t=0$, $x \neq 0$, то функция $t^{-1}BG_k^p$ ограничена на полусфере $S_+ = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : t^2 + \|x\|^2 = 1\right\}$. С другой стороны, при положительном показателе λ выражение BG_k^p однородно. Поэтому

$$\left|BG_k^p(t,x)\right| = t \cdot \sup_{S_+}\left|t^{-1}BG_k^p(t,x)\right| \cdot r^{-\lambda-\mu_0} \leq \frac{Ct}{(t^{1/\mu_0}+\rho_x)^{\lambda+\mu_0}},$$

где ρ_x — μ-однородный полярный радиус точки x в пространстве $\mathbb{R}^n$. В частности, при $j \neq k$ перечисленным условиям удовлетворяют все выражения вида $D_x^\beta B_j G_k^p$ с показателями $\lambda = \beta\mu + |\mu| + n_j - mp - n_k > 0$. Значит,

$$\left|D_x^\beta B_j G_k^p(t,x)\right| \leq \frac{Ct}{(t^{1/\mu_0}+\rho_x)^{\lambda+\mu_0}}. \tag{19}$$

Приведенные рассуждения вместе с леммой 3 гарантируют справедливость этого неравенства также при $j=k$, $p=0$ и всех β.

Вернемся к доказательству теоремы и заметим, что достаточно установить оценку

$$[B_j(D_t,D_x)(G_k * \varphi)]_{l-n_j} \leq C[\varphi]_{l-n_k}, \quad l \geq \max\{n_j,n_k\},\ \varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Рассмотрим какую-нибудь производную $D_x^\alpha B_j(G_k * \varphi)$. Выберем $p \geq 0$ так, чтобы $mp + \alpha\mu \geq l - n_k$. Пользуясь формулой $G_k = A^p(0,D_x)G_k^p$, представим свертку $D_x^\alpha B_j(G_k * \varphi)$ как линейную комбинацию производных $D_x^\beta B_j\left(G_k^p * \varphi\right)$ порядка $\beta\mu = mp + \alpha\mu$. Для всякого β определим такой мультииндекс $\gamma \leq \beta$, чтобы величина $\gamma\mu$ принимала максимально возможное значение, не превосходящее $l - n_k$. Понятно, что γ существует всегда, но может не быть единственным. Интегрируя по частям, приведем каждую производную $D_x^\beta B_j\left(G_k^p * \varphi\right)$ к виду $D_x^{\beta-\gamma}B_j\left(G_k^p * D_x^\gamma\varphi\right)$. Теперь заключение теоремы 2 сводится к двум утверждениям:

$$\left|D_x^{\beta-\gamma}B_j\left(G_k^p * D_x^\gamma\varphi\right)\right| \leq C[\varphi]_{l-n_k}, \quad \text{если } \alpha\mu = l - n_j; \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\big|D_x^{\beta-\gamma}B_j\big(G_k^p*D_x^\gamma\varphi\big)(t,x+he^i)-D_x^{\beta-\gamma}B_j\big(G_k^p*D_x^\gamma\varphi\big)(t,x)\big|\\&\qquad\le C[\varphi]_{l-n_k}|h|^{(l-n_j-\alpha\mu)/\mu_i},\quad \text{если } 0<l-n_j-\alpha\mu<\mu_i. \quad (21)\end{aligned}$$

При доказательстве каждого из этих неравенств возможны случаи: $\gamma\mu = l-n_k$ и $\gamma\mu < l-n_k$. Ограничимся подробным анализом только второго случая, более сложного в техническом отношении. Если $\gamma\mu < l-n_k$, то $\gamma<\beta$, поскольку $l-n_k \le \beta\mu$. Значит, $\gamma+e^s\le\beta$ при некотором s. В силу предъявленного к γ условия максимальности имеем $l-n_k<(\gamma+e^s)\mu$, т. е. $l-n_k-\gamma\mu<\mu_s$ и

$$\big|D_y^\gamma\varphi(y',y_s)-D_y^\gamma\varphi(y',x_s)\big|\le[\varphi]_{l-n_k}|x_s-y_s|^{(l-n_k-\gamma\mu)/\mu_s}, \quad (22)$$

где y' означает дополнение к y_s до полного набора всех координат: $(y',y_s)=y$.

Вычислим показатель λ выражения $K(t,x)=D_x^{\beta-\gamma}B_jG_k^p$ при $\alpha\mu=l-n_j$. По определению

$$\lambda=(\beta-\gamma)\mu+|\mu|+n_j-mp-n_k=\alpha\mu+|\mu|+n_j-\gamma\mu-n_k=|\mu|+(l-n_k-\gamma\mu)>|\mu|.$$

Так как $\beta-\gamma\ge e^s$, ядро K представляется в дивергентной форме: $K=D_sK_1$. Показатель выражения K_1 равен $\lambda-\mu_s>|\mu|-\mu_s\ge0$. Следовательно, $K(t,x)$ обладает свойством (18), в силу которого

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\Bigg\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(t,x-y)\,dy_s\Bigg\}D_y^\gamma\varphi(y',x_s)\,dy'=0.$$

Отсюда с помощью (19) и (22) последовательно выводим неравенство (20):

$$\begin{aligned}\big|D_x^{\beta-\gamma}B_j(G_k^p*D_x^\gamma\varphi)\big|&=\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(t,x-y)D_y^\gamma\varphi(y)\,dy\Bigg|\\&=\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(t,x-y)[D_y^\gamma\varphi(y)-D_y^\gamma\varphi(y',x_s)]\,dy_sdy'\Bigg|\\&\le C[\varphi]_{l-n_k}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{t|x_s-y_s|^{(l-n_k-\gamma\mu)/\mu_s}\,dy}{(t^{1/\mu_0}+\rho_{x-y})^{\lambda+\mu_0}}\le C[\varphi]_{l-n_k}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{t\rho_z^{l-n_k-\gamma\mu}\,dz}{(t^{1/\mu_0}+\rho_z)^{\lambda+\mu_0}}\\&=C[\varphi]_{l-n_k}\int\limits_0^\infty\frac{t\rho_z^{l-n_k-\gamma\mu+|\mu|-1}\,d\rho_z}{(t^{1/\mu_0}+\rho_z)^{\lambda+\mu_0}}\int\limits_{|\omega|=1}|\Phi(\omega)|\,dS_\omega\le C[\varphi]_{l-n_k}\int\limits_0^\infty\frac{\tau^{-1+\lambda}\,d\tau}{(1+\tau)^{\lambda+\mu_0}}.\end{aligned}$$

Здесь введена новая переменная интегрирования $z=x-y$, выполнен переход к обобщенным полярным координатам ρ_z, ω с якобианом $\rho_z^{|\mu|-1}\Phi(\omega)$, а затем сделана замена переменных $\rho_z=t^{1/\mu_0}\tau$. Интеграл по τ сходится, поскольку $\lambda>0$ и $\mu_0>0$.

Приступим к неравенству (21). Сразу же исключим из рассмотрения относительно простые случаи $j=k$ или $n=1$. По-прежнему считаем, что $e^s\le\beta-\gamma$, $0<l-n_k-\gamma\mu<\mu_s$ и, кроме того, $0<l-n_j-\alpha\mu<\mu_i$. При этом показатель λ выражения $K=D_x^{\beta-\gamma}B_jG_k^p$ оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda&=(\beta-\gamma)\mu+|\mu|+n_j-mp-n_k=\alpha\mu+n_j-\gamma\mu-n_k+|\mu|\\&=(\mu_i+\alpha\mu+n_j-l)+(l-n_k-\gamma\mu)+|\mu|-\mu_i>|\mu|-\mu_i.\end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения различаются в случаях $i \neq s$ и $i = s$. Пусть сначала $i \neq s$. Тогда $\lambda - \mu_s > |\mu| - \mu_i - \mu_s \geq 0$ и к ядру K опять применима формула (18). Обозначим через y'' дополнение к переменной y_i до полного набора всех координат пространства $\mathbb{R}^n$ и преобразуем разность в левой части (21) к виду

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [K(t, x - y + he^i) - K(t, x - y)] \big[D_y^\gamma \varphi(y', y_s) - D_y^\gamma \varphi(y', x_s)\big] \, dy_s dy'$$

$$= \int\limits_{|x_i - y_i| > 2|h|} \Bigg\{ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} [K(t, x - y + he^i) - K(t, x - y)] \times \big[D_y^\gamma \varphi(y', y_s) - D_y^\gamma \varphi(y', x_s)\big] \, dy'' \Bigg\} dy_i$$

$$+ \int\limits_{|x_i - y_i| < 2|h|} \Bigg\{ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} K(t, x - y + he^i) \big[D_y^\gamma \varphi(y', y_s) - D_y^\gamma \varphi(y', x_s)\big] \, dy'' \Bigg\} dy_i$$

$$- \int\limits_{|x_i - y_i| < 2|h|} \Bigg\{ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} K(t, x - y) \big[D_y^\gamma \varphi(y', y_s) - D_y^\gamma \varphi(y', x_s)\big] \, dy'' \Bigg\} dy_i \overset{\text{def}}{=} I_1 + I_2 + I_3.$$

Заметим, что если $|z_i| > 2|h|$, то обобщенный полярный радиус (в пространстве $\mathbb{R}^n$) всех точек отрезка с концами z и $z + he^i$ не меньше $\mathrm{const}(|z_i|^{1/\mu_i} + \rho_{z''})$, где $(z'', z_i) = z$, а $\rho_{z''}$ — обобщенный полярный радиус точки z'' в $\mathbb{R}^{n-1}$. Следовательно,

$$|K(t, z + he^i) - K(t, z)| = \left| \int\limits_0^h D_i K(t, z + \xi e^i) \, d\xi \right| \leq \frac{C|h|}{(|z_i|^{1/\mu_i} + \rho_{z''})^{\lambda + \mu_i}}.$$

Отсюда и из (22) после замены $z = x - y$ непосредственно вытекает оценка

$$|I_1| \leq \int\limits_{|z_i| > 2|h|} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{C|h| \cdot [\varphi]_{l - n_k} |z_s|^{(l - n_k - \gamma\mu)/\mu_s}}{(|z_i|^{1/\mu_i} + \rho_{z''})^{\lambda + \mu_i}} \, dz'' dz_i$$

$$\leq \int\limits_{2|h|}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} \frac{C|h| \cdot [\varphi]_{l - n_k} \rho_{z''}^{l - n_k - \gamma\mu + |\mu| - \mu_i - 1}}{(|z_i|^{1/\mu_i} + \rho_{z''})^{\lambda + \mu_i}} \, d\rho_{z''} \, dz_i$$

$$= \int\limits_{2|h|}^{\infty} \frac{|h| \, dz_i}{z_i^{2 + (\alpha\mu + n_j - l)/\mu_i}} \int\limits_0^{\infty} \frac{C[\varphi]_{l - n_k} \tau^{l - n_k - \gamma\mu + |\mu| - \mu_i - 1} \, d\tau}{(1 + \tau)^{\lambda + \mu_i}}$$

$$= C[\varphi]_{l - n_k} |h|^{(l - n_j - \alpha\mu)/\mu_i}.$$

Здесь был выполнен переход к обобщенным полярным координатам точки z'', а затем сделана подстановка $\rho_{z''} = \tau z_i^{1/\mu_i}$. Интеграл по τ сходится, так как $(l - n_k - \gamma\mu) + (|\mu| - \mu_i) > 0$ и

$$(\lambda + \mu_i) - (l - n_k - \gamma\mu) - |\mu| + \mu_i = (\mu_i + \alpha\mu + n_j - l) + \mu_i > 0.$$

Оценки интегралов I_2, I_3 практически одинаковы, поэтому рассмотрим только I_2. Полагая $z = x - y + he^i$ и снова переходя к обобщенным полярным координатам точки z'' с учетом (16) и (22), получаем

$$|I_2| \le \int\limits_{|z_i|<3|h|} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{C[\varphi]_{l-n_k}|z_s|^{(l-n_k-\gamma\mu)/\mu_s}}{(|z_i|^{1/\mu_i}+\rho_{z''})^\lambda}\,dz''dz_i$$

$$\le \int\limits_0^{3|h|}\int\limits_0^\infty \frac{C[\varphi]_{l-n_k}\rho_{z''}^{l-n_k-\gamma\mu+|\mu|-\mu_i-1}}{(|z_i|^{1/\mu_i}+\rho_{z''})^\lambda}\,d\rho_{z''}dz_i$$

$$= \int\limits_0^{3|h|} \frac{dz_i}{z_i^{1+(\alpha\mu+n_j-l)/\mu_i}} \int\limits_0^\infty \frac{C[\varphi]_{l-n_k}\tau^{l-n_k-\gamma\mu+|\mu|-\mu_i-1}d\tau}{(1+\tau)^\lambda}$$

$$= C[\varphi]_{l-n_k}|h|^{(l-n_j-\alpha\mu)/\mu_i}.$$

Теперь сходимость интеграла по τ гарантирована условием

$$\lambda-(l-n_k-\gamma\mu)-|\mu|+\mu_i=\mu_i+\alpha\mu+n_j-l>0.$$

В случае $i=s$ формула (18), вообще говоря, не применима к ядру K. Зато она верна для его производных $D_iK\equiv D_sK$, поэтому

$$\big(K*D_x^\gamma\varphi\big)(t,x+he^i)-\big(K*D_x^\gamma\varphi\big)(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^h D_sK(t,x-y+\xi e^s)D_y^\gamma\varphi(y)\,d\xi dy$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^h\int\limits_{-\infty}^\infty D_sK(t,x-y+\xi e^s)\big[D_y^\gamma\varphi(y',y_s)-D_y^\gamma\varphi(y',x_s)\big]\,dy_sd\xi dy'$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^h\int\limits_{|x_s-y_s|>2|h|} D_sK(t,x-y+\xi e^s)\big[D_y^\gamma\varphi(y',y_s)-D_y^\gamma\varphi(y',x_s)\big]\,dy_sd\xi dy'$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{|x_s-y_s|<2|h|} K(t,x-y+he^s)\big[D_y^\gamma\varphi(y',y_s)-D_y^\gamma\varphi(y',x_s+h)\big]\,dy_sdy'$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{|x_s-y_s|<2|h|} K(t,x-y)\big[D_y^\gamma\varphi(y',y_s)-D_y^\gamma\varphi(y',x_s)\big]\,dy_sdy'$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{|x_s-y_s|<2|h|} K(t,x-y+he^s)\big[D_y^\gamma\varphi(y',x_s+h)-D_y^\gamma\varphi(y',x_s)\big]\,dy_sdy'.$$

Первые три слагаемых в правой части последнего равенства оцениваются точно так же, как и рассмотренные выше интегралы I_1, I_2, I_3. Остается последнее слагаемое, которое мы обозначим через I_4.

Рассуждения, приводящие к оценке I_4, зависят от соотношения между величинами $\alpha\mu+n_j$ и $\gamma\mu+n_k$. Если $\alpha\mu+n_j<\gamma\mu+n_k$, то

$$|I_4|\le\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{|x_s-y_s|<2|h|}\frac{C[\varphi]_{l-n_k}|h|^{(l-n_k-\gamma\mu)/\mu_s}}{(|x_s-y_s+h|^{1/\mu_s}+\rho_{x'-y'})^\lambda}\,dy_sdy'$$

$$\le\int\limits_0^{3|h|}\int\limits_0^\infty\frac{C[\varphi]_{l-n_k}|h|^{(l-n_k-\gamma\mu)/\mu_s}\rho_{z'}^{|\mu|-\mu_s-1}\,d\rho_{z'}dz_s}{(|z_s|^{1/\mu_s}+\rho_{z'})^\lambda}.$$

Интеграл по ρ'_z сходится, так как

$$|\mu| > \mu_s, \quad \lambda - |\mu| + \mu_s + 1 > \mu_s - \mu_i + 1 = 1.$$

Выполнив подстановку $\rho_{z'} = \tau z_s^{1/\mu_s}$, окончательно находим

$$|I_4| \le \int\limits_0^{3|h|} \frac{|h|^{(l-n_k-\gamma\mu)/\mu_s}\, dz_s}{z_s^{1+(\alpha\mu+n_j-\gamma\mu-n_k)/\mu_s}} \int\limits_0^{\infty} \frac{C[\varphi]_{l-n_k} \tau^{|\mu|-\mu_s-1}\, d\tau}{(1+\tau)^{\lambda}} = C[\varphi]_{l-n_k} |h|^{(l-n_j-\alpha\mu)/\mu_s}.$$

При $\alpha\mu + n_j \ge \gamma\mu + n_k$ представим ядро K в форме

$$K = D_s K_1$$

и проинтегрируем в I_4 по переменной y_s, используя формулу Ньютона — Лейбница:

$$I_4 = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} K_1(t, x'-y', h+2|h|)\big[D_y^{\gamma}\varphi(y', x_s+h) - D_y^{\gamma}\varphi(y', x_s)\big]\, dy' \\ - \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} K_1(t, x'-y', h-2|h|)\big[D_y^{\gamma}\varphi(y', x_s+h) - D_y^{\gamma}\varphi(y', x_s)\big]\, dy'.$$

Заметим, что при $n > 1$ показатель ядра K_1 равен

$$\lambda - \mu_s = (\alpha\mu + n_j) - (\gamma\mu + n_k) + |\mu| - \mu_s \ge |\mu| - \mu_s > 0.$$

Значит, для K_1 выполняется неравенство (19). Поэтому модуль каждого из получившихся интегралов не превосходит

$$C[\varphi]_{l-n_k} |h|^{(l-n_k-\gamma\mu)/\mu_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{t\,dz'}{(t^{1/\mu_0} + |h|^{1/\mu_s} + \rho_{z'})^{\lambda-\mu_s+\mu_0}} \\ \le C[\varphi]_{l-n_k} |h|^{(l-n_j-\alpha\mu)/\mu_s} \frac{(|h|^{1/\mu_s} t^{-1/\mu_0})^{\lambda-|\mu|}}{(1+|h|^{1/\mu_s} t^{-1/\mu_0})^{\lambda+\mu_0-|\mu|}} \int\limits_0^{\infty} \frac{\tau^{|\mu|-\mu_s-1}\, d\tau}{(1+\tau)^{\lambda-\mu_s+\mu_0}}.$$

Здесь была сделана подстановка $\rho_{z'} = \tau(t^{1/\mu_0} + |h|^{1/\mu_s})$. Интеграл по τ сходится, поскольку

$$|\mu| > \mu_s, \quad \lambda - |\mu| + \mu_0 > 0.$$

Остается заметить, что функция

$$\frac{\xi^{\lambda-|\mu|}}{(1+\xi)^{\lambda+\mu_0-|\mu|}}$$

ограничена при $\xi \ge 0$, так как $\lambda \ge |\mu|$ и $\mu_0 > 0$. Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. Т. I.
2. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 83. С. 3–163.

3. *Демиденко Г. В.* Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. II // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 41–65.
4. *Карапетян Г. А.* Решение полуэллиптических уравнений в полупространстве // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1984. Т. 170. С. 119–138.
5. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
6. *Белоносов В. С.* Классические решения квазиэллиптических уравнений // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 9. С. 21–40.
7. *Miranda C.* Teorema del massimo modulo e teorema di esistenza e di unicità per il problema di Dirichlet relativo alle equazioni ellitiche in due variabili // Ann. Mat. Pura Appl., Ser. 4. 1958. V. 46. P. 265–311.
8. *Agmon S.* Multiple layer potentials and the Dirichlet problem for higher order elliptic equations in the plane. I // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. P. 179–239.

Статья поступила 25 апреля 2005 г.

Белоносов Владимир Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
bvs@math.nsc.ru