Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6

УДК 512.54

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ, НАСЫЩЕННЫХ ГРУППАМИ $L_2(p^n)$

А. Г. Рубашкин, К. А. Филиппов

Аннотация: Пусть I — множество индексов, K_α — конечное поле для любого $\alpha \in I$, $\mathfrak{R} = \{L_2(K_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ и $\mathfrak{N} = \{SL_2(K_\alpha) \mid \alpha \in I\}$. Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{R}$ (соответственно $\mathfrak{N}$), изоморфна $L_2(P)$ (соответственно $SL_2(P)$) для подходящего локально конечного поля P.

Ключевые слова: насыщенность группы множеством групп, периодическая группа.

Группа G *насыщена группами из множества групп* $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа K из G содержится в некоторой подгруппе L из G и L изоморфна некоторой группе из $\mathfrak{M}$ [1]. Пусть группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$ и для любой $X \in \mathfrak{M}$ в G найдется подгруппа L, изоморфная X. В этом случае будем говорить, что G *насыщена множеством групп* $\mathfrak{M}$, а само множество $\mathfrak{M}$ будем называть *насыщающим множеством групп* для G. В настоящей работе I означает множество индексов, K_α — конечное поле для любого $\alpha \in I$, $\mathfrak{R} = \{L_2(K_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ и $\mathfrak{N} = \{SL_2(K_\alpha) \mid \alpha \in I\}$. Отметим, что для различных α и β характеристики полей K_α и K_β могут быть различными.

В статье доказываются следующие результаты.

Теорема 1. *Бесконечная периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{R}$, изоморфна простой группе $L_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P.*

Теорема 2. *Бесконечная периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{N}$, изоморфна группе $SL_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P.*

Доказательство теоремы 1. Пусть G — контрпример к теореме 1. Обозначим через S силовскую 2-подгруппу группы G.

Лемма 1. *Все инволюции из G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y — две различные инволюции из G. По условию насыщенности $\langle x, y\rangle \subset L \subset G$, где $L \simeq L_2(K_\alpha)$. Хорошо известно, что в $L_2(K_\alpha)$ все инволюции сопряжены [2]. Следовательно, $x = y^g$ для некоторого $g \in L$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если S — конечная группа, то все силовские 2-подгруппы из G сопряжены и S одного из следующих типов:*

1) *S — группа диэдра.*

2) *S — элементарная абелева группа, и $|S| > 4$.*

Доказательство. То, что все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены, вытекает из [3]. По условию насыщенности $S \subset L \subset G$ и $L \simeq L_2(K_\alpha)$. По [2, с. 9, 10] S либо типа 1, либо типа 2. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если S — бесконечная группа, то все силовские 2-подгруппы из G сопряжены и S одного из следующих типов:*

3) $S = \widetilde{S}\lambda\langle t\rangle$, где $\widetilde{S}$ — квазициклическая 2-группа, $t^2 = 1$ и $s^t = s^{-1}$ для любого $s \in \widetilde{S}$.

4) S — бесконечная элементарная абелева группа.

Доказательство. Предположим вначале, что в G нет элементов порядка 4. Тогда в G любая 2-подгруппа, в частности S, элементарная абелева. Пусть S_1 — другая силовская 2-подгруппа группы G. Возьмем инволюции $x \in S$ и $y \in S_1$. По условию насыщенности $\langle x, y\rangle \subset R \simeq L_2(K_\alpha)$. Следовательно, $x = y^g$ для некоторого $g \in R$ и $x \in S \cap S_1^g$. Пусть $S \neq S_1^g$. Возьмем инволюции $v \in S \setminus S \cap S_1^g$ и $w \in S_1^g \setminus S \cap S_1^g$. По условию насыщенности $\langle x, v, w\rangle \subset L \simeq L_2(K_\beta)$ и $\langle x, v, w\rangle \subset C_L(x)$. Рассмотрим случай, когда K_β — конечное поле нечетной характеристики. Тогда $K_1 = \langle x\rangle \times \langle v\rangle$ и $K_2 = \langle x\rangle \times \langle w\rangle$ являются силовскими 2-подгруппами группы L и сопряжены в ней при помощи некоторого элемента $b \in L$, $K_1^b = K_2$. Таким образом, $\left|S \cap S_1^{gb^{-1}}\right| \geqslant 4$. Предположим, что $S \neq S_1^{gb^{-1}}$. Для любых инволюций $t \in S \setminus S \cap S_1^{gb^{-1}}$ и $z \in S_1^{gb^{-1}} \setminus S \cap S_1^{gb^{-1}}$ группа $\langle K_1, t, z\rangle$ конечна и по условию насыщенности $\langle K_1, t, z\rangle \subset N \simeq L_2(K_\gamma)$. Так как $K_1 \times \langle t\rangle$ — элементарная абелева группа порядка 8, то K_γ — конечное поле характеристики 2. Но тогда $\langle K_1, t, z\rangle \subset M \in \mathrm{Syl}_2 N$, M — элементарная абелева группа и инволюции t, z перестановочны. Последнее означает поэлементную перестановочность групп S и $S_1^{gb^{-1}}$. Так как они обе являются силовскими 2-подгруппами из G, то $S = SS_1^{gb^{-1}} = S_1^{gb^{-1}}$. Рассмотрим случай, когда K_β имеет характеристику 2. Здесь, рассуждая, как и для группы N, снова получаем поэлементную перестановочность групп S и S_1^g, что влечет равенство $S = S_1^g$. Итак, если G не содержит элементов порядка 4, то S типа 4 и все силовские 2-подгруппы из G сопряжены.

Предположим теперь, что G содержит элемент порядка 4. Покажем, что в этом случае S также содержит элемент порядка 4. Предположим обратное. Пусть a — фиксированная инволюция из S и $a \in \langle d\rangle \not\subset S$, где $|d| = 4$ (лемма 1). По условию насыщенности конечная группа $\langle d, z\rangle$, где z — произвольная инволюция из S, отличная от a, лежит в некоторой $L \simeq L_2(K_\alpha)$, где K_α — конечное поле нечетной характеристики ($|d| = 4$). По [2] $C_M(a)$ — конечная группа диэдра. Но тогда $d^z = d^{-1}$ и группа $\langle d\rangle S$ является 2-группой. Так как S — силовская 2-подгруппа группы G, то $\langle d\rangle S = S$, т. е. $\langle d\rangle \subset S$; противоречие с выбором d.

Итак, без ограничения общности можно считать, что $\langle d\rangle \subset S$. В этом случае S насыщена группами диэдра, $Z(S) = \langle a\rangle$ и по [4, лемма 15] $S = \widetilde{S}\lambda\langle t\rangle$, где $\widetilde{S}$ — квазициклическая 2-группа, $t^2 = 1$ и $s^t = s^{-1}$ для любого $s \in \widetilde{S}$.

Докажем сопряженность силовских 2-подгрупп для нашего случая. Пусть $S_1, S_2 \in \mathrm{Syl}_2 G$. По доказанному выше $S_1 = \widetilde{S}_1\lambda\langle v\rangle$, $S_2 = \widetilde{S}_2\lambda\langle w\rangle$, где $\widetilde{S}_1$, $\widetilde{S}_2$ — квазициклические 2-группы, $v^2 = w^2 = 1$ и $s_1^v = s_1^{-1}$, $s_2^w = s_2^{-1}$ для любых $s_1 \in \widetilde{S}_1$ и $s_2 \in \widetilde{S}_2$. Пусть i, j — инволюции из $\widetilde{S}_1$ и $\widetilde{S}_2$ соответственно. Так как $\langle i, j\rangle \subset K \subset G$ и $K \simeq L_2(K_\alpha)$, то для некоторого $x \in K$ имеем $i = j^x$ и, следовательно, $1 \neq i \in \widetilde{S}_1 \cap \widetilde{S}_2^x$. Но тогда $\widetilde{S}_1 = \widetilde{S}_2^x$. Положим $H = \widetilde{S}_1 = \widetilde{S}_2^x$. Тогда $S_1 = H\lambda\langle v\rangle$, $S_2^x = H\lambda\langle w\rangle$, силовская 2-подгруппа в $\overline{N} = \overline{N}_G(H)/H$ конечна и имеет порядок 2. Следовательно, $(wH)^{\bar{g}} = tH$ для некоторого $\bar{g} \in \overline{N}$. Пусть $\bar{g} = gH$, тогда, очевидно, $S_2^{xg^{-1}} = S_1$. Лемма доказана.

Из доказанных выше лемм 2, 3 и результатов [5, 6] вытекает, что утверждение теоремы достаточно доказать для случая, когда силовская 2-подгруппа S группы G типа 3 из леммы 3. В дальнейшем рассматривается именно эта ситуация.

Лемма 4. *Пусть a — инволюция из G. Тогда $C_G(a) = C\lambda\langle t\rangle$, где C — бесконечная локально циклическая группа, t — инволюция и $c^t = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$.*

Доказательство. Бесконечность группы $C_G(a)$ следует из [7]. Пусть R — произвольная конечная подгруппа из $C_G(a)$ и $D = \langle a, R\rangle$. Имеем $D \subset M \subset G$, где $M \simeq L_2(K_\alpha)$ и K_α — конечное поле нечетной характеристики, причем $D \subset C_M(a)$. По [2, с. 9, 10] $C_M(a)$ — группа диэдра. Таким образом, $C_G(a)$ насыщена группами диэдра. В силу [4, лемма 15] имеем $C_G(a) = C\lambda\langle t\rangle$, где C — локально циклическая группа, $t^2 = 1$ и $c^t = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$. Лемма доказана.

Лемма 5. *G обладает локально конечной простой подгруппой L такой, что $C_G(a) \subset L$ и $L \simeq L_2(P)$, где P — локально конечное поле нечетной характеристики p.*

Доказательство. Как следует из леммы 4, $C_G(a)$ представима в виде объединения возрастающей цепочки конечных подгрупп диэдра:

$$D_1 \subset \dots \subset D_n \subset \dots, \tag{1}$$

причем без ограничения общности можно считать, что $|D_n| > 4$ и каждая из подгрупп D_n совпадает с централизатором инволюции a в некоторой простой подгруппе L_n из G, где $L_n \simeq L_2(K_\alpha)$, причем K_α — конечное поле нечетной характеристики. Таким образом, $D_n \subset L_n$, $D_n = C_{L_n}(a)$ и цепочке (1) поставлена в соответствие последовательность

$$L_1, \dots, L_n, \dots \tag{2}$$

конечных простых подгрупп из G.

Далее, $D_n = C_n\lambda\langle t\rangle$, где C_n — циклическая группа. По [2, с. 9, 10] инволюции a и t сопряжены в L_n, в частности, подгруппа $C_{L_n}(a) = D_n$ сопряжена в L_n с подгруппой $T_n = C_{L_n}(t)$. По лемме 4 подгруппа C_n в $C_G(a)$ однозначно определена своим порядком $m_n = |C_n|$; то же самое верно для подгруппы V_n, где V_n — однозначно определяемая циклическая подгруппа порядка $m_n > 2$ из $T_n = V_n\lambda\langle a\rangle \subset C_G(t)$.

Ввиду сопряженности инволюций a и t в G и однозначной определимости циклической подгруппы V_n в $C_G(t)$ своим порядком m_n (лемма 4), подгруппы T_n так же, как и подгруппы D_n, составляют цепочку

$$T_1 \subset \dots \subset T_n \subset \dots. \tag{3}$$

В силу [2, с. 9, 10] имеем $L_n = \langle T_n, D_n\rangle$. Из (1), (3) следует, что последовательность (2) на самом деле составляет цепочку

$$L_1 \subset \dots \subset L_n \subset \dots. \tag{4}$$

Пусть $L = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$. По построению $C_G(a) \subset L$. По [8] L — локально конечная простая группа, изоморфная $L_2(P)$, где P — локально конечное поле характеристики p. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть L — подгруппа из формулировки предыдущей леммы* 5. *Тогда $G = L$.*

Доказательство. Предположим, что $L \neq G$. Покажем, что L — сильно вложенная подгруппа в G. Для этого достаточно показать, что для любого $g \in G \setminus L$ подгруппа $L \cap L^g$ не содержит инволюций.

Пусть w — инволюция из $L \cap L^g$, где $w = v^g$, причем $v \in L$. Все инволюции в L сопряжены [2, с. 9, 10], поэтому $v^{gb} = v$ для некоторого элемента $b \in L$. Тогда $gb \in C_G(v)$, и так как по леммам 3, 4 $C_G(v) \subset L$, то и $g \in L$ вопреки выбору элемента g. Значит, для любого элемента $g \in G \setminus L$ подгруппа $L \cap L^g$ не содержит инволюций, $N_G(L) = L$ и L сильно вложена в G.

По [6] G — простая группа. Следовательно, в $G \setminus L$ найдется инволюция v. Пусть w — произвольная инволюция из L. Так как G — периодическая группа, то группа $K = \langle v, w\rangle$ конечна и по условию насыщенности $K \subset M \subset G$, где $M \simeq L_2(K_\alpha)$ и K_α — конечное поле нечетной характеристики. Положим $H = M \cap L$, и пусть z — произвольная инволюция из H, а $g \in M$. Как показано выше, из $z^g \in H$ вытекает, что $g \in H$. Следовательно, подгруппа H сильно вложена в M. Тогда по теореме Бендера [9, 4.24] M — простая группа Шевалле характеристики 2 лиева ранга 1, что возможно только в случае $M \simeq L_2(2^2) \simeq L_2(5)$, H совпадает с нормализатором силовской 2-подгруппы из M и имеет порядок 12. Другими словами, $H \simeq A_4$.

Пусть теперь d — элемент порядка три из H, x — инволюция из $M \setminus H$, инвертирующая d, y — инволюция из $L \setminus M$, инвертирующая d [2, с. 9, 10]. Так как G — периодическая группа, группа $R = \langle d, x, y\rangle$ конечна и по условию насыщенности $R \subset M_1 \subset G$, где $M_1 \simeq L_2(K_\alpha)$ и K_α — конечное поле нечетной характеристики. Положим $H_1 = M_1 \cap L$. Так как $y \in H_1$, то H_1 — сильно вложенная подгруппа в $M_1 \simeq L_2(5) \simeq L_2(2^2)$ и $H_1 \simeq A_4$. Последнее невозможно, так как в этом случае A_4 содержит инволюцию, инвертирующую элемент порядка три; противоречие со строением A_4.

Итак, $G \setminus L$ не содержит инволюций, что эквивалентно (при условии $L \neq G$) существованию нетривиального нормального делителя группы G. Однако G, как отмечалось выше, простая группа; противоречие. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Если $\mathfrak{N}$ содержит только $SL_2(K_\alpha)$ и K_α — конечное поле характеристики 2, то все доказано в силу теоремы 1, так как в этом случае $SL_2(K_\alpha) = L_2(K_\alpha)$. Следовательно, $\mathfrak{N}$ содержит $SL_2(K_\beta)$, K_β — конечное поле нечетной характеристики и $|K_\alpha| > 5$. Обозначим через z инволюцию из $SL_2(K_\beta)$. Для любого $g \in G$ группа $D = \langle z, z^g\rangle$ конечна. По условию насыщенности $D \subset K \subset G$ и либо $K \simeq SL_2(K_\gamma)$ и K_γ — конечное поле нечетной характеристики, либо $K \simeq SL_2(K_\delta)$ и K_δ — конечное поле характеристики 2. Покажем, что ситуация $K \simeq SL_2(K_\delta)$ невозможна. Действительно в этом случае в K найдется инволюция $v \neq z$ и $vz = zv$. Так как группа G периодическая, то подгруппа $\langle h, v\rangle$ конечна, здесь h — элемент из $SL_2(K_\beta)$ такой, что $h^2 = z$ и $\langle h, v\rangle \in C_G(z)$. По условию насыщенности $\langle h, v\rangle \subset C_K(z) \subset K \in \mathfrak{N}$, что невозможно по [2, с. 9, 10]. Итак, G содержит единственную инволюцию z и $Z(G) = \langle z\rangle$. Нетрудно видеть, что фактор-группа $\overline{G} = G/\langle z\rangle$ периодическая и удовлетворят всем требованиям теоремы 1. Следовательно, $\overline{G} \simeq L_2(P)$ для подходящего локально конечного поля P. Пусть $P_1 \subset \dots \subset P_n \subset \dots$ — цепочка вложенных друг в друга конечных подполей из P таких, что $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ и $\overline{G}_1 \subset \dots \subset \overline{G}_n \subset \dots$ — цепочка вложенных друг в друга конечных подгрупп

групп $\overline{G}$ таких, что $\overline{G}_n \simeq L_2(P_n)$, где $n = 1, 2, \dots$. Обозначим через G_n полный прообраз $\overline{G}_n$ в G. Из условия насыщенности вытекает, что $G_n \simeq SL_2(P_n)$. Так как $G_1 \subset \dots \subset G_n \subset \dots$ и $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, то $G \simeq SL_2(P)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шлёпкин А. К.* Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // III междунар. конф. по алгебре, Красноярск, 23–28 авг. 1993 г.: Сб. тезисов. Красноярск, 1993. С. 369.

2. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.

3. *Шунков В. П.* Об абелевых подгруппах в бипримитивно конечных группах // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 5. С. 603–614.

4. *Шлёпкин А. К., Рубашкин А. Г.* Об одном классе периодических групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 65–71.

5. *Созутов А. И., Шлёпкин А. К.* О некоторых группах с конечной инволюцией, насыщенных конечными простыми подгруппами // Мат. заметки. 2002. Т. 72, № 3. С. 433–447.

6. *Шлёпкин А. К.* Группы Шункова с дополнительными ограничениями: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Красноярск, 1998.

7. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 478–494.

8. *Беляев В. В.* Локально конечные группы Шевалле // Исследования по теории групп. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. С. 39–50.

9. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. М.: Мир, 1985.

Статья поступила 24 апреля 2005 г.

Рубашкин Артём Геннадьевич, Филиппов Константин Анатольевич
Красноярский гос. аграрный университет, пр. Мира, 88а, Красноярск 660049
ar_kgau@pochta.ru, filippov_kostya@mail.ru