Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2006. Том 47, № 2

УДК 515

СВОЙСТВО O_n ДЛЯ ФИНИТНЫХ ПОЛУНОРМАЛЬНЫХ ФУНКТОРОВ

А. В. Иванов, К. В. Матюшичев

Аннотация: Приводится финитный комбинаторный критерий свойства O_n для финитных полунормальных функторов и с его помощью устанавливается, что в некоторых случаях обладание этим свойством приводит к совершенно конкретным функторам. Так, если некоторый функтор F обладает свойством O_2, то F_2 совпадает с $\exp_2$ или с функтором возведения во вторую степень. Отсюда получается, что если $F(D^{\omega_1})$ и D^{ω_1} гомеоморфны, то F_2 представляет собой $\exp_2$ или $(\cdot)^2$.

Ключевые слова: компактное пространство, открытое отображение, полунормальный функтор, финитный функтор, функтор экспоненты, бесконечнократное отображение.

Ниже рассматриваются только ковариантные функторы, действующие из категории Comp компактов и непрерывных отображений в ту же категорию. В работе [1] при доказательстве основных теорем ключевую роль играет следующее

Предложение. *Пусть F — полунормальный финитно строго эпиморфный*[1)] *функтор, и пусть $F_{nn}(n) \neq \varnothing$. Тогда для любого открытого бесконечнократного отображения $f : X \to Y$ компакта X на компакт Y без изолированных точек*[2)] *отображение $F_n(f) : F_n(X) \to F_n(Y)$ открыто в любой точке $a \in F_{nn}(Y)$ и не является открытым в каждой точке $a \in F_{n-1}(Y) \setminus Y$.*

Поскольку многие широко известные функторы полунормальны и финитно строго эпиморфны (подробнее об этом см. [1, 2]), естественным образом возникает вопрос об открытости отображений $F_n(f)$ в оставшихся[3)] точках, т. е. в точках самого Y. Целью работы является изучение поведения отображений $F_n(f)$ в точках $y \in Y$ для финитных полунормальных функторов, причем условие финитной строгой эпиморфности заменяется менее ограничительным (см. ниже определение n-эпиморфности). Для этого в работе вводится соответствующее понятие — свойство O_n полунормальных функторов, которое мы формулируем следующим образом: *F обладает свойством O_n*, если для любых компактов X, Y без изолированных точек и для любого открытого бесконечнократного сюръективного отображения $f : X \to Y$ соответствующее отображение $F_n(f) : F_n(X) \to F_n(Y)$ открыто в любой точке $y \in Y \subset F_n(Y)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта ур. 04.01.033).

1) В [1] такие функторы назывались строго эпиморфными.

2) Ясно, что в этих условиях X также не имеет изолированных точек.

3) $F_n(Y)$ представляет собой дизъюнктную сумму $F_{nn}(Y)$ и $F_{n-1}(Y)$.

Основным результатом работы можно назвать комбинаторную характеристику свойства O_n (теорема 1), следствием которой является теорема 2. В случае $n = 2$ свойство O_n приводит к совершенно конкретным функторам (теорема 3). Наконец, теорема 4 показывает, как свойство O_n работает в конкретных ситуациях. Работа завершается примерами простых функторов, удовлетворяющих O_n.

Для удобства читателя кратко напомним некоторые определения и сформулируем дополнительные ограничения на рассматриваемые далее функторы.

Отображение $g : X \to Y$ одного топологического пространства в другое называется *открытым в точке* $y \in g(X) \subset Y$, если для любого $x \in g^{-1}(y)$ и для любой окрестности Ox точки x в X множество $g(Ox)$ содержит некоторую окрестность точки y (см., например, [1]).

Будем предполагать, что для ковариантного функтора $F : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ выполняются следующие условия (подробнее см. [3–5]).

1. F мономорфен, т. е. $F(i) : F(X) \to F(Y)$ — вложение, если $i : X \to Y$ — вложение (таким образом, $F(X)$ будем считать подпространством $F(Y)$, если X — подпространство Y).

2. F сохраняет пересечения, т. е. для любого компакта X и системы $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ его замкнутых подмножеств выполняется равенство $F(\bigcap\{X_\alpha : \alpha \in A\}) = \bigcap\{F(X_\alpha) : \alpha \in A\}$. Для любой точки $\chi \in F(X)$ определяется ее носитель $\operatorname{supp}\chi = \bigcap\{Y \subset X : Y = [Y]_X, \chi \in F(Y)\}$. Далее, для любого $X \in \mathrm{Comp}$ и любого натурального n полагается $F_n(X) = \{\chi \in F(X) : |\operatorname{supp}\chi| \leq n\}$; возникает подфунктор F_n функтора F.

3. F непрерывен, т. е. коммутирует с переходом к пределу обратного спектра.

4. F сохраняет точку и пустое множество.

Функтор F, удовлетворяющий условиям 1–4, называется *полунормальным.* Вместе с F полунормальными оказываются также все функторы F_n. Большую роль далее играет отображение Басманова (см. [6])

$$\pi_{F,X,n} : X^n \times F(n) \to F(X),$$

где n — произвольное натуральное число, $X \in \mathrm{Comp}$. По определению

$$\pi_{F,X,n}(\xi, a) = F(\xi)(a)$$

(здесь n и X^n отождествляются с $\{0, 1, \dots, n-1\}$ и $C(n, X)$ соответственно). Отображение $\pi_{F,X,n}$ непрерывно, и его образ совпадает с $F_n(X)$. Обозначая $F_{nn}(X) = F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$, $\Pi_n(X) = \pi^{-1}_{F,X,n}(F_{nn}(X))$, получаем открытое отображение $\pi_{F,X,n}|_{\Pi_n(X)} : \Pi_n(X) \to F_{nn}(X)$. Поскольку F и $n \geq 2$ у нас фиксированы, в обозначении $\pi_{F,X,n}$ индексы F и n будем опускать и, более того, далее под π_X будем понимать ограничение отображения $\pi_{F,X,n}$ на $X^n \times F_{nn}(n)$, т. е. $\pi_X : X^n \times F_{nn}(n) \to F_n(X)$.

5. F финитен, т. е. $|X| < \omega_0 \Rightarrow |F(X)| < \omega_0$ (в частности, $F_{nn}(n)$ конечно и $X^n \times F_{nn}(n)$ — компакт).

Кроме того, дополнительно предположим, что рассматриваемые далее функторы n-эпиморфны.

Определение. Полунормальный финитный функтор F будем называть *n-эпиморфным*, если для любых k, $1 < k < n$, и $a \in F_{kk}(k)$ найдутся $\varphi : n \to k$ и $b \in F_{nn}(n)$ такие, что $F(\varphi)(b) = a$ (легко видеть, что это равносильно эпиморфности отображения $\pi_X : X^n \times F_{nn}(n) \to F_n(X)$ для любого $X \in \mathrm{Comp}$).

Напомним, что n-эпиморфность представляет собой менее обременительное ограничение, чем финитная строгая эпиморфность из [1, 2].

Итак, рассматриваем полунормальный финитный функтор F, фиксируем некоторое $n \in \mathrm{sp}(F)$ (т. е. $F_{nn}(n) \neq \varnothing$; определение степенного спектра $\mathrm{sp}(F)$ дано в [2]) и предполагаем, что F удовлетворяет условию n-эпиморфности.

Часто удобнее оперировать ассоциированным с F и n отображением π, поэтому будем говорить, что π *обладает свойством* O_n, если для любого компакта X без изолированных точек отображение $\pi_X : X^n \times F_{nn}(n) \to F_n(X)$ открыто в любой точке $x \in X \subset F_n(X)$.

Предложение 1. *F обладает свойством O_n в том и только в том случае, если им обладает π.*

Доказательство. Необходимость. Пусть Y — компакт без изолированных точек. Требуется доказать, что отображение $\pi_Y : Y^n \times F_{nn}(n) \to F_n(Y)$ открыто в любой точке $y \in Y \subset F_n(Y)$. Пусть $(\zeta, a) \in Y^n \times F_{nn}(n)$, $\pi_Y(\zeta, a) = y$, $O(\zeta, a)$ — некоторая окрестность (ζ, a) в $Y^n \times F_{nn}(n)$. Положим $X = Y \times I$, и пусть $f : X \to Y$ — проекция X на Y вдоль I. Тогда X — компакт без изолированных точек, f — открытое бесконечнократное сюръективное отображение X на Y. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X^n \times F_{nn}(n) & \xrightarrow{\pi_X} & F_n(X) \\ {\scriptstyle f^n \times \mathrm{id}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F_n(f)} \\ Y^n \times F_{nn}(n) & \xrightarrow{\pi_Y} & F_n(Y)\ . \end{array}$$

Найдется вложение $\xi : n \to X$ такое, что $f^n \times \mathrm{id}(\xi, a) = (\zeta, a)$. Тогда $\pi_X(\xi, a) = \chi \in F_n(X)$ и $F_n(f)(\chi) = y$. Так как $(\xi, a) \in \Pi_n(X)$ и $\Pi_n(X)$ — открытое подмножество $X^n \times F_{nn}(n)$, существует окрестность $O(\xi, a) \in \Pi_n(X)$ такая, что $f^n \times \mathrm{id}(O(\xi, a)) \subset O(\zeta, a)$. Далее, $\pi_X(O(\xi, a)) = O\chi$ — окрестность χ в $F_n(X)$. Тогда $y \in \langle F_n(f)(O\chi)\rangle_{F_n(Y)}$. Включение $F_n(f)(O\chi) \subset \pi_Y(O(\zeta, a))$ завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть $\chi \in F_n(X)$, $F_n(f)(\chi) = y \in Y \subset F_n(Y)$ и $O\chi$ — произвольная окрестность χ в $F_n(X)$. Найдется элемент $(\xi, a) \in X^n \times F_{nn}(n)$ такой, что $\pi_X(\xi, a) = \chi$. Положим $f^n \times \mathrm{id}(\xi, a) = (\zeta, a)$, тогда $\pi_Y(\zeta, a) = y$. Существует окрестность $O(\xi, a)$ точки (ξ, a) в $X^n \times F_{nn}(n)$ такая, что $\pi_X(O(\xi, a)) \subset O\chi$. В силу открытости $f^n \times \mathrm{id}$ получаем, что $f^n \times \mathrm{id}(O(\xi, a)) = O(\zeta, a)$ — окрестность (ζ, a) в $Y^n \times F_{nn}(n)$. По условию $y \in \langle \pi_Y(O(\zeta, a))\rangle_{F_n(Y)}$, откуда $y \in \langle F_n(f)(O\chi)\rangle_{F_n(Y)}$, что и требовалось.

Комбинаторная характеристика O_n заключается в выполнении двух условий.

Теорема 1. *F обладает свойством O_n в том и только в том случае, если выполняются следующие два условия:*

$(*)$ *если $\varphi : n \to 2$ — эпиморфизм, то $F(\varphi)(F_{nn}(n)) \cap 2 = \varnothing$* (напомним, что $2 = \{0, 1\} \subset F(2) = F(\varphi)(F(n))$).

$(**)$ *для любых $a, b \in F_{nn}(n)$ существует $\varphi \in S_n$ (S_n — группа перестановок на n) такое, что $F(\varphi)(a) = b$.*

Доказательство этой теоремы содержится в предложениях 2–8.

Предложение 2. *Пусть F обладает свойством O_n, X — компакт без изолированных точек и $x \in X$ — произвольная точка. Тогда для любой окрестности*

$O_X(x)$ точки x в X найдется окрестность $O_{F_n(X)}(x)$ точки x в $F_n(X)$ такая, что для любой точки $\chi \in O_{F_n(X)}(x)$ выполняется включение $\operatorname{supp}\chi \subset O_X(x)$.

Доказательство. В самом деле, если это не так, то найдется окрестность $O_X(x) \subset X$ такая, что в любой окрестности $O_{F_n(X)}(x)$ найдется точка χ, для которой $\operatorname{supp}\chi$ не содержится в $O_X(x)$. Рассмотрим $\xi : n \to X$, $\xi(n) = \{x\}$, и произвольную точку $a \in F_{nn}(n)$. Тогда $\pi_X(\xi, a) = x$. Следовательно, $\langle \pi_X\big(O_X^n(x) \times F_{nn}(n)\big)\rangle_{F_n(X)}$ содержит x, и существует точка $\chi \in \pi_X\big(O_X^n(x) \times F_{nn}(n)\big)$ такая, что $\operatorname{supp}\chi$ не содержится в $O_X(x)$. Найдутся $\xi_1 : n \to X$ и $b \in F_{nn}(n)$ такие, что $\xi_1(n) \subset O_X(x)$ и $\pi_X(\xi_1, b) = \chi$. Получаем $\chi = F(\xi_1)(b)$ и $\operatorname{supp}\chi \subset \xi_1(\operatorname{supp} b) = \xi_1(n) \subset O_X(x)$; противоречие.

Предложение 3. *Пусть F обладает свойством O_n и X — компакт без изолированных точек. Если для некоторых $\xi : n \to X$ и $a \in F_{nn}(n)$ выполняется $\pi_X(\xi, a) = x \in X \subset F_n(X)$, то $\xi(n) = \{x\}$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $k < n$ выполняется $\xi(k) = x_1 \neq x$. Фиксируем некоторую окрестность $O_X(x)$, не содержащую x_1. Найдем окрестность $O_{F_n(X)}(x)$ точки x в $F_n(X)$, как в предложении 2. Поскольку $\pi_X(\xi, a) = x$ и X не содержит изолированных точек, найдется вложение $\zeta : n \to X$ такое, что $\zeta(k) = x_1$, $\pi_X(\zeta, a) \in O_{F_n(X)}(x)$. Для точки $\chi = \pi_X(\zeta, a)$ получаем, что $\chi \in O_{F_n(X)}(x)$ и, следовательно, $\operatorname{supp}\chi \subset O_X(x)$. С другой стороны, $\operatorname{supp}\chi = \zeta(\operatorname{supp} a) = \zeta(n)$ и $\zeta(k) = x_1 \in \operatorname{supp}\chi \subset O_X(x)$; противоречие.

Предложение 4. *Если F обладает свойством O_n, то F удовлетворяет условию $(*)$.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть $\varphi : n \to 2$ — эпиморфизм, $a \in F_{nn}(n)$ и $F(\varphi)(a) = 0 \in 2 \subset F(2)$. Пусть X и $x_0 \in X$ — произвольные компакт без изолированных точек и точка в нем. Возьмем вложение $i : 2 \to X$ так, чтобы $i(0) = x_0$, и рассмотрим отображение $\xi = i \circ \varphi : n \to X$. Ясно, что $F(i)(0) = x_0 \in X \subset F_n(X)$. Тогда $\pi_X(\xi, a) = F(\xi)(a) = F(i \circ \varphi)(a) = F(i)(F(\varphi)(a)) = F(i)(0) = x_0$. По предложению 3 отсюда должно следовать, что $\xi(n) = \{x_0\}$; противоречие.

Предложение 5. *Если F обладает свойством O_n, то F удовлетворяет условию $(**)$.*

Доказательство. Пусть $a, b \in F_{nn}(n)$ и X — произвольный компакт без изолированных точек, $x_0 \in X$. Имеем $x_0 \in \langle \pi_X(X^n \times \{a\})\rangle_{F_n(X)}$. Пусть $\xi_0 : n \to X$, $\xi_0(n) = \{x_0\}$. Тогда $\pi_X(\xi_0, b) = x_0$ и найдется $O_X(x_0)$ такая, что $\pi_X\big(O_X^n(x_0) \times \{b\}\big) \subset \pi_X(X^n \times \{a\})$. Пусть $\xi : n \to X$ — вложение, причем $\xi(n) \subset O_X(x_0)$, т. е. $\xi \in O_X^n(x_0)$. Для ξ получаем $\pi_X(\xi, b) \in \pi_X\big(O_X^n(x_0) \times \{b\}\big) \subset \pi_X(X^n \times \{a\})$. Поэтому найдется $\zeta : n \to X$, для которого $\pi_X(\xi, b) = \pi_X(\zeta, a)$. Ясно, что $\xi(n) = \zeta(n)$ и существует $\varphi \in S_n$ со свойством $\zeta = \xi \circ \varphi$. Так как $F(\xi)(b) = F(\zeta)(a) = F(\xi \circ \varphi)(a) = F(\xi)(F(\varphi)(a))$ и $F(\xi)$ — вложение, получаем $b = F(\varphi)(a)$, что и требовалось.

Предложение 6. *Пусть F удовлетворяет условию $(*)$, X — компакт без изолированных точек. Если для некоторых $\xi : n \to X$ и $a \in F_{nn}(n)$ выполняется $\pi_X(\xi, a) = x \in X \subset F_n(X)$, то $\xi(n) = \{x\}$ (см. предложение 3).*

Доказательство. Предположим, что $\xi(n) \neq \{x\}$. Тогда найдутся k, $1 < k < n$, эпиморфизм $\varphi : n \to k$ и вложение $i : k \to X$ такие, что $\xi = i \circ \varphi$. Обозначим $\kappa = F(\varphi)(a)$. Получаем

$$F(i)(\kappa) = F(i)(F(\varphi)(a)) = F(i \circ \varphi)(a) = F(\xi)(a) = \pi_X(\xi, a) = x \in X \subset F_n(X).$$

Поскольку i — вложение, отсюда следует, что $\kappa \in k \subset F(k)$. Если $k = 2$, то сразу получается противоречие с условием $(*)$. Предположим, что $2 < k < n$. В этом случае определим отображение $\varphi_1 : k \to 2$ следующим образом: $\varphi_1(\kappa) = 0$ и $\varphi_1(k \setminus \{\kappa\}) = 1$. Рассмотрим композицию $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi : n \to 2$. Ясно, что φ_2 — эпиморфизм и $F(\varphi_2)(a) = 0$; противоречие с условием $(*)$.

Предложение 7. *Пусть F удовлетворяет условию $(*)$, X — компакт без изолированных точек и $x \in X$ — произвольная точка. Тогда для любой окрестности $O_X(x)$ точки x в X найдется окрестность $O_{F_n(X)}(x)$ точки x в $F_n(X)$ такая, что для любой точки $\chi \in O_{F_n(X)}(x)$ выполняется включение $\operatorname{supp}\chi \subset O_X(x)$ (см. предложение 2).*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что в любой окрестности $O_{F_n(X)}(x)$ точки x в $F_n(X)$ найдется точка χ, для которой $\operatorname{supp}\chi$ не содержится в $O_X(x)$. Пусть $\{O_\alpha(x)\}$ — база окрестностей точки x в $F_n(X)$ и $\chi_\alpha \in O_\alpha(x)$ удовлетворяют условию $\operatorname{supp}\chi_\alpha \not\subset O_X(x)$. Найдутся $(\xi_\alpha, a_\alpha) \in X^n \times F_{nn}(n)$ такие, что $\pi_X(\xi_\alpha, a_\alpha) = \chi_\alpha$. Обозначим $A = [\{(\xi_\alpha, a_\alpha)\}]_{X^n \times F_{nn}(n)}$. Тогда $x \in \pi_X(A)$ (если $x \neq \pi_X(A)$, то для некоторого α будет $O_\alpha(x) \cap \pi_X(A) = \varnothing$ вопреки $\chi_\alpha \in O_\alpha(x) \cap \pi_X(A)$). Пусть для $(\xi_0, a_0) \in A$ выполняется $\pi_X(\xi_0, a_0) = x$. Из предложения 6 вытекает, что $\xi_0(n) = \{x\}$. Тогда $O_X^n(x) \times \{a_0\}$ — окрестность (ξ_0, a_0) и для некоторого α получаем $(\xi_\alpha, a_\alpha) \in O_X^n(x) \times \{a_0\}$, откуда $\xi_\alpha(n) \subset O_X(x)$. Тем самым для этого α имеем $\operatorname{supp}\chi_\alpha \subset \xi_\alpha(n) \subset O_X(x)$; противоречие.

Предложение 8. *Если F удовлетворяет условиям $(*)$ и $(**)$, то F обладает свойством O_n.*

Доказательство. В силу предложения 1 достаточно установить O_n для отображения π. Пусть $\pi_X(\xi, a) = x \in X \subset F_n(X)$ и $O(\xi, a)$ — некоторая окрестность (ξ, a) в $X^n \times F_{nn}(n)$. В силу предложения 6 можно считать, что $O(\xi, a) = O_X^n(x) \times \{a\}$. Согласно предложению 7 существует $O_{F_n(X)}(x)$ такая, что для любого $\chi \in O_{F_n(X)}(x)$ выполняется включение $\operatorname{supp}\chi \subset O_X(x)$. Возьмем произвольный элемент $\chi \in O_{F_n(X)}(x)$. Найдутся $\xi_1 \in X^n$ и $b \in F_{nn}(n)$ такие, что $\xi_1(n) = \operatorname{supp}\chi$ и $\chi = \pi_X(\xi_1, b) = F(\xi_1)(b)$. Тогда $\xi_1 \in O_X^n(x)$. Из условия $(**)$ вытекает, что найдется $\varphi \in S_n$ со свойством $F(\varphi)(a) = b$. Теперь $\pi_X(\xi_1 \circ \varphi, a) = F(\xi_1 \circ \varphi)(a) = F(\xi_1)(b) = \chi$. При этом $\xi_1 \circ \varphi \in O_X^n(x)$ и $(\xi_1 \circ \varphi, a) \in O_X^n(x) \times \{a\} = O(\xi, a)$. Таким образом, $O_{F_n(X)}(x) \subset \pi_X(O(\xi, a))$ и $x \in \langle \pi_X(O(\xi, a)) \rangle_{F_n(X)}$, что и требовалось.

Теорема 2. *Для того чтобы F обладал свойством O_n, достаточно выполнения одного из следующих двух условий.*

1. *Существует компакт X без изолированных точек, для которого π_X открыто в некоторой точке $x_0 \in X$.*

2. *Существуют компакты без изолированных точек X и Y и открытое бесконечно-кратное сюръективное отображение $f : X \to Y$ такие, что отображение $F_n(f) : F_n(X) \to F_n(Y)$ открыто в некоторой точке $y_0 \in Y$.*

Доказательство. 1. В самом деле, в предложениях 2–5 можно считать X и x_0 фиксированными и при этом получить, что F удовлетворяет условиям $(*)$ и $(**)$, а значит, обладает свойством O_n.

2. Пусть $(\zeta, b) \in Y^n \times F_{nn}(n)$, $\pi_Y(\zeta, b) = y_0$ и $O(\zeta, b)$ — окрестность (ζ, b) в $Y^n \times F_{nn}(n)$. Возьмем $(\xi, b) \in X^n \times F_{nn}(n)$ так, чтобы $f^n \times \mathrm{id}(\xi, b) = (\zeta, b)$ и $(\xi, b) \in \Pi_n(X)$ (т. е. $\xi : n \to X$ — вложение). Пусть $x_0 = \pi_X(\xi, b) \in F_n(X)$. Тогда $F_n(f)(x_0) = y_0$. Наконец, фиксируем окрестность $O(\xi, b) \subset \Pi_n(X) \subset$

$X^n \times F_{nn}(n)$ такую, что $(f^n \times \mathrm{id})(O(\xi, b)) \subset O(\zeta, b)$. Так как π_X открыто на $\Pi_n(X)$ (а $\Pi_n(X)$ открыто в $X^n \times F_{nn}(n)$), получаем $\pi_X(O(\xi, b)) = O_{F_n(X)}(x_0)$. По условию

$$y_0 \in \langle F_n(f)(O_{F_n(X)}(x_0))\rangle_{F_n(Y)} = \langle F_n(f)(\pi_X(O(\xi, b)))\rangle_{F_n(Y)}$$
$$= \langle(\pi_Y \circ (f^n \times \mathrm{id})(O(\xi, b)))\rangle_{F_n(Y)} \subset \langle \pi_Y(O(\zeta, b))\rangle_{F_n(Y)},$$

что и требовалось, так как теперь выполняется условие 1.

Замечание. В доказательстве второй части теоремы 2 используется открытость $F_n(f)$ только в точках $F_{nn}(X) \cap (F_n(f))^{-1}(y_0)$, поэтому в формулировке тоже можно ограничиться только такими точками.

Условие $(*)$ делает естественным выделение случая $n = 2$.

Теорема 3. *Если F обладает свойством O_2, то F_2 совпадает с $\exp_2$ или с функтором $(\cdot)^2$ возведения в квадрат (т. е. существует естественное преобразование F_2 в один из этих функторов, состоящее из гомеоморфизмов).*

Доказательство. Заметим, что

1) в силу $(**)$ получается $|F_{nn}(n)| \le |S_n|$ (S_n — симметрическая группа степени n); при $n = 2$ имеем $|F_{22}(2)| \le |S_2| = 2$;

2) при $n = 2$ условие $(*)$ удовлетворяется автоматически и не играет никакой роли при рассмотрении F_2;

3) $\exp_2$ и $(\cdot)^2$ обладают свойством O_2 (см. $(**)$).

Случай 1. Пусть $|F_{22}(2)| = 1$. Построим естественное преобразование $\Phi : F_2 \to \exp_2$. Пусть $X \in \mathrm{Comp}$ — произвольный компакт. Имеем $F_2(X) = X \cup F_{22}(X)$. Если $\chi \in F_{22}(X)$ и $\{x_1, x_2\} = \operatorname{supp}\chi$, то в определении $\Phi_X : F_2(X) \to \exp_2(X)$ полагаем $\Phi_X(\chi) = \{x_1, x_2\}$. На X отображение Φ_X по определению действует как id_X. Пусть, далее, $p_X : X^2 \times F_{22}(2) \to \exp_2 X$ — обычное отображение игнорирования порядка. Получаем, что $p_X = \Phi_X \circ \pi_X$. Так как Φ_X биективно, p_X непрерывно и π_X факторно, доказано, что Φ_X — гомеоморфизм. Пусть теперь $X, Y \in \mathrm{Comp}$ и $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Следует установить коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F_2(X) & \xrightarrow{\Phi_X} & \exp_2 X \\ {\scriptstyle F_2(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp_2 f} \\ F_2(Y) & \xrightarrow{\Phi_Y} & \exp_2 Y\ . \end{array}$$

В самом деле, пусть $\chi \in F_2(X)$. Возьмем элемент $(\xi, a) \in X^2 \times F_{22}(2)$ так, что $\pi_X(\xi, a) = \chi$. Тогда

$$(\exp_2 f \circ \Phi_X)(\chi) = (\exp_2 f \circ \Phi_X)(\pi_X(\xi, a)) = (\exp_2 f \circ (\Phi_X \circ \pi_X))(\xi, a)$$
$$= (\exp_2 f \circ p_X)(\xi, a) = (p_Y \circ (f^2 \times \mathrm{id}))(\xi, a) = ((\Phi_Y \circ \pi_Y) \circ (f^2 \times \mathrm{id}))(\xi, a)$$
$$= (\Phi_Y \circ (F_2(f) \circ \pi_X)(\xi, a) = (\Phi_Y \circ F_2(f)) \circ \pi_X(\xi, a) = (\Phi_Y \circ F_2(f))(\chi),$$

что и требовалось.

Случай 2. Пусть $|F_{22}(2)| = 2$, т. е. $F_{22}(2) = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$. Рассмотрим произвольный $X \in \mathrm{Comp}$. Легко видеть, что для любых $\xi, \zeta \in X^2$ имеет место эквивалентность $F(\xi)(\varepsilon_i) = F(\zeta)(\varepsilon_j) \Longleftrightarrow \xi = \zeta \circ f^{j-i}$, где $f \in S_2$ и $f(0) = 1, f(1) = 0$.

Теперь определим отображение $\Phi_X : F_2(X) \to X^2$. Для любого $\chi \in F_2(X)$ полагаем $\Phi_X(\chi) = \xi \circ f^i$, если $\chi = \pi_X(\xi, \varepsilon_i)$. Определение корректно, поскольку если $\chi = \pi_X(\zeta, \varepsilon_j)$, то $\pi_X(\xi, \varepsilon_i) = \pi_X(\zeta, \varepsilon_j)$, откуда $F(\xi)(\varepsilon_i) = F(\zeta)(\varepsilon_j)$ и $\xi = \zeta \circ f^{j-i}$, что влечет $\xi \circ f^i = \zeta \circ f^{j-i} \circ f^i = \zeta \circ f^j$. Отображение $p_X : X^2 \times F_{22}(2) \to X^2$ определяем следующим образом: $p_X(\xi, \varepsilon_i) = \xi \circ f^i$. Ясно, что p_X непрерывно и $p_X = \Phi_X \circ \pi_X$, откуда следует сюръективность Φ_X. Покажем, что Φ_X инъективно. В самом деле, пусть $\Phi_X(\xi) = \Phi_X(\psi)$. Найдем $(\xi, \varepsilon_i), (\zeta, \varepsilon_j) \in X^2 \times F_{22}(2)$ такие, что $\pi_X(\xi, \varepsilon_i) = \chi$, $\pi_X(\zeta, \varepsilon_j) = \psi$. Тогда $\xi \circ f^i = \zeta \circ f^j$ и $\xi = \zeta \circ f^{j-i}$, откуда $F(\xi)(\varepsilon_i) = F(\zeta)(\varepsilon_j)$, т. е. $\chi = \psi$. Аналогично случаю 1 доказываются гомеоморфность Φ_X и естественность Φ.

Теорема 4. *Пусть F — функтор степени 2, сохраняющий вес, и $F(D^{\omega_1}) \sim D^{\omega_1}$. Тогда F представляет собой $\exp_2$ или $(\cdot)^2$.*

Доказательство. Разложим D^{ω_1} в σ-спектр из метризуемых компактов без изолированных точек с открытыми проекциями «на» (бесконечно-кратными — их можно считать гомеоморфными проектированию $p : D^{\omega_0} \times D^{\omega_0} \to D^{\omega_0}$). Имеем $D^{\omega_1} = \lim S$, где $S = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$. Тогда $F(D^{\omega_1}) = F(\lim S) = \lim F(S)$ и $F(S)$ также σ-спектр. В силу спектральной теоремы о гомеоморфизме [3] найдется открытое отображение $F(\pi_\alpha^\beta) : F(X_\beta) \to F(X_\alpha)$, откуда F обладает свойством O_2 (теорема 2). По теореме 3 функтор F совпадает с $\exp_2$ или $(\cdot)^2$, что и требовалось доказать.

Пример 1. 1. Функтор exp обладает свойством O_n для любого натурального n ($n \geq 2$), так как он, очевидно, удовлетворяет условиям $(*)$ и $(**)$ для любого n.

Пример 2. Пусть $n \geq 2$ — произвольное натуральное число, S_n — симметрическая группа на n элементах и H — произвольная подгруппа S_n. Пусть, далее, $X \in \mathrm{Comp}$ и $a, b \in X^n$. По определению $a \overset{H}{\sim} b$, если существует $h \in H$ такой, что $a = b \circ h$. Ясно, что $\overset{H}{\sim}$ является отношением эквивалентности, и под $F_H(X)$ будем понимать пространство $X^n / \overset{H}{\sim}$ с фактор-топологией. Элементы $F_H(X)$ будем обозначать через $a \circ H$, где $a \in X^n$. Если $X, Y \in \mathrm{Comp}$ и $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, то $F_H(f) : F_H(X) \to F_H(Y)$ определяем следующим образом: любому $a \circ H \in F_H(X)$ поставим в соответствие $(f \circ a) \circ H \in F_H(Y)$, т. е. $F_H(f)(a \circ H) = (f \circ a) \circ H$. Это завершает определение ковариантного функтора $F_H : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$. Заметим, что если $H = S_n$, то функтор F_H представляет собой хорошо известный функтор SP^n (см., например, [3, 4]). Функтор F_H нормален, т. е., помимо свойств 1–4 полунормальности, он эпиморфен, сохраняет прообразы и вес; в случае $H = \{e\}$ функтор F_H совпадает с функтором $(\cdot)^n$ возведения в n-ю степень. Кроме того, F_H открыт (если $f : X \to Y$ открыто, то и $F_H(f) : F_H(X) \to F_H(Y)$ открыто для любых $X, Y \in \mathrm{Comp}$ и непрерывного отображения $f : X \to Y$). Отсюда следует, что для любого натурального $n \geq 2$ и любой подгруппы H группы S_n функтор F_H обладает свойством O_n.

Рассмотрим подробнее функтор F_{S_3}. Как показано выше, F_{S_3} обладает свойством O_3. Сейчас мы увидим, что F_{S_3} обладает также свойством O_2. При этом он не совпадает с $\exp_3$ (например, $\exp_3$ не открыт). Для проверки O_2 достаточно установить, что F_{S_3} удовлетворяет условию $(**)$ (сейчас $n = 2$). Для краткости обозначение F_{S_3} сократим до F. Итак, пусть $a, b \in F_{22}(2)$, т. е. $a = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \circ S_3$ и $b = (\delta_0, \delta_1, \delta_2) \circ S_3$, где ε_i и δ_i либо 0, либо 1. Если a и b имеют одинаковое количество нулей, то просто $a = b$, потому что найдется

$h \in S_3$, для которого $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\delta_0, \delta_1, \delta_2) \circ h$. Если же a содержит, скажем, два нуля и одну единицу, а b — наоборот, то для $\varphi \in S_2, \varphi \neq e$ получим

$$F(\varphi)(a) = F(\varphi)((\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \circ S_3) = (\varphi \circ (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)) \circ S_3 = (\delta_0, \delta_1, \delta_2) \circ S_3 = b,$$

что и требовалось.

Функтор F_{S_4} обладает свойством O_4, но не O_2. Достаточно рассмотреть (F_{S_4} опять для краткости просто F) элементы $a = (0, 0, 0, 1) \circ S_4 \in F_{22}(2)$ и $b = (0, 0, 1, 1) \circ S_4 \in F_{22}(2)$. Не существует $\varphi \in S_2$, для которого $F(\varphi)(a) = b$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов А. В.* О функторах конечной степени и κ-метризуемых бикомпактах // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 60–68.
2. *Иванов А. В.* О степенных спектрах и композициях строго эпиморфных функторов // Труды ПетрГУ. Серия «Математика». 2000. Т. Вып. 7. С. 1–14.
3. *Щепин Е. В.* Топология предельных пространств несчетных обратных спектров // Успехи мат. наук. 1976. Т. 31, № 5. С. 191–226.
4. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 3. С. 3–62.
5. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
6. *Басманов В. Н.* Ковариантные функторы, ретракты и размерность // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271, № 5. С. 1033–1036.

Статья поступила 16 декабря 2004 г.

Иванов Александр Владимирович, Матюшичев Константин Викторович
Петрозаводский гос. университет, математический факультет,
пр. Ленина, 33, Петрозаводск 185640
ivanov@psu.karelia.ru, matush@psu.karelia.ru