

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОР–ФУНКЦИИ
ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНЫХ
ОПЕРАТОРОВ С НЁТЕРОВЫМ
ОПЕРАТОРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ
В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. В. Фалалеев, Е. Ю. Гражданцева

Аннотация: В продолжение исследований, начатых первым из авторов, строятся фундаментальные оператор–функции некоторых классов вырожденных дифференциальных (как обыкновенных, так и в частных производных) и дифференциально–разностных операторов с нётеровым оператором при старшей (по времени) производной в банаховых пространствах. Для достижения поставленной цели используются техника жордановых наборов нётеровых операторов и элементы теории обобщенных функций в банаховых пространствах.

Ключевые слова: обобщенные функции, нётеров оператор, банахово пространство, фундаментальная оператор–функция, жорданов набор, свертка.

Объектом исследования в работе являются дифференциальные и дифференциально–разностные уравнения с нётеровым оператором в главной части в банаховых пространствах. Редукцию к уравнениям такого типа допускают многочисленные начальные и краевые задачи математической физики, моделирующие реальные динамические процессы фильтрации, термомоноконвекции, деформации механических систем, электротехники, волновые процессы в электромагнитных анизотропных средах (волны в плазме, волны в ферромагнетиках во внешнем магнитном поле), волновые процессы в проводящих средах без дисперсии, колебания стратифицированной жидкости (модели Корпусова — Плетнера — Свешникова [1], Баренблатт — Желтова — Кочиной [2], Осколкова [3], Хоффа, Долесала [4], Буссинеска [5, 6] и многие другие).

Как хорошо известно [7], такие задачи разрешимы в классе непрерывных функций не при всех начальных данных и правых частях, поэтому естественно возникает проблема построения обобщенных решений, которую в полном объеме удается разрешить с помощью конструкции фундаментальных оператор–функций соответствующих дифференциальных операторов исходных уравнений. В работах [8] и [9] во фредгольмовом случае построены фундаментальные оператор–функции для дифференциальных операторов 1-го и 2-го порядков, некоторых классов дифференциальных операторов N -го порядка (как обыкновенных, так и в частных производных), интегральных и интегродифференциальных 1-го порядка. В настоящей работе полученные в [8] и [9] результаты распространяются на нётеровский случай для дифференциальных операторов

1-го порядка, неполные дифференциальные операторы 2-го и N -го порядков, а также дифференциально-разностные операторы 1-го и N -го порядков.

§ 1. Жордановы наборы нётеровых операторов

В этом параграфе приведены основные сведения о жордановых наборах нётеровых операторов из работы [10], необходимые в дальнейшем при изложении наших результатов.

Пусть A, B — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 , $\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$, $\dim N(B) = n$, $\dim N(B^*) = m$, φ_i , $i = 1, \dots, n$, — базис в $N(B)$, ψ_j — базис в $N(B^*)$, $\gamma_i \in E_1^*$, $i = 1, \dots, n$, $z_j \in E_2$, $j = 1, \dots, m$, — соответствующие биортонормальные системы элементов, т. е. $\langle \varphi_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \dots, n$, и $\langle z_k, \psi_j \rangle = \delta_{kj}$, $k, j = 1, \dots, m$.

Введем проекторы $\mathcal{P} = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i$ и $\mathcal{Q} = \sum_{j=1}^m \langle \cdot, \psi_j \rangle z_j$. Фиксированным базисам $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_j\}$, $\{\gamma_i\}$, $\{z_j\}$ соответствует единственный [11] псевдообратный оператор, однозначно определяемый следующим набором своих свойств:

$$D(B^+) = R(B) \oplus \{z_1, \dots, z_m\}, \quad R(B^+) = N(\mathcal{P}) \cap D(B),$$

$$BB^+ = I - \mathcal{Q} \text{ на } D(B^+), \quad B^+B = I - \mathcal{P} \text{ на } D(B),$$

причем $N(B^+) = \{z_1, \dots, z_m\}$, $BB^+B = B$, $B^+BB^+ = B^+$.

Введем сопряженные проекторы $\mathcal{P}^* = \sum_{i=1}^n \langle \varphi_i, \cdot \rangle \gamma_i$ и $\mathcal{Q}^* = \sum_{j=1}^m \langle z_j, \cdot \rangle \psi_j$ и соответствующий им псевдообратный оператор B^{*+} так, что

$$D(B^{*+}) = R(B^*) \oplus \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}, \quad R(B^{*+}) = N(\mathcal{Q}^*) \cap D(B^*),$$

$$B^{*+}B^* = I - \mathcal{Q}^* \text{ на } D(B^*), \quad B^*B^{*+} = I - \mathcal{P}^* \text{ на } D(B^{*+}),$$

причем $N(B^{*+}) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, $B^*B^{*+}B^* = B^*$, $B^{*+}B^*B^{*+} = B^{*+}$ и $B^{*+} = B^{*+}$.

Далее будем предполагать, что оператор B нормально разрешим, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$. Тогда $D(B^*) \equiv E_2$, $D(B^{*+}) \equiv E_1^*$ и, значит, операторы B^+ и B^{*+} ограничены.

Введем системы элементов

$$\varphi_i^{(j)} = (B^*A)^{j-1}\varphi_i^{(1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j \geq 2, \quad \varphi_i^{(1)} = \varphi_i,$$

и функционалов

$$\psi_i^{(j)} = (B^{*+}A^*)^{j-1}\psi_i^{(1)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j \geq 2, \quad \psi_i^{(1)} = \psi_i.$$

В силу свойств операторов B^* и B^{*+} имеем $\varphi_i^{(j)} \in N(\mathcal{P})$ и $\psi_i^{(j)} \in N(\mathcal{Q})$, $j \geq 2$, т. е.

$$\langle \varphi_i^{(j)}, \gamma_k \rangle = 0, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad j \geq 2, \quad \langle z_k, \psi_i^{(j)} \rangle = 0, \quad i, k = 1, \dots, m, \quad j \geq 2.$$

Будем предполагать выполненным следующее условие:

(А) элементы $\varphi_i^{(j)}$ удовлетворяют системе уравнений и неравенств вида

$$B\varphi_i^{(j)} = A\varphi_i^{(j-1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 2, \dots, p_i,$$

$$B\varphi_i^{(p_i+1)} \neq A\varphi_i^{(p_i)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

причем

$$\text{rang} \|\langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_k^{(1)} \rangle\|_{i=1, \dots, n, k=1, \dots, m} = \min(n, m) = l.$$

Условие (A) означает, что система элементов $\{\varphi_i^{(j)}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p_i\}$ образует полный A-жорданов набор [12].

Если выполнено условие (A), то, как показано в работе [13], системы $\{\varphi_i\}, \{\psi_j\}, \{\gamma_i\}, \{z_j\}$ можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\langle A\varphi_i^{(j)}, \psi_k \rangle = \begin{cases} 0, & j = 1, \dots, p_i - 1, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \\ \delta_{ik}, & j = p_i, i, k = 1, \dots, l, \end{cases}$$

$$\langle \varphi_i, A^*\psi_k^{(j)} \rangle = \begin{cases} 0, & j = 1, \dots, p_k - 1, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \\ \delta_{ik}, & j = p_k, i, k = 1, \dots, l. \end{cases}$$

Поэтому при выполнении условия (A), не ограничивая общности, можно считать, что $z_i = A\varphi_i^{(p_i)}, \gamma_i = A^*\psi_k^{(p_k)}, i, k = 1, \dots, l$. Из условия (A) также следует, что система элементов $\{\psi_k^{(j)}, k = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p_k\}$ образует полный A*-жорданов набор. Прямоугольные матрицы $\|\langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_k^{(1)} \rangle\|$ и $\|\langle \varphi_i^{(1)}, A^*\psi_k^{(p_k)} \rangle\|, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$, при выполнении условия (A) имеют одинаковые ранги l , а значит, обе они эквивалентны прямоугольной матрице с единичным главным ранговым минором l -порядка и нулями на остальных позициях. Приведем соответствующие преобразования базисов $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_j\}$. При $m < n$ матрица $\|\langle \varphi_i^{(1)}, A^*\psi_k^{(p_k)} \rangle\|$ преобразованием

$$\tilde{\varphi}_i = \begin{cases} \varphi_i, & i = 1, \dots, m, \\ \varphi_i - \sum_{k=1}^m \langle \varphi_i, A^*\psi_k^{(p_k)} \rangle \varphi_k, & i = m + 1, \dots, n, \end{cases}$$

приводится к требуемому виду, а при $m > n$ для матрицы $\|\langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_k^{(1)} \rangle\|$ искомым преобразованием, очевидно, является

$$\tilde{\psi}_k = \begin{cases} \psi_k, & k = 1, \dots, n, \\ \psi_k - \sum_{i=1}^n \langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_k \rangle \varphi_i, & k = n + 1, \dots, m. \end{cases}$$

В следующих параграфах при обращении к жордановым наборам будем считать, что такая перестройка базисов уже осуществлена, и будем опускать знак волны.

§ 2. Свертки распределений и обобщенных оператор-функций в банаховых пространствах

Пусть E — банахово пространство, E^* — сопряженное банахово пространство. Отнесем к множеству *основных функций* $K(\mathbb{R}^n; E^*)$ все финитные в \mathbb{R}^n функции класса C^∞ со значениями в E^* и будем обозначать эти функции через $s(\bar{x}), \bar{x} \in \mathbb{R}^n$. *Носителем* $\text{supp } s(\bar{x})$ основной функции $s(\bar{x})$ назовем замыкание в \mathbb{R}^n множества тех точек \bar{x} , для которых $s(\bar{x}) \neq 0$. Сходимость в $K(\mathbb{R}^n; E^*)$ определяется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность функций $s_k(\bar{x}) \in K(\mathbb{R}^n; E^*)$ *сходится* к функции $s(\bar{x}) \in K(\mathbb{R}^n; E^*)$, если

а) существует $R > 0$ такое, что $\text{supp } s_k(\bar{x}) \subset U_R \forall k \in \mathbb{N}$, здесь U_R — шар в \mathbb{R}^n с центром в нуле и радиусом R ;

б) $\|D^\alpha s_k(\bar{x}) - D^\alpha s(\bar{x})\| \Rightarrow 0$ равномерно по \bar{x} при $k \rightarrow \infty$ для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Обобщенной функцией (распределением) бесконечного порядка назовем всякий линейный непрерывный функционал на основном пространстве $K(\mathbb{R}^n; E^*)$. Всякая локально интегрируемая по Бохнеру функция $u(\bar{x})$ со значениями в E порождает по правилу

$$(u(\bar{x}), s(\bar{x})) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle u(\bar{x}), s(\bar{x}) \rangle d\bar{x} \quad \forall s(\bar{x}) \in K(\mathbb{R}^n; E^*)$$

регулярную обобщенную функцию. Все остальные обобщенные функции называются *сингулярными*. Множество обобщенных функций будем обозначать через $K'(\mathbb{R}^n; E)$.

Если $E = E^* = \mathbb{R}^1$, то пространства $K(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^1)$ и $K'(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^1)$, следуя [14], будем обозначать через $D(\mathbb{R}^n)$ и $D'(\mathbb{R}^n)$ соответственно.

Из всего множества обобщенных функций $K'(\mathbb{R}^n; E)$ выделим некоторые специальные классы. Через $K'(R_+^n; E)$ будем обозначать множество обобщенных функций, носители которых находятся в первом «октанте» пространства \mathbb{R}^n . Таковыми будут, например, функции вида $u(\bar{x})g(\bar{x})$, где $u(\bar{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^n; E)$, $g(\bar{x}) \in D'(R_+^n)$ или $u(\bar{x}) \in C^\infty(R_+^n; E)$, $g(\bar{x}) \in D'(\mathbb{R}^n)$, действующие согласно определению по правилу

$$(u(\bar{x})g(\bar{x}), s(\bar{x})) = (g(\bar{x}), \langle u(\bar{x}), s(\bar{x}) \rangle) \quad \forall s(\bar{x}) \in K(\mathbb{R}^n; E^*).$$

При $n = 1$ вместо $D'(R_+^1)$ принято [14] использовать обозначение D'_+ .

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $\mathcal{K}(\bar{x}) \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ — сильно непрерывная оператор-функция класса C^∞ , причем $\mathcal{K}^*(\bar{x}) \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$ существует при почти всех $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(\bar{x}) \in D'(\mathbb{R}^n)$. Тогда формальный символ $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x})$ назовем *обобщенной оператор-функцией*. Сверткой [8] обобщенной оператор-функции $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x})$ и обобщенной функции $v(\bar{x}) \in K'(\mathbb{R}^n; E_1)$ назовем обобщенную функцию $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x}) * v(\bar{x}) \in K'(\mathbb{R}^n; E_2)$ (если она существует), действующую по формуле

$$(\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x}) * v(\bar{x}), s(\bar{x})) = (f(\bar{x}), (v(\bar{y}), \mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x} + \bar{y}))) \quad \forall s(\bar{x}) \in K(\mathbb{R}^n; E_2^*).$$

Поскольку функция $\mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x} + \bar{y})$ не финитна в \mathbb{R}^{2n} , сформулированное определение будет корректно лишь в том случае, когда носитель «прямого произведения» обобщенных функций $f(\bar{x})$ и $v(\bar{y})$, т. е. множество $\text{supp } f(\bar{x}) \otimes \text{supp } v(\bar{y})$, пересекается с носителем $\mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x} + \bar{y})$ по ограниченному в \mathbb{R}^{2n} множеству. В этом случае $\mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x} + \bar{y})$ можно заменить финитной функцией $\psi(\bar{x}, \bar{y})$, совпадающей с $\mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x} + \bar{y})$ на пересечении $[\text{supp } f(\bar{x}) \otimes \text{supp } v(\bar{y})] \cap \text{supp } \mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x} + \bar{y})$. Тогда значение $(f(\bar{x}), (v(\bar{y}), \psi(\bar{x}, \bar{y})))$ корректно определено и не зависит от выбора значений $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ вне пересечения $[\text{supp } f(\bar{x}) \otimes \text{supp } v(\bar{y})] \cap \text{supp } \mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x} + \bar{y})$. Приведем достаточные условия, при которых свертка заведомо существует.

ПРИМЕР 1. Если $n = 1$, $f(t) \in D'_+$, $v(t) \in K'(\mathbb{R}_+^1; E_1)$, то свертка $\mathcal{K}(t)f(t) * v(t)$ существует, причем если $A \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$ и существует $A^* \in \mathcal{L}(E_3^*, E_2^*)$, то справедливо свойство ассоциативности

$$A\delta^{(k)}(t) * (\mathcal{K}(t)f(t) * v(t)) = (A\delta^{(k)}(t) * \mathcal{K}(t)f(t)) * v(t),$$

где $A\delta^{(k)}(t) * \mathcal{K}(t)f(t) = (A\mathcal{K}(t)f(t))^{(k)}$ по определению. Эти же утверждения справедливы и в случае $n > 1$, если $f(\bar{x}) \in D'(\mathbb{R}_+^n)$ и $v(\bar{x}) \in K'(\mathbb{R}_+^n; E_1)$. Для замкнутого оператора A приведенное здесь равенство будем считать выполненным по определению.

ПРИМЕР 2. Если одна из функций $f(\bar{x})$ или $v(\bar{x})$ финитна, то свертка $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x}) * v(\bar{x})$ существует.

Утверждения из этих двух примеров доказываются такими же рассуждениями, как и соответствующие теоремы в [14, с. 130–141].

ПРИМЕР 3. Если $v(t, \bar{x}) \in K'(\mathbb{R}_+^1 \otimes \mathbb{R}^n; E_1)$ (т. е. $\text{supp } v(t, \bar{x}) \subset \mathbb{R}_+^1 \otimes \mathbb{R}^n \equiv \{t \geq 0\}$ — полупространство в \mathbb{R}^{n+1}), $\mathcal{K}(t, \bar{x})f(t, \bar{x}) = k(t)g(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1)$, $g(t) \in D'_+$, \bar{y}_1 — фиксированный вектор (т. е. $\text{supp } \mathcal{K}(t, \bar{x})f(t, \bar{x}) \equiv \{t \geq 0, \bar{x} = \bar{y}_1\}$ — луч в \mathbb{R}^{n+1}), то

$$M \equiv \text{supp}(k(t)g(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1)) \otimes \text{supp } v(\tau, \bar{z}) \\ \equiv \{(t, \tau, \bar{x}, \bar{z}) \mid t \geq 0, \tau \geq 0, \bar{x} = \bar{y}_1, \bar{z} \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{2n+2}.$$

Пусть $s(t, \bar{x}) \in K(\mathbb{R}^{n+1}; E_2^*)$, тогда в силу финитности $s(t, \bar{x})$ существует $R > 0$ такое, что $\text{supp } s(t, \bar{x}) \subset U_R \equiv \{(t, \bar{x}) \mid t^2 + (\bar{x}, \bar{x}) \leq R^2\}$, поэтому носителем функции $s(t+\tau, \bar{x}+\bar{z})$ является «полоса» в \mathbb{R}^{2n+2} , описываемая неравенством $(t+\tau)^2 + (\bar{x}+\bar{z}, \bar{x}+\bar{z}) \leq R^2$. Такая «полоса» пересекается с M по множеству $\{(t+\tau)^2 + (\bar{y}_1 + \bar{z}, \bar{y}_1 + \bar{z}) \leq R^2, t \geq 0, \tau \geq 0, \bar{y}_1 \text{ фиксирован}\}$, очевидно, ограниченному в \mathbb{R}^{2n+2} , а значит, свертка $k(t)g(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1) * v(t, \bar{x})$ при сделанных предположениях существует. Если $A \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$ и $A^* \in \mathcal{L}(E_3^*, E_2^*)$, то справедливо свойство ассоциативности

$$A\delta^{(k)}(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_2) * (k(t)g(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1) * v(t, \bar{x})) \\ = (A\delta^{(k)}(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_2) * k(t)g(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1)) * v(t, \bar{x}),$$

где согласно свойствам свертки обобщенных функций

$$A\delta^{(k)}(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_2) * k(t)g(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1) = (Ak(t)g(t))^{(k)} \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1 - \bar{y}_2).$$

Действительно, введем обозначение $w(t, \bar{x}) = k(t)g(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1) * v(t, \bar{x})$. Тогда с учетом определения обобщенных функций для любой $s(t, \bar{x}) \in K(\mathbb{R}^{n+1}; E_2^*)$ имеем

$$(w(t, \bar{x}), s(t, \bar{x})) = ((g(t) \cdot \delta(\bar{z} - \bar{y}_1), (v(\tau, \bar{x}), k^*(t)s(t + \tau, \bar{x} + \bar{z}))) \\ = (g(t), (v(\tau, \bar{x}), k^*(t)s(t + \tau, \bar{x} + \bar{y}_1))).$$

Отсюда для любой $s(t, \bar{x}) \in K(\mathbb{R}^{n+1}; E_3^*)$

$$(A\delta^{(k)}(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_2) * w(t, \bar{x}), s(t, \bar{x})) \\ = (\delta^{(k)}(\tau) \cdot \delta(\bar{z} - \bar{y}_2), (w(t, \bar{x}), A^*s(t + \tau, \bar{x} + \bar{z}))) \\ = (-1)^k (w(t, \bar{x}), A^*s_t^{(k)}(t, \bar{x} + \bar{y}_2)) \\ = (-1)^k (g(t), (v(\tau, \bar{x}), k^*(t)A^*s_t^{(k)}(t + \tau, \bar{x} + \bar{y}_2 + \bar{y}_1))) \\ = (-1)^k (Ak(t)g(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1 - \bar{y}_2) * v(\tau, \bar{x}), s_t^{(k)}(t, \bar{x})) \\ = ((Ak(t)g(t))^{(k)} \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1 - \bar{y}_2) * v(\tau, \bar{x}), s(t, \bar{x})).$$

§ 3. Фундаментальные оператор-функции дифференциальных операторов с нётеровым оператором в главной части

Рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \sum_{|\alpha|=0}^N A_\alpha \mathcal{D}^\alpha = \sum_{|\alpha|=0}^N A_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

где A_α — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2 , $\overline{\bigcap_{|\alpha|=0}^N D(A_\alpha)} = E_1$, и соответствующую ему обобщенную оператор-функцию

$$\mathcal{L}(\delta(\bar{x})) = \sum_{|\alpha|=0}^N A_\alpha \delta^{(\alpha_1)}(x_1) \cdot \dots \cdot \delta^{(\alpha_n)}(x_n).$$

Фундаментальной оператор-функцией дифференциального оператора $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ на классе $K'(\mathbb{R}^n; E_2)$ называется такая обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}(\bar{x})$, что для любой $u(\bar{x}) \in K'(\mathbb{R}^n; E_2)$ на основном пространстве $K(\mathbb{R}^n; E_2^*)$ справедливо равенство

$$\mathcal{L}(\delta(\bar{x})) * \mathcal{E}(\bar{x}) * u(\bar{x}) = u(\bar{x}).$$

Таким образом, если существует свертка $\mathcal{E}(\bar{x}) * g(\bar{x})$, то она является решением уравнения $\mathcal{L}(\delta(\bar{x})) * u(\bar{x}) = g(\bar{x})$, что, в свою очередь, позволяет строить обобщенные (и классические) решения дифференциального уравнения $\mathcal{L}(\mathcal{D})u(\bar{x}) = f(\bar{x})$ [14, 8].

Теорема 1. Пусть A, B — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2 , $\overline{R(B)} = R(B)$, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $n = \dim N(B)$, $m = \dim N(B^*)$, $n > m$, существуют полные жордановы наборы $\{\varphi_i^{(j)}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p_i\}$ и $\{\psi_i^{(j)}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p_i\}$. Тогда дифференциальный оператор первого порядка $(B\delta'(t) - A\delta(t))$ на классе $K'(\mathbb{R}_+^1; E_2)$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(t) = B^+ e^{AB^+ t} & \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(t) \\ & - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(k)}(t) \right], \end{aligned}$$

где $\psi_i^{(j)}$ при $i = m+1, \dots, n, j = 2, \dots, p_i$ являются произвольными функциями из E_2^* и $\psi_i^{(1)} = 0, i = m+1, \dots, n$.

Доказательство. В соответствии с определением необходимо проверить справедливость равенства

$$(B\delta'(t) - A\delta(t)) * \mathcal{E}_1(t) * u(t) = u(t)$$

на основном пространстве $K(\mathbb{R}_+^1; E_2^*)$. Подставим в левую часть этого равенства выражение для $\mathcal{E}_1(t)$:

$$\begin{aligned} & (B\delta'(t) - A\delta(t)) * \mathcal{E}_1(t) * u(t) \\ & = \left((I - \mathcal{Q})AB^+ e^{AB^+ t} \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(t) \right. \\ & \quad \left. + (I - \mathcal{Q}) \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \delta(t) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle B \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(k+1)}(t) \right] \right) * u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - AB^+ e^{AB^+ t} \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(t) \\
 & + \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(k)}(t) \right] * u(t).
 \end{aligned}$$

Поскольку $B\varphi_i^{(1)} = 0$, имеем

$$\begin{aligned}
 & (B\delta'(t) - A\delta(t)) * \mathcal{E}_1(t) * u(t) \\
 & = \left(I\delta(t) - \frac{d}{dt} \left(\mathcal{Q}e^{AB^+ t} \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(t) \right) \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=0}^{p_i-2} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k-1} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle B \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(k+1)}(t) \right] \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(k)}(t) \right] \right) * u(t) \\
 & = \left(I\delta(t) - \frac{d}{dt} \left(\mathcal{Q}e^{AB^+ t} \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(t) \right) \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle (B \varphi_i^{(p_i-k+2-j)} - A \varphi_i^{(p_i-k+1-j)}) \right\} \delta^{(k)}(t) \right] \right) * u(t).
 \end{aligned}$$

Но $B\varphi_i^{(j+1)} = A\varphi_i^{(j)}$, поэтому теорема будет доказана, если показать, что

$$\mathcal{Q}e^{AB^+ t} \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] = 0$$

или

$$\sum_{\nu=1}^m \langle e^{AB^+ t} \cdot, \psi_\nu \rangle z_\nu \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] = 0.$$

Покажем, что при каждом $\nu = 1, \dots, m$ соответствующее слагаемое обращается в нуль. Действительно,

$$\begin{aligned}
 & \langle e^{AB^+ t} \cdot, \psi_\nu \rangle z_\nu \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \\
 & = \left\langle \cdot, \psi_\nu^{(1)} + \psi_\nu^{(2)} \cdot \frac{t}{1!} + \psi_\nu^{(3)} \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots + \psi_\nu^{(p_\nu)} \cdot \frac{t^{p_\nu-1}}{(p_\nu-1)!} \right\rangle z_\nu \\
 & \times \left[I - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)} - \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \\
 & = - \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle z_\nu \left\langle \varphi_i^{(1)}, A^* (B^+ A^*)^{p_i-j} \right. \\
 & \quad \left. \times \left(\psi_\nu^{(1)} + \psi_\nu^{(2)} \cdot \frac{t}{1!} + \psi_\nu^{(3)} \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots + \psi_\nu^{(p_\nu)} \cdot \frac{t^{p_\nu-1}}{(p_\nu-1)!} \right) \right\rangle = 0.
 \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 $n < m$, то обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}_1(t)$ является фундаментальной для дифференциального оператора $(B\delta'(t) - A\delta(t))$ на подклассе обобщенных функций из $K'(\mathbb{R}_+^1; E_2)$, удовлетворяющих условиям

$$\langle e^{AB^+t}, \psi_\nu \rangle z_\nu \theta(t) * u(t) = 0, \quad \nu = n+1, \dots, m.$$

Доказательство. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, получим равенство

$$\begin{aligned} (B\delta'(t) - A\delta(t)) * \mathcal{E}_1(t) * u(t) &= I\delta(t) * u(t) \\ &\quad - \frac{d}{dt} \left(\mathcal{Q}e^{AB^+t} \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(t) \right) * u(t). \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} &\mathcal{Q}e^{AB^+t} \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(t) * u(t) \\ &= \sum_{\nu=n+1}^m \langle e^{AB^+t}, \psi_\nu \rangle z_\nu \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(t) * u(t) \\ &= \sum_{\nu=n+1}^m \left[\langle e^{AB^+t}, \psi_\nu \rangle - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_\nu \rangle \right] z_\nu \theta(t) * u(t) \\ &= \sum_{\nu=n+1}^m \langle e^{AB^+t}, \psi_\nu \rangle z_\nu \theta(t) * u(t). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Теоремы 1 и 2 допускают следующие обобщения.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 1, то

(а) дифференциальный оператор $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t))$ на классе $K'(\mathbb{R}_+^1; E_2)$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(t) &= B^+ \mathcal{U}_N(AB^+t) \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(N \cdot k)}(t) \right], \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{U}_N(AB^+t) = \sum_{i=1}^{\infty} (AB^+)^{i-1} \frac{t^{i \cdot N - 1}}{(i \cdot N - 1)!};$$

(б) дифференциальный оператор $(B\delta^{(N)}(x) \cdot \delta^{(N)}(y) - A\delta(x) \cdot \delta(y))$ на классе $K'(\mathbb{R}_+^2; E_2)$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(x, y) &= B^+ \mathcal{V}_N(AB^+)(x, y) \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(x, y) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(N \cdot k)}(x) \cdot \delta^{(N \cdot k)}(y) \right], \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{Y}_N(AB^+)(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (AB^+)^{i-1} \frac{x^{i \cdot N-1}}{(i \cdot N - 1)!} \cdot \frac{y^{i \cdot N-1}}{(i \cdot N - 1)!},$$

здесь $\psi_i^{(j)}$ при $i = m + 1, \dots, n, j = 1, \dots, p_i$ те же, что и в теореме 1.

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 2, то

(а) обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}_N(t)$ является фундаментальной для дифференциального оператора $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t))$ на подклассе обобщенных функций из $K'(\mathbb{R}_+^1; E_2)$, удовлетворяющих условиям

$$\langle \mathcal{Y}_N(AB^+t) \cdot, \psi_\nu \rangle z_\nu \theta(t) * u(t) = 0, \quad \nu = n + 1, \dots, m;$$

(б) обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}_N(x, y)$ является фундаментальной для дифференциального оператора $(B\delta^{(N)}(x) \cdot \delta^{(N)}(y) - A\delta(x) \cdot \delta(y))$ на подклассе обобщенных функций из $K'(\mathbb{R}_+^2; E_2)$, удовлетворяющих условиям

$$\langle \mathcal{Y}_N(AB^+)(x, y) \cdot, \psi_\nu \rangle z_\nu \theta(x, y) * u(x, y) = 0, \quad \nu = n + 1, \dots, m.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, при $N = 2$ имеем $\mathcal{U}_2(AB^+t) = \frac{\sinh(\sqrt{AB^+}t)}{\sqrt{AB^+}}$, здесь $\sqrt{AB^+}$ — формальный символ.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $n = m$, т. е. оператор B фредгольмов, то $B^+ = \Gamma$ — оператор Шмидта и теоремы 1 и 3(а) оказываются теоремами 1 и 3 из работы [8].

Рассмотрим для пары операторов A и B в предположении выполнения условий теоремы 1 задачу Коши вида

$$B\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad x(0) = x_0,$$

$x_0 \in D(B)$, $f(t)$ — достаточно гладкая функция со значениями в E_2 .

Функция $x(t) \in C^1(t \geq 0)$, являющаяся решением этой задачи, будучи продолженной нулем при $t < 0$, т. е. $\tilde{x}(t) = x(t)\theta(t) \in K'(\mathbb{R}_+^1; E_1)$, удовлетворяет в обобщенном смысле [15] равенству

$$B\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + f(t)\theta(t) + Bx_0\delta(t),$$

здесь $f(t)\theta(t) + Bx_0\delta(t) \in K'(\mathbb{R}_+^1; E_2)$. Задачу о построении решения такого уравнения принято называть *обобщенной задачей Коши*. В соответствии с теоремой 1 искомое обобщенное решение (класса $K'(\mathbb{R}_+^1; E_1)$) имеет вид

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{E}_1(t) * (Bx_0\delta(t) + f(t)\theta(t))$$

или, в развернутой форме,

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) = & - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^k c_{ij} \varphi_i^{(k+1-j)} \right\} \delta^{(p_i-1-k)}(t) \right] \\ & + \left(x_0 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{p_i} c_{ij} \varphi_i^{(p_i+1-j)} + \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=1}^{p_i} c_{ij} B^+ e^{AB^+t} A \varphi_i^{(p_i-j)} \right) \\ & + \int_0^t B^+ e^{AB^+(t-s)} [I - \tilde{\mathcal{Q}}] \left(Ax_0 + f(s) + \sum_{k=m+1}^n \xi_{k1}(s) A \varphi_k^{(1)} \right) ds \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{p_i} \xi_{ij}(t) \varphi_i^{(j)} + \sum_{k=m+1}^n \xi_{k1}(t) \varphi_k^{(1)} \Big) \theta(t).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\tilde{\mathcal{Q}} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)}, \quad l = \min(m, n);$$

при $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p_i$

$$c_{ij} = -\langle Ax_0 + f(0), \psi_i^{(j)} \rangle - \langle f'(0), \psi_i^{(j-1)} \rangle - \dots - \langle f^{(j-1)}(0), \psi_i^{(1)} \rangle,$$

$$\xi_{ij}(t) = - \sum_{k=0}^{p_i-j} \langle f^{(k)}(t) - f^{(k)}(0), \psi_i^{(p_i-k+1-j)} \rangle;$$

при $i = m+1, \dots, n, j = 1, \dots, p_i - 1$

$$c_{ij} = -\langle Bx_0, \psi_i^{(j+1)} \rangle - \langle f(0), \psi_i^{(j)} \rangle - \dots - \langle f^{(j-2)}(0), \psi_i^{(2)} \rangle,$$

$$c_{ip_i} = -\langle x_0, \gamma_i \rangle - \langle f(0), \psi_i^{(p_i)} \rangle - \dots - \langle f^{(p_i-2)}(0), \psi_i^{(2)} \rangle,$$

$$\xi_{i1}(t) = - \sum_{k=0}^{p_i-1} \langle f^{(k)}(t) - f^{(k)}(0), \psi_i^{(p_i-k)} \rangle.$$

В силу произвольности функционалов $\psi_i^{(j)}$ при $i = m+1, \dots, n, j = 2, \dots, p_i$ соответствующие им коэффициенты c_{ij} оказываются свободными параметрами, а функции $\xi_{i1}(t), i = m+1, \dots, n$, произвольными, т. е. обобщенное решение $\tilde{x}(t)$ является многопараметрической функцией. Отсюда получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 1, в выражении для обобщенного решения $\tilde{x}(t)$ задачи Коши свободные параметры $c_{ij}, i = m+1, \dots, n, j = 1, \dots, p_i$, положить равными нулю, а начальные условия x_0 и функцию $f(t)$ выбрать такими, чтобы $c_{ij} = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p_i$, то обобщенное решение окажется классическим (непрерывным).

Если $m > n$, то в соответствии с теоремой 2 функция $\tilde{x}(t) = \mathcal{E}_1(t) * (Bx_0\delta(t) + f(t)\theta(t))$ будет являться обобщенным решением задачи Коши, если для функции $Bx_0\delta(t) + f(t)\theta(t)$ при $\nu = n+1, \dots, m$ будут выполняться условия

$$\langle e^{AB^+t}, \psi_\nu \rangle z_\nu \theta(t) * (Bx_0\delta(t) + f(t)\theta(t)) = 0$$

или

$$\int_0^t \langle e^{AB^+(t-s)} (Ax_0 + f(s)), \psi_\nu \rangle ds = 0,$$

причем свободных параметров и произвольных функций в обобщенном решении $\tilde{x}(t)$ в этом случае нет. Итак, справедливо

Следствие 2. Если выполнены условия теоремы 2, начальные данные x_0 и функцию $f(t)$ выбрать таким образом, чтобы $c_{ij} = 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p_i$, и при $\nu = n + 1, \dots, m$

$$\int_0^t \langle e^{AB^+(t-s)}(Ax_0 + f(s)), \psi_\nu \rangle ds = 0,$$

то обобщенное решение $\tilde{x}(t)$ окажется классическим (непрерывным).

Замечание 3. Если вспомнить, что при $n < m$ была осуществлена перестройка базиса $\{\psi_k\}$ для $k = n + 1, \dots, m$ по правилу

$$\tilde{\psi}_k = \psi_k - \sum_{i=1}^n \langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_k \rangle \psi_i,$$

то, вводя для $j = 1, \dots, m$ обозначения

$$b_j(t) = \int_0^t \langle e^{AB^+(t-s)}(Ax_0 + f(s)), \psi_j \rangle ds,$$

условия

$$\int_0^t \langle e^{AB^+(t-s)}(Ax_0 + f(s)), \tilde{\psi}_\nu \rangle ds = 0, \quad \nu = n + 1, \dots, m,$$

можно переписать в виде

$$b_\nu(t) = \sum_{i=1}^n \langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_\nu \rangle b_i(t).$$

Соответственно при $i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, p_i, l = \min(n, m)$ коэффициенты c_{ij} можно вычислять по правилу $c_{ij} = -b_i^{(j)}(0)$, а функции ξ_{ij} — по правилу $\xi_{ij}(t) = b_i^{(p_i-j+1)}(t) - b_i^{(p_i-j+1)}(0)$. Именно таким образом в работах [7, 16] конструировались непрерывные решения рассматриваемой задачи Коши. При нашем подходе теоремы из [7] и [16] получаются как следствия из теорем 1 и 2, аналогичные следствия можно получить и из теорем 3 и 4.

§ 4. Фундаментальные оператор-функции дифференциально-разностных операторов с нётеровым оператором при производной

Теорема 5. Если выполнены условия теоремы 1, то дифференциально-разностный оператор $(B\delta'(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x})))$ имеет на классе $K'(\mathbb{R}_+^1 \otimes \mathbb{R}^n; E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(t, \bar{x}) = & B^+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(AB^+t)^k}{k!} \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(t) \\ & \times (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^k + \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} (-1)^k \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(k)}(t) \cdot \mathcal{B}_{k+1}(\bar{x}) \right], \end{aligned}$$

здесь, как и в теореме 1, $\psi_i^{(1)} = 0$, $\psi_i^{(j)}$ — произвольные функционалы из E_2^* при $i = m + 1, \dots, n$, $j = 2, \dots, p_i$ и введены обозначения

$$\begin{aligned} (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^k &= \underbrace{(\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x})) * \dots * (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))}_k \\ &= \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu C_k^\nu \delta(\bar{x} - \nu\bar{\mu}), \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_{k+1}(\bar{x}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{k+\nu}^k \delta(\bar{x} - \nu\bar{\mu}), \quad (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^0 = \mathcal{B}_0(\bar{x}) = \delta(\bar{x}).$$

Доказательство. Обобщенные функции $\mathcal{B}_{k+1}(\bar{x})$ удовлетворяют следующим равенствам:

$$(\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x})) * \mathcal{B}_{k+1}(\bar{x}) = -\mathcal{B}_k(\bar{x}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

проверяемым непосредственно, поэтому если $k > l$, то

$$(\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^k * \mathcal{B}_l(\bar{x}) = (-1)^l (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^{k-l}.$$

Осуществляя выкладки, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 1, и используя при этом приведенные здесь соотношения, для любой $u(t, \bar{x}) \in K'(\mathbb{R}_+^1 \otimes \mathbb{R}^n; E_2)$ получим равенство

$$\begin{aligned} &(B\delta'(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))) * \mathcal{E}_1(t, \bar{x}) * u(t, \bar{x}) \\ &= \left(I\delta(t) \cdot \delta(\bar{x}) - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(AB^+t)^k}{k!} \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \right. \\ &\quad \times \theta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^k - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^{p_i-1} (-1)^k \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle (B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)} - A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}) \right\} \delta^{(k)}(t) \cdot \mathcal{B}_k(\bar{x}) \right] \right) * u(t, \bar{x}). \end{aligned}$$

Доказательство завершается так же, как в теореме 1.

Теорема 6. Если в условиях теоремы 5 $n < m$, то обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}_1(t, \bar{x})$ является фундаментальной для дифференциально-разностного оператора $(B\delta'(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x})))$ на подклассе обобщенных функций из $K'(\mathbb{R}_+^1 \otimes \mathbb{R}^n; E_2)$, удовлетворяющих при $\nu = n + 1, \dots, m$ условиям

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \frac{(AB^+t)^k}{k!}, \psi_\nu \right\rangle z_\nu \theta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^k * u(t, \bar{x}) = 0.$$

Как и теоремы предыдущего параграфа, эти утверждения допускают обобщения на дифференциально-разностные операторы высокого порядка.

Теорема 7. (а) При выполнении условий теоремы 1 дифференциально-разностный оператор $(B\delta^{(N)}(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x})))$ имеет на классе $K'(\mathbb{R}_+^1 \otimes \mathbb{R}^n; E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_N(t, \bar{x}) = B^+ \sum_{k=1}^{\infty} (AB^+)^{k-1} \frac{t^{N \cdot k - 1}}{(N \cdot k - 1)!}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^k \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} (-1)^k \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(k \cdot N)}(t) \cdot \mathcal{B}_{k+1}(\bar{x}) \right]. \end{aligned}$$

(б) Если в условиях теоремы 1 $n < m$, то обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}_N(t, \bar{x})$ является фундаментальной для дифференциально-разностного оператора $B\delta^{(N)}(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))$ на подклассе обобщенных функций из $K'(\mathbb{R}_+^1 \otimes \mathbb{R}^n; E_2)$, удовлетворяющих при $\nu = n + 1, \dots, m$ условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\langle (AB^+)^{k-1} \frac{(t)^{N \cdot k - 1}}{(N \cdot k - 1)!}, \psi_\nu \right\rangle z_\nu \theta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^k * u(t, \bar{x}) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для пары операторов A и B , удовлетворяющих условиям теоремы 5, обобщенное решение задачи Коши

$$B \frac{\partial u}{\partial t} = A(u(t, \bar{x} - \bar{\mu}) - u(t, \bar{x})) + f(t, \bar{x}), \quad u(0, \bar{x}) = u_0(\bar{x}),$$

где $u_0(\bar{x})$ и $f(t, \bar{x})$ быстро убывающие [14] по $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $u_0(\bar{x}) \in D(B)$, представимо в виде

$$\tilde{u}(t, \bar{x}) = \mathcal{E}_1(t, \bar{x}) * (Bu_0(\bar{x})\delta(t) + f(t, \bar{x})\theta(t)).$$

Из этого представления, как и при выводе следствий из теорем 1 и 2, при необходимости можно получить теоремы о непрерывных решениях данной задачи Коши.

В заключение авторы считают своим приятным долгом сердечно поблагодарить профессора Н. А. Сидорова за полезные обсуждения представленных здесь результатов и конструктивные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г. О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, № 6. С. 1006–1022; 2000. Т. 40, № 8. С. 1237–1249; 2003. Т. 43, № 12. С. 1835–1869.
2. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 58–73.
3. Осолков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
4. Dolezal V. Dynamics of linear systems. Goningen; Prague: P. Noordhoff Acad., 1967.
5. Кожанов А. И. Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 1. С. 70–75.
6. Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 4. С. 47–74.
7. Сидоров Н. А., Романова О. А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 9. С. 1516–1626.
8. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1167–1182.
9. Sidorov N., Loginov B., Sinityn A., Falaleev M. Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.

10. Сидоров Н. А., Романова О. А., Благодатская Е. Б. Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части. Иркутск, 1992. 30 с. (Препринт/ИрВЦ СО РАН; № 3).
11. Nashed M. Z. Generalized inverses and applications. New York: Acad. Press, 1976.
12. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
13. Русак Ю. Б. Некоторые соотношения между жордановыми наборами оператор-функций и сопряженной к ней // Изв. АН УзССР. Сер. мат. наук. 1978. № 2. С. 15–19.
14. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
15. Сидоров Н. А., Фалалеев М. В. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 726–728.
16. Сидоров Н. А., Романова О. А., Благодатская Е. Б. Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 4. С. 729–731.

Статья поступила 1 марта 2004 г.

*Фалалеев Михаил Валентинович, Гражданцева Елена Юрьевна
Институт математики, экономики и информатики,
Иркутский гос. университет, ул. К. Маркса, 1, Иркутск 664003
mihail@ic.isu.ru, geu@math.isu.ru*