Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6

УДК 514.132+512.817

ДИСКРЕТНЫЕ $\mathscr{RP}$–ГРУППЫ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ПОРОЖДАЮЩИМ

Е. Я. Клименко, Н. В. Коптева

Аннотация: Рассмотрены двупорожденные подгруппы группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, для которых оба порождающих и их коммутатор имеют вещественные следы. Даны критерии дискретности таких групп в случае, когда хотя бы один из порождающих параболический. Приведен список соответствующих орбифолдов.

Ключевые слова: клейнова группа, дискретная группа, гиперболический орбифолд.

§ 1. Введение

Двупорожденная подгруппа $\Gamma = \langle f, g\rangle$ группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ определяется своими параметрами $\beta(f) = \mathrm{tr}^2 f - 4$, $\beta(g) = \mathrm{tr}^2 g - 4$ и $\gamma(f,g) = \mathrm{tr}[f,g] - 2$ с точностью до сопряжения, если $\gamma(f,g) \neq 0$ [1].

Мы рассматриваем класс *$\mathscr{RP}$-групп* (двупорожденных групп с вещественными параметрами):

$$\mathscr{RP} = \{\Gamma \mid \Gamma = \langle f, g\rangle \text{ для таких } f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}), \text{ что } \beta(f), \beta(g), \gamma(f,g) \in \mathbb{R}\}.$$

Поскольку условия дискретности для элементарных, фуксовых и NEC-групп известны, мы рассматриваем только неэлементарные $\mathscr{RP}$-группы $\Gamma = \langle f, g\rangle$ без инвариантной плоскости. В данной статье мы изучаем случай, когда f — эллиптический, параболический или гиперболический элемент (см. определения в начале § 2), а g — параболический элемент. Приводим критерии дискретности таких групп (теорема 2.3) и для каждой дискретной группы Γ получаем ее копредставление и соответствующий клейнов орбифолд $Q(\Gamma)$ (теорема 3.1). Теорема 2.3 была доказана в кандидатской диссертации первого автора [2], но ее доказательство до сих пор не было опубликовано.

Группы, порожденные двумя параболическими элементами, изучались ранее. В неопубликованной работе [3] Паркер дал критерий дискретности для произвольной группы, порожденной двумя параболическими элементами. Однако, чтобы воспользоваться этим критерием, необходимо проверить простое условие на *все* элементы группы. Фактически автор использует этот критерий, чтобы доказать красивое условие дискретности для фуксовых групп (утверждение 3.1) и $\mathscr{RP}$-групп (утверждение 3.2). Последнее утверждение и наше следствие 2.5 для случая $\beta(f) = 0$ следуют одно из другого.

В работе [4] Адамс привел некоторое необходимое условие дискретности неэлементарной подгруппы группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, порожденной двумя параболическими элементами. Он доказал существование универсальных оценок сверху

Работа частично поддержана грантом Колледжа Геттисбурга для исследования и профессионального развития, 2003–2004 гг.

на «длину» каждого параболического порождающего и на «расстояние» между ними (длины и расстояния измеряются на границах канонически выбранных каспов). Используя орбифолдную теорему Тёрстона, он также показал, что фундаментальная группа неэлементарного ориентируемого гиперболического трехмерного многообразия M конечного объема порождена двумя параболическими элементами тогда и только тогда, когда M является дополнением в $\mathbb{S}^3$ двумостового зацепления, не являющегося 2-косой. Эйгол [5] обобщил метод Адамса и классифицировал все ориентируемые 3-*орбифолды* с двумя параболическими порождающими.

§ 2. Критерии дискретности

Напомним, что элемент $f \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ с вещественным $\beta(f)$ называется *эллиптическим*, *параболическим*, *гиперболическим* или π-*локсодромическим* в зависимости от того, будет ли $\beta(f) \in [-4,0)$, $\beta(f) = 0$, $\beta(f) \in (0,+\infty)$ или $\beta(f) \in (-\infty,-4)$. Если $\beta(f) \notin [-4,+\infty)$, то f называется *строго локсодромическим*. Среди всех строго локсодромических элементов только π-локсодромические имеют вещественный $\beta(f)$.

Всякий элемент $f \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ с вещественным $\beta(f)$ имеет инвариантные плоскости. Следующая лемма характеризует неэлементарные $\mathscr{RP}$-группы в терминах инвариантных плоскостей порождающих.

Лемма 2.1. *Пусть $\Gamma = \langle f,g\rangle$ — неэлементарная подгруппа группы* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *с вещественными параметрами $\beta(f)$ и $\beta(g)$. Тогда $\gamma(f,g)$ будет вещественным тогда и только тогда, когда либо*

(1) *f и g имеют общую инвриантную плоскость,*

либо

(2) *каждый из порождающих f и g имеет инвариантную плоскость, которая перпендикулярна всем инвариантным плоскостям второго порождающего.*

Доказательство следует из теорем 1–3 работы [6].

Замечание 2.2. Ясно, что все неэлементарные $\mathscr{RP}$-группы без инвариантной плоскости удовлетворяют условию (2) леммы 2.1. Теорема 2.3, приведенная ниже, характеризует все такие дискретные группы в случае, когда один из порождающих параболический, а другой имеет вещественный след.

Эллиптический элемент f порядка n называется *непримитивным*, если он является поворотом на угол $2\pi k/n$, где k и n взаимно просты ($1 < k < n/2$). Если f является поворотом на угол $2\pi/n$, то он называется *примитивным*.

Легко видеть, что если f — непримитивный эллиптический элемент порядка n, то существует целое число $r \geq 2$ такое, что f^r — примитивный эллиптический элемент того же самого порядка n. Ясно, что $\langle f,g\rangle = \langle f^r,g\rangle$. Следовательно, мы можем предположить без ограничения общности, что эллиптический порождающий примитивен (см. также замечание 2.6).

Теорема 2.3. *Пусть $f \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ — гиперболический, параболический или примитивный эллиптический элемент порядка $n \geq 3$, пусть $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ — параболический элемент, и пусть $\Gamma = \langle f,g\rangle$ — неэлементарная $\mathscr{RP}$-группа без инвариантной плоскости. Тогда*

(1) *существует элемент $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такой, что $h^2 = fgf^{-1}g^{-1}$ и $(hg)^2 = 1$;*

(2) *$\Gamma = \langle f,g\rangle$ дискретна тогда и только тогда, когда h — гиперболический, параболический или примитивный эллиптический элемент порядка $p \geq 3$.*

Доказательство. Начнем с построения группы отражений Γ^*, которая содержит группу Γ в качестве подгруппы конечного индекса. Такая группа дискретна тогда и только тогда, когда Γ дискретна. Затем найдем критерии дискретности для группы Γ^* и перепишем их через простые условия на порождающие группы Γ.

1. Построение группы Γ^* и многогранника $\mathscr{T}$, ограниченного плоскостями отражений из Γ^*. Пусть f и g такие, как описано в утверждении теоремы. Поскольку $\Gamma = \langle f, g\rangle$ неэлементарна, f и g не имеют общих неподвижных точек. Пусть $Q \in \partial\mathbb{H}^3$ — неподвижная точка элемента g, и пусть ζ — инвариантная плоскость элемента f, которая проходит через Q.

Поскольку $\Gamma = \langle f, g\rangle$ — неэлементарная $\mathscr{RP}$-группа без инвариантной плоскости, из леммы 2.1 следует, что существует инвариантная плоскость η элемента g, которая перпендикулярна всем инвариантным плоскостям элемента f и, в частности, плоскости ζ. Заметим, что если f эллиптический, то его ось лежит в плоскости η, а если f гиперболический, то его ось перпендикулярна плоскости η.

Легко видеть, что существуют такие плоскости σ и τ, что $f = R_\sigma R_\eta$ и $g = R_\tau R_\zeta$ (мы обозначаем отражение в плоскости κ через R_κ). Ясно, что τ и ζ параллельны, а Q — их общая точка на абсолюте. Поскольку η является инвариантной плоскостью элемента g, то η перпендикулярна и плоскости τ, и плоскости ζ. Аналогично так как ζ является инвариантной плоскостью элемента f, то ζ перпендикулярна как плоскости σ, так и плоскости η.

Если f эллиптический, то плоскости η и σ пересекаются под углом π/n; линия их пересечения будет осью элемента f (рис. 1(а)). Если f параболический, то η и σ параллельны, а P — их общая точка на абсолюте (рис. 1(б)); более того, ζ проходит через точку P. Если же f гиперболический, то плоскости η и σ расходятся, а ось элемента f перпендикулярна как плоскости η, так и плоскости σ (рис. 1(в)).

Рассмотрим полуобороты $e = R_\eta R_\zeta = R_\zeta R_\eta$, $e_f = R_\sigma R_\zeta$ и $e_g = R_\tau R_\eta$. Имеем

$$f = R_\sigma R_\eta = (R_\sigma R_\zeta)(R_\zeta R_\eta) = e_f e, \quad g = R_\tau R_\zeta = (R_\tau R_\eta)(R_\eta R_\zeta) = e_g e.$$

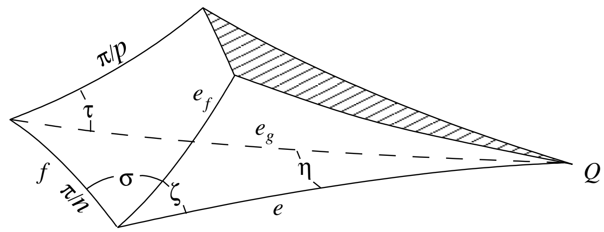
Для группы $\Gamma = \langle f, g\rangle$ определим два ее расширения конечного индекса следующим образом: $\widetilde{\Gamma} = \langle f, g, e\rangle$ и $\Gamma^* = \langle f, g, e, R_\eta\rangle$.

Нетрудно видеть, что $\widetilde{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma e$. Если $e \in \Gamma$, то $\widetilde{\Gamma} = \Gamma$, и если $e \notin \Gamma$, то Γ является подгруппой индекса 2 в группе $\widetilde{\Gamma}$. Как мы увидим позже, обе возможности реализуются (см. конец доказательства теоремы 3.1). Поскольку, более того, $\widetilde{\Gamma}$ является сохраняющей ориентацию подгруппой индекса 2 в группе Γ^*, группы Γ, $\widetilde{\Gamma}$ и Γ^* либо все дискретны, либо все не дискретны.

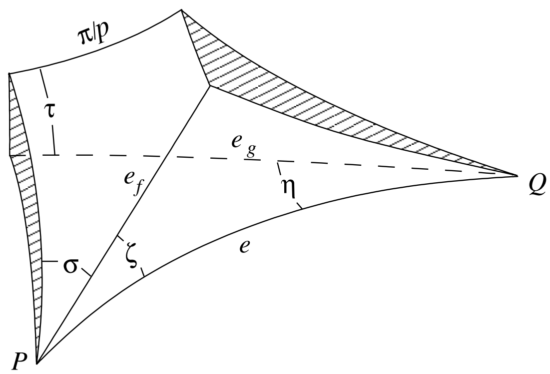
Очевидно, что $\Gamma^* = \langle R_\eta, R_\zeta, R_\sigma, R_\tau\rangle$.

Рассмотрим многогранник $\mathscr{T}$ бесконечного объема, ограниченный плоскостями η, ζ, σ и τ. Как мы видели ранее, плоскости η и ζ, η и τ, ζ и σ взаимно перпендикулярны; плоскости ζ и τ параллельны; плоскости η и σ в зависимости от типа элемента f либо пересекаются под углом π/n, либо параллельны, либо расходятся. Плоскости σ и τ могут либо пересекаться, либо быть параллельными, либо расходиться (это зависит от типа элемента $fgf^{-1}g^{-1}$, что мы покажем в части 2 доказательства).

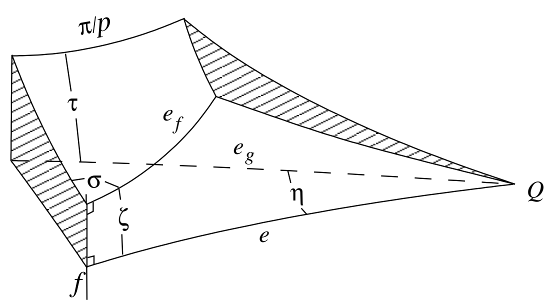
Если σ и τ пересекаются, то двугранный угол многогранника $\mathscr{T}$, образованный этими плоскостями (обозначим его через π/p, p не обязательно целое),



(а) f эллиптический



(б) f параболический



(в) f гиперболический

Рис. 1. Фундаментальные многогранники для Γ^*.

будет острым. Действительно, существует гиперболическая плоскость κ_1, которая перпендикулярна плоскостям ζ, σ и τ; такая плоскость проходит через точку Q. Плоскости ζ, σ и τ высекают гиперболический треугольник Δ с углами 0, $\pi/2$ и π/p в плоскости κ_1 (Δ заштрихован на рис. 1(а)–1(в)). Следовательно, $\pi/p < \pi/2$. Мы сохраняем обозначение π/p, считая $p = \infty$ и $p = \overline{\infty}$ в случаях, когда плоскости σ и τ параллельны или расходятся соответственно. (Условимся, что $\overline{\infty} > \infty > x$, $x/\infty = x/\overline{\infty} = 0$, $\infty/x = \infty$ и $\overline{\infty}/x = \overline{\infty}$ для любого положительного вещественного x.)

Аналогично если η, σ и τ не имеют общей точки в $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$, то существует перпендикулярная им гиперболическая плоскость κ_2. Плоскости κ_1 и κ_2 отсекают многогранник $\overline{\mathscr{T}}$ конечного объема от многогранника $\mathscr{T}$. По теореме Андреева многогранник $\overline{\mathscr{T}}$ и, следовательно, многогранник $\mathscr{T}$ существуют в гиперболическом пространстве для всех $p > 2$ [7, 8]. На самом деле именно многогранник $\overline{\mathscr{T}}$ изображен на рис. 1, причем в предположении, что $p < \infty$ и, более того, $1/p + 1/n > 1/2$ для рис. 1(а).

2. Существование элемента h и достаточное условие дискретности для группы Γ. Понятно, что если

$$p \text{ целое } (p \geq 3),\ \infty \text{ или } \overline{\infty}, \tag{2.1}$$

то многогранник $\mathscr{T}$ и отражения R_η, R_ζ, R_σ и R_τ удовлетворяют условиям теоремы Пуанкаре [9], группа Γ^* дискретна и $\mathscr{T}$ — ее фундаментальный многогранник.

Перепишем условие (2.1) через условия на элементы группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Докажем, что в группе $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ существует единственный элемент h, для которого выполнены оба условия $h^2 = [f,g]$ и $(hg)^2 = 1$; более того, $h = R_\sigma R_\tau$.

Поскольку $\langle f,g\rangle$ — неэлементарная $\mathscr{RP}$-группа, элемент $[f,g]$ будет либо параболическим, либо гиперболическим, либо эллиптическим. Если элемент $[f,g]$ параболический, он имеет только один квадратный корень; если $[f,g]$ гиперболический или эллиптический, то $[f,g]$ имеет в точности два квадратных корня h и $\bar{h}$ в группе $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. А именно, если $[f,g]$ гиперболический, то один из этих корней гиперболический, а другой — π-локсодромический. Если $[f,g]$ эллиптический, тогда оба корня h и $\bar{h}$ — эллиптические элементы.

Покажем, что если мы возьмем $h = R_\sigma R_\tau$, то условия $h^2 = [f,g]$ и $(hg)^2 = 1$ будут выполняться. Действительно,

$$\begin{aligned} h^2 = (R_\sigma R_\tau)^2 = (R_\sigma R_\zeta R_\zeta R_\tau)^2 = (e_f g^{-1})^2 \\ = (e_f e e_g)^2 = (e_f e)(e_g e)(e e_f)(e e_g) = f g f^{-1} g^{-1}. \end{aligned}$$

Более того, $hg = (R_\sigma R_\tau)(R_\tau R_\zeta) = R_\sigma R_\zeta = e_f$. Таким образом, $(hg)^2 = e_f^2 = 1$.

Поясним, что представляет из себя элемент $\bar{h}$. Если $[f,g]$ гиперболический, то $\bar{h}$ является π-локсодромическим элементом с той же самой осью и длиной сдвига, что и h. Если $[f,g]$ эллиптический, то $\bar{h}$ является эллиптическим с той же самой осью, что и h, и с углом поворота $(\pi - 2\pi/p)$, в то время как h — это поворот на угол $2\pi/p$ в противоположном направлении. Ясно, что в обоих случаях $(\bar{h}g)^2 \neq 1$.

Это означает, что единственный элемент h, который удовлетворяет обоим условиям $h^2 = [f,g]$ и $(hg)^2 = 1$, может быть записан как $h = R_\sigma R_\tau$. Таким образом, часть (1) теоремы 2.3 доказана.

Элемент $h = R_\sigma R_\tau$ будет примитивным эллиптическим элементом порядка $p \geq 3$ тогда и только тогда, когда двугранный угол многогранника $\mathscr{T}$ при ребре $\sigma \cap \tau$ равен π/p, $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 3$; элемент h будет параболическим (гиперболическим) тогда и только тогда, когда плоскости σ и τ параллельны (соответственно расходятся).

Следовательно, мы доказали, что условие (2.1) эквивалентно условию:

$$\begin{gathered} h \text{ — гиперболический, параболический или примитивный} \\ \text{эллиптический элемент порядка } p \geq 3. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Значит, (2.2) влечет дискретность группы Γ.

3. Достаточное условие (2.2) также является необходимым. Действительно, предположим, что группа Γ дискретна, но (2.2) не выполняется. Это означает, что h является непримитивным эллиптическим элементом конечного порядка, т. е. $p = q/k > 2$, где q и k взаимно просты, $k \geq 2$. Покажем, что это невозможно.

Рассмотрим гиперболическую плоскость κ_1, которая перпендикулярна плоскостям ζ, σ и τ. Поскольку группа $\langle e_f, g\rangle \subset \widetilde{\Gamma}$ оставляет плоскость κ_1 инвариантной и сохраняет ее ориентацию, $\langle e_f, g\rangle$ действует на κ_1 как подгруппа группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Однако из [10] или [11] следует, что $\langle e_f, g\rangle$ не дискретна, если $h = e_f g^{-1}$ — непримитивный эллиптический элемент, который в нашем случае будет поворотом на угол $2k\pi/q$.

Теорема 2.3 доказана.

Замечание 2.4. Для удобства читателя мы приводим описание многогранника $\mathscr{T}$ в модели верхнего полупространства трехмерного гиперболического пространства $\mathbb{H}^3 = \{(z,t) : z \in \mathbb{C}, t > 0\}$ с метрикой Пуанкаре $ds^2 = (|dz|^2 + dt^2)/t^2$.

Достаточно предположить, что в доказательстве теоремы 2.3 группа $\Gamma = \langle f, g\rangle$ нормализована таким образом, что $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и неподвижными точками элемента f являются z_0 и $-z_0$, $z_0 \in \mathbb{C}$. (Если f параболический, то его единственной неподвижной точкой будет $z_0 = 0$.)

Предположим, что f эллиптический. Поскольку Γ — неэлементарная $\mathscr{RP}$-группа без инвариантной плоскости, обе неподвижные точки элемента f лежат в инвариантной плоскости элемента g по лемме 2.1. Принимая во внимание тот факт, что любая инвариантная плоскость элемента g задается как множество $\{(z,t) \in \mathbb{H}^3 : \operatorname{Im} z = \mathrm{const}\}$, заключаем, что $z_0 = x_0$ — вещественное число.

Аналогично если f гиперболический, то его неподвижные точки симметричны друг другу относительно инвариантной плоскости элемента g и, значит, $z_0 = iy_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Таким образом, мы нормализовали группу Γ так, что $g(\infty) = \infty$, $g(0) = 1$, $f(z_0) = z_0$, $f(-z_0) = -z_0$, где z_0 равно x_0, 0 или iy_0 (x_0 и y_0 — некоторые ненулевые вещественные числа), если f эллиптический, параболический или гиперболический соответственно.

Тогда плоскости η, ζ, σ и τ в доказательстве задаются как

$$\eta = \{(z,t) \in \mathbb{H}^3 : \operatorname{Im} z = 0\};$$
$$\zeta = \{(z,t) \in \mathbb{H}^3 : \operatorname{Re} z = 0\};$$
$$\sigma = \{(z,t) \in \mathbb{H}^3 : |z - iy_\sigma|^2 + t^2 = r^2\},\ y_\sigma \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ r^2 = y_\sigma^2 + z_0^2;$$
$$\tau = \{(z,t) \in \mathbb{H}^3 : \operatorname{Re} z = 1/2\}.$$

Более того, $\kappa_1 = \{(z,t) \in \mathbb{H}^3 : \operatorname{Im} z = y_\sigma\}$ — плоскость, которая играет ключевую роль в части 3 доказательства. Ясно, что она перпендикулярна плоскостям ζ, σ и τ.

В пространстве параметров $(\beta(f), \beta(g), \gamma(f,g))$ все дискретные группы, рассматриваемые в теореме 2.3, описывает

Следствие 2.5. *Пусть $f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, $\beta(f) \in [0, +\infty)$ или $\beta(f) = -4\sin^2(\pi/n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$, и пусть $\beta(g) = 0$. Предположим, что $\gamma(f,g) < 0$. Тогда $\Gamma = \langle f, g\rangle$ дискретна тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $\gamma(f,g) \in (-\infty; -4]$;

2) $\gamma(f,g) = -4\cos^2(\pi/p)$, $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 3$.

Доказательство. Поскольку $\Gamma = \langle f, g\rangle$ является $\mathscr{RP}$-группой и $\beta(g) = 0$, а f не π-локсодромический, Γ является неэлементарной группой без инвариантной плоскости тогда и только тогда, когда $\gamma(f,g) < 0$ [6, теорема 4]. Таким образом, очевидно, что предпосылки следствия 2.5 эквивалентны предпосылкам теоремы 2.3.

Поэтому, чтобы доказать следствие, достаточно переписать часть (2) теоремы 2.3 в терминах параметра $\gamma(f,g)$. Поскольку $\gamma(f,g)=\mathrm{tr}[f,g]-2$ и $[f,g]=h^2$, найти $\gamma(f,g)$ несложно.

Элемент h является гиперболическим тогда и только тогда, когда плоскости σ и τ расходятся (мы обозначаем плоскости так же, как и в доказательстве теоремы 2.3). Пусть d — гиперболическое расстояние между ними. Так как $[f,g]=h^2=(R_\sigma R_\tau)^2$, то

$$\gamma(f,g)=\mathrm{tr}[f,g]-2=-2\cosh(2d)-2<-4$$

(мы должны брать отрицательный $\mathrm{tr}[f,g]$, потому что $\gamma(f,g)$ отрицателен по условию).

Элемент h является параболическим тогда и только тогда, когда $[f,g]$ параболический, т. е. когда $\mathrm{tr}[f,g]=-2$ ($\mathrm{tr}[f,g]=2$ дало бы $\gamma(f,g)=0$, что невозможно). Значит, $\gamma(f,g)=\mathrm{tr}[f,g]-2=-4$.

Таким образом, h будет гиперболическим или параболическим тогда и только тогда, когда $\gamma(f,g)\in(-\infty,-4]$, и п. 1 следствия 2.5 доказан.

Теперь предположим, что h — эллиптический элемент с углом поворота φ, где $\varphi/2=\pi/p<\pi/2$ — двугранный угол многогранника $\mathscr{T}$ между σ и τ. Тогда $[f,g]=h^2$ также является эллиптическим элементом с углом поворота 2φ. Поскольку $\mathrm{tr}[f,g]$ корректно определен (не зависит от выбора представителей элементов f и g в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$), мы можем понять, какая формула: $\mathrm{tr}[f,g]=+2\cos\varphi$ или $\mathrm{tr}[f,g]=-2\cos\varphi$, верна. Наиболее простой способ сделать это — воспользоваться непрерывностью $\mathrm{tr}[f,g]$ как функции от φ и предельным условием $\mathrm{tr}[f,g]\to-2$ при $\varphi\to0$. Итак, нужно брать $\mathrm{tr}[f,g]=-2\cos\varphi$, где $\varphi<\pi$ — удвоенный двугранный угол многогранника $\mathscr{T}$.

Обратно, если дан $\mathrm{tr}[f,g]$, то мы можем воспользоваться формулой $\mathrm{tr}[f,g]=-2\cos\varphi$, $\varphi<\pi$, чтобы определить угол вращения φ элемента h из теоремы 2.3.

Таким образом, h будет примитивным эллиптическим элементом порядка $p\geq3$, т. е. $\varphi=2\pi/p$, тогда и только тогда, когда

$$\gamma(f,g)=\mathrm{tr}[f,g]-2=-2\cos(2\pi/p)-2=-4\cos^2(\pi/p),\quad p\in\mathbb{Z},\ p\geq3.$$

Следствие 2.5 доказано.

Замечание 2.6. В формулировке следствия 2.5 для простоты предполагается, что эллиптический порождающий f примитивен. Если f — непримитивный эллиптический элемент, следствие 2.5 все равно можно использовать для проверки дискретности группы, но для этого сначала нужно заменить тройку параметров $(\beta(f),\beta(g),\gamma(f,g))$, где $\beta(f)=-4\sin^2(k\pi/n)$, $(k,n)=1$, $1<k<n/2$, новой тройкой $(\tilde\beta,\beta(g),\tilde\gamma)$, где $\tilde\beta=-4\sin^2(\pi/n)$ и $\tilde\gamma=(\tilde\beta/\beta(f))\gamma(f,g)$. Новая тройка соответствует той же самой группе по результатам Геринга и Мартина [12].

§ 3. Клейновы орбифолды с параболическим порождающим

Пусть Γ — неэлементарная клейнова группа. Обозначим через $\Omega(\Gamma)$ множество разрывности группы Γ. Следуя [13], назовем *клейновым орбифолдом*

$Q(\Gamma) = (\mathbb{H}^3 \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$ ориентируемый трехмерный орбифолд с полной гиперболической структурой на его внутренности $\mathbb{H}^3/\Gamma$ и конформной структурой на границе $\Omega(\Gamma)/\Gamma$.

Мы используем следующие обозначения.

• $GT[n,m;q] = \langle f,g \mid f^n = g^m = [f,g]^q = 1\rangle$, где $n,m,q \in \{2,3,\dots\} \cup \{\infty, \overline{\infty}\}$. Если некоторое соотношение имеет степень $\overline{\infty}$, то мы просто удаляем его из копредставления. Далее, если некоторое соотношение имеет степень ∞ и мы сохраним его в копредставлении, то получим копредставление клейновой группы. Чтобы получить копредставление абстрактной группы, нужно также удалить и это соотношение.

Например, группа $GT[n,\infty;\overline{\infty}]$ как клейнова группа имеет копредставление $\langle f,g \mid f^n = g^\infty = 1\rangle$ и изоморфна группе $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}$.

• $Tet[n,m;q] = \langle x,y,z \mid x^2 = y^2 = z^n = (xy^{-1})^m = (yz^{-1})^2 = (zx^{-1})^q = 1\rangle$, где $n,m,q \in \{2,3,\dots\} \cup \{\infty, \overline{\infty}\}$. Для конечных n, m и q эта группа является группой тетраэдра, порожденной поворотами вокруг ребер одной грани ортосхемы с диаграммой Кокстера $\circ \overset{n}{-} \circ \overset{q}{-} \circ \overset{m}{-} \circ$. Заметим, что $Tet[n,m;q] \cong Tet[m,n;q]$.

Теорема 3.1. *Пусть $\Gamma = \langle f,g\rangle$ — неэлементарная дискретная $\mathscr{RP}$-группа без инвариантной плоскости. Пусть $\beta(g) = 0$, и пусть $\beta(f) = -4\sin^2(\pi/n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$, или $\beta(f) \in [0,+\infty)$. Положим $n = \infty$ для $\beta(f) = 0$ и $n = \overline{\infty}$ для $\beta(f) \in (0,+\infty)$.*

1. *Если $\gamma(f,g) \in (-\infty;-4)$, то Γ изоморфна группе $GT[n,\infty;\overline{\infty}]$.*
2. *Если $\gamma(f,g) = -4$, то Γ изоморфна группе $GT[n,\infty;\infty]$.*
3. *Если $\gamma(f,g) = -4\cos^2(\pi/p)$, $(p,2) = 2$, $p \geq 4$, то Γ изоморфна группе $GT[n,\infty;p/2]$.*
4. *Если $\gamma(f,g) = -4\cos^2(\pi/p)$, $(p,2) = 1$, $p \geq 3$, то Γ изоморфна группе $Tet[n,\infty;p]$.*

Замечание 3.2. Для всех групп Γ из теоремы 3.1 орбифолды $Q(\Gamma)$ показаны на рис. 3 и 4, где изображены их сингулярные множества и границы. Индексы на ребрах соответствуют порядкам конических точек, индексы 2 опущены. Каждый орбифолд $Q(\Gamma)$ вложен в $\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ так, что ∞ является несингулярной внутренней точкой орбифолда $Q(\Gamma)$.

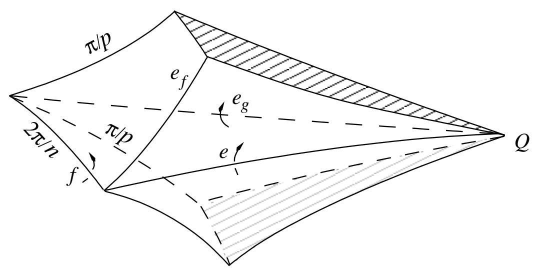
Поскольку мы получаем орбифолд склеиванием граней фундаментального многогранника для действия группы на пространстве $\mathbb{H}^3$, то ясна не только топологическая, но также и метрическая структура (длины сингулярных геодезических, структура каспов и т. д.) орбифолда. Фактически поскольку все неподвижные точки параболических элементов из группы Γ принадлежат предельному множеству $\Lambda(\Gamma)$, они не имеют образов в $Q(\Gamma)$. Например, на рис. 3(б$_2$) границей орбифолда $Q(\Gamma)$ является объединение двух двумерных сфер с тремя проколами.

Жирные вершины на рис. 3 и 4 являются либо сингулярными точками орбифолда, либо проколами, либо соответствуют выброшенным открытым шарам. В первом случае жирная вершина соответствует образу точки пространства $\mathbb{H}^3$, во втором — точке предельного множества $\Lambda(\Gamma)$ и поэтому не принадлежит орбифолду, а в последнем — компоненте границы $\Omega(\Gamma)/\Gamma$. Тип жирной вершины зависит от индексов ребер, инцидентных ей. Например, на рис. 4(а) жирная вершина будет внутренней сингулярной точкой орбифолда, если $1/2+1/n+1/p > 1$, проколом, если $1/2+1/n+1/p = 1$, и выброшенным открытым шаром, если $1/2+1/n+1/p < 1$.

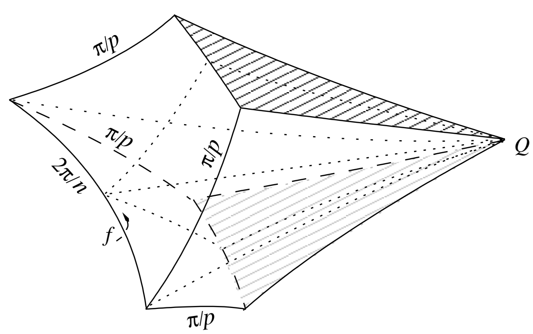
Доказательство теоремы 3.1. Мы приведем доказательство только для случая $\beta(f) = -4\sin^2(\pi/n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$.

Все параметры для дискретных групп в формулировке теоремы 3.1 описаны в следствии 2.5. Мы получим копредставление в каждом случае, используя теорему Пуанкаре о фундаментальном многограннике.

Начнем с построения фундаментального многогранника и копредставления группы $\widetilde{\Gamma}$, определенной в доказательстве теоремы 2.3. Поскольку $\widetilde{\Gamma}$ является сохраняющей ориентацию подгруппой индекса 2 в группе Γ^* и $\mathscr{T}$ является фундаментальным многогранником для группы Γ^*, фундаментальный многогранник $\mathscr{P}$ для группы $\widetilde{\Gamma}$ состоит из двух экземпляров многогранника $\mathscr{T}$ (рис. 2(а)).



(а)



(б)

Рис. 2. Фундаментальные многогранники для $\widetilde{\Gamma}$ и Γ.

Применяя теорему Пуанкаре к многограннику $\mathscr{P}$ и преобразованиям e, e_g и f, спаривающим грани, получаем, что

$$\widetilde{\Gamma} = \langle e, e_g, f \,|\, e^2 = e_g^2 = f^n = (e_g e)^\infty = (fe)^2 = (fe_g)^p = 1\rangle,$$

где p целое, ∞ или $\overline{\infty}$. Поскольку $g = e_g e$, имеем

$$\widetilde{\Gamma} = \langle f, g, e \,|\, f^n = g^\infty = e^2 = (fe)^2 = (ge)^2 = (fge)^p = 1\rangle.$$

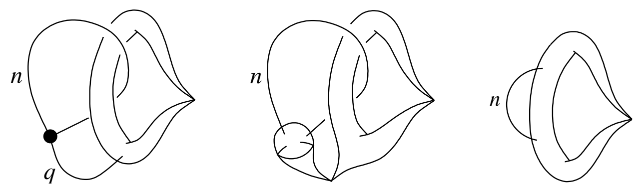
Если $p \geq 3$ нечетно, то с учетом соотношения $(fe)^2 = (ge)^2 = 1$ из $(fge)^p = 1$ следует, что $e = (fgf^{-1}g^{-1})^{(p-1)/2} fg$. Значит, в этом случае $\widetilde{\Gamma} = \Gamma$ и $\Gamma \cong Tet[n, \infty; p]$. Отождествляя грани многогранника $\mathscr{P}$, получаем орбифолд $\mathbb{H}^3/\Gamma$, показанный на рис. 4(а).

Если $p \geq 4$ четно, ∞ или $\overline{\infty}$, то Γ является подгруппой индекса 2 в группе $\widetilde{\Gamma}$. Чтобы это увидеть, применим теорему Пуанкаре к многограннику, который состоит из четырех экземпляров многогранника $\mathscr{T}$ (рис. 2(б)). Тогда

$$\Gamma = \langle f, g \,|\, f^n = g^\infty = (fgf^{-1}g^{-1})^{p/2} = 1\rangle.$$

$$\pi_1^{orb}(Q) \cong \langle f, g \mid f^n = g^\infty = [f,g]^q = 1\rangle,\ n \geq 3,\ q \geq 2,$$

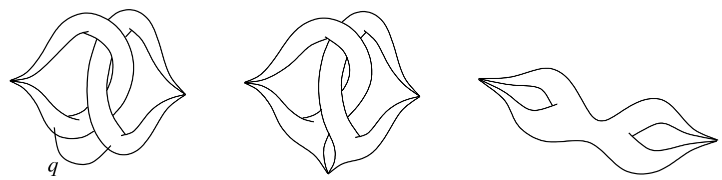
$q < \infty$ $\qquad q = \infty$ $\qquad q = \overline{\infty}$



(а$_1$) (а$_2$) (а$_3$)

$$\pi_1^{orb}(Q) \cong \langle f, g \mid f^\infty = g^\infty = [f,g]^q = 1\rangle,\ q \geq 2,$$

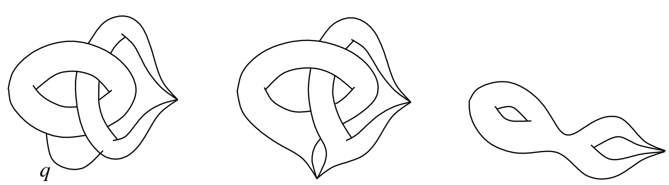
$q < \infty$ $\qquad q = \infty$ $\qquad q = \overline{\infty}$



(б$_1$) (б$_2$) (б$_3$)

$$\pi_1^{orb}(Q) \cong \langle f, g \mid g^\infty = [f,g]^q = 1\rangle,\ q \geq 2,$$

$q < \infty$ $\qquad q = \infty$ $\qquad q = \overline{\infty}$

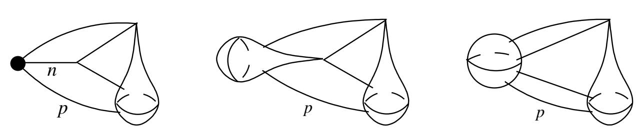


(в$_1$) (в$_2$) (в$_3$)

Рис. 3. Орбифолды Q с фундаментальной группой $GT[n, \infty; q]$.

$$\pi_1^{orb}(Q) \cong \langle f, g, e \mid f^n = g^\infty = e^2 = (fe)^2 = (ge)^2 = (gfe)^p = 1\rangle,\ p \geq 3$$

f эллиптический $\qquad f$ параболический $\qquad f$ гиперболический



(а) (б) (в)

Рис. 4. Орбифолды Q с фундаментальной группой $Tet[n, \infty; p]$.

Орбифолд $Q(\Gamma)$ для конечного $q = p/2$ показан на рис. 3(а$_1$). Для случая, когда σ и τ параллельны ($p = \infty$), $Q(\Gamma)$ показан на рис. 3(а$_2$), и для случая расходящихся σ и τ орбифолд $Q(\Gamma)$ показан на рис. 3(а$_3$).

Случаи, когда f параболический или гиперболический, доказываются аналогично, и мы оставляем их читателю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gehring F. W., Martin G. J.* Chebyshev polynomials and discrete groups // Proc. Conf. Complex Analysis. Tianjin, 1992 / Conf. Proc. Lecture Notes Anal. I. Cambridge, MA: Intern. Press, 1994. P. 114–125.

2. *Клименко Е. Я.* Трехмерные гиперболические орбифолды и дискретные группы изометрий пространства Лобачевского: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1989.

3. *Parker J. R.* Kleinian groups with two parabolic generators. S.l., 1990. (Preprint).

4. *Adams C. C.* Hyperbolic 3-manifolds with two generators // Comm. Anal. Geom. 1996. V. 4, N 2. P. 181–206.

5. *Agol I.* Classification of non-free two parabolic generator Kleinian groups // Abstracts János Bolyai conf. hyperbolic geometry, 8–12 July 2002. Budapest, Hungary. P. 132.

6. *Klimenko E., Kopteva N.* Discreteness criteria for $\mathscr{R}\mathscr{P}$ groups // Israel J. Math. 2002. V. 128. P. 247–265.

7. *Andreev E. M.* On convex polyhedra of finite volume in Lobachevsky spaces // Math. USSR Sbornik. 1970. V. 12. P. 255–259.

8. *Vinberg E. B.* Hyperbolic reflection groups // Russian Math. Surveys. 1985. V. 40. P. 31–75.

9. *Epstein D. B. A., Petronio C.* An exposition of Poincaré's polyhedron theorem // Enseign. Math. (2). 1994. V. 40. P. 113–170.

10. *Knapp A. W.* Doubly generated Fuchsian groups // Michigan Math. J. 1968. V. 15, N 3. P. 289–304.

11. *Matelski J. P.* The classification of discrete 2-generator subgroups of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ // Israel J. Math. 1982. V. 42, N 4. P. 309–317.

12. *Gehring F. W., Martin G. J.* Commutators, collars and the geometry of Möbius groups // J. Anal. Math. 1994. V. 63. P. 175–219.

13. *Boileau M., Porti J.* Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type. With an appendix: Limit of hyperbolicity for spherical 3-orbifolds by Michael Heusener and Joan Porti. Paris: Soc. Math. France, 2001. (Astérisque; 272).

Статья поступила 30 августа 2004 г.

Elena Klimenko (Клименко Елена)
Gettysburg College,
Mathematics Department
300 N. Washington St., CB 402
Gettysburg, PA 17325
USA
yklimenk@gettysburg.edu

Natalia Kopteva (Коптева Наталья)
CMI, Université de Provence
39, rue F. Joliot Curie
13453 Marseille cedex 13
France
kopteva@cmi.univ-mrs.fr