Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 517.982.3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ, СОПРЯЖЕННЫХ К ПРОСТРАНСТВАМ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Абанин, И. А. Филипьев

Аннотация: С помощью преобразования Фурье — Лапласа функционалов дано описание пространств, сопряженных к пространствам функций, бесконечно дифференцируемых на выпуклых компактах или выпуклых областях в $\mathbb{R}^N$, рост производных которых задается весовыми последовательностями общего вида.

Ключевые слова: бесконечно дифференцируемая функция, сопряженное пространство, преобразование Фурье — Лапласа.

§ 1. Формулировка основного результата

Весовой функцией (или *весом*) будем называть любую неубывающую функцию $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, которая выпукла начиная с некоторого $t_0 \geq 0$ и удовлетворяет условиям:

1) $t = o(\varphi(t))$ при $t \to \infty$;
2) $\varphi(t) = O(e^t)$ при $t \to \infty$.

Класс всех весов обозначим через W.

Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^N$ с непустой внутренностью $\operatorname{int} K$, замыкание которой совпадает с K. Для каждого веса φ определим банахово пространство

$$\mathscr{E}_\varphi(K) := \left\{ f \in C^\infty(K) : |f|_{\varphi,K} := \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \sup_{x \in K} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{\exp \varphi^*(|\alpha|)} < \infty \right\}.$$

Здесь и далее мы используем следующие обозначения: $C^\infty(K)$ — множество всех функций, бесконечно дифференцируемых на компакте K; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $f^{(\alpha)}$ — производная от f, соответствующая мультииндексу $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$; $\varphi^*(s) := \sup\{rs - \varphi(r) : r \geq 0\}$ — монотонно сопряженная к φ функция.

Обозначим символом $\mathrm{W}_\uparrow$ (соответственно $\mathrm{W}_\downarrow$) совокупность всех последовательностей весовых функций $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, для которых при каждом $n \in \mathbb{N}$ имеется такое C_n, что при любом $t \geq 0$

$$\varphi_n(t) + t \leq \varphi_{n+1}(t) + C_n \quad (\text{соответственно } \varphi_{n+1}(t) + t \leq \varphi_n(t) + C_n). \tag{1}$$

Для Φ из $\mathrm{W}_\uparrow$ (из $\mathrm{W}_\downarrow$) и компакта K в $\mathbb{R}^N$ естественно образовать пространство

$$\mathscr{E}_{(\Phi)}(K) := \bigcap_{n=1}^\infty \mathscr{E}_{\varphi_n}(K) \quad \Big(\text{соответственно } \mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K) := \bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{E}_{\varphi_n}(K)\Big).$$

Условимся не брать Φ в скобки и писать $\mathscr{E}_\Phi(K)$, если какое-либо утверждение касается обоих типов пространств $\mathscr{E}_{(\Phi)}(K)$ и $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$. Кроме того, всюду далее запись $K \Subset G$ подразумевает, что K — компакт в $\mathbb{R}^N$ с $\overline{\operatorname{int} K} = K$, лежащий в G. Для открытого в $\mathbb{R}^N$ множества G и последовательности Φ из $\mathrm{W}_\uparrow$ или из $\mathrm{W}_\downarrow$ определим пространство

$$\mathscr{E}_\Phi(G) := \{f \in C^\infty(G) : f|_K \in \mathscr{E}_\Phi(K) \text{ для любого } K \Subset G\}.$$

Введенные выше пространства будут рассматриваться нами со следующими локально выпуклыми топологиями: $\mathscr{E}_{(\Phi)}(K)$ и $\mathscr{E}_{(\Phi)}(G)$ наделяются топологиями, задаваемыми наборами норм $\{|\cdot|_{\varphi_n,K} : n \in \mathbb{N}\}$ и преднорм $\{|\cdot|_{\varphi_n,K} : n \in \mathbb{N}; K \Subset G\}$ соответственно. Пространство $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$ снабжается топологией внутреннего индуктивного предела последовательности банаховых пространств $\{\mathscr{E}_{\varphi_n}(K)\}_{n=1}^\infty$, а $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(G)$ — топологией проективного предела семейства локально выпуклых пространств $\{\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K) : K \Subset G\}$ относительно отображений сужения $\rho_K : f \in \mathscr{E}_{\{\Phi\}}(G) \mapsto f|_K \in \mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$.

Элементы пространства $\mathscr{E}_\Phi(\Omega)$, где Ω — компактное или открытое множество, будем называть Φ-*ультрадифференцируемыми функциями на* Ω.

В предельном случае, когда $\Phi = \{nt\}_{n=1}^\infty$, пространство $\mathscr{E}_{(\Phi)}(\Omega)$ — не что иное, как $C^\infty(\Omega)$ со стандартной топологией. По этой причине, а также по соображениям технического порядка мы потребовали, чтобы рассматриваемые весовые функции росли на бесконечности быстрее чем t. Частными случаями введенных пространств являются неквазианалитические и квазианалитические классы, изучавшиеся ранее в работах [1–11].

Цель настоящей работы — получить с помощью преобразования Фурье — Лапласа удобное для приложений описание пространств, сопряженных к пространствам Φ-ультрадифференцируемых на выпуклых компактах и областях в $\mathbb{R}^N$ функций. Результаты подобного рода начиная с теоремы Пэли — Винера — Шварца имеют существенное значение при исследовании ряда задач анализа, математической и теоретической физики (см., например, [12–17]). Чтобы сформулировать основную теорему статьи, нам необходимо ввести в рассмотрение еще несколько функциональных пространств.

Пусть φ — произвольный вес; K — компакт в $\mathbb{R}^N$ с опорной функцией $h_K(y) := \max\limits_{x \in K}\langle x, y\rangle$, где $y \in \mathbb{R}^N$, $\langle x, y\rangle := x_1y_1 + \dots + x_Ny_N$. Положим

$$\mathscr{H}_\varphi(K) := \left\{f \in H(\mathbb{C}^N) : \|f\|_{\varphi,K} := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(z)|}{\exp(h_K(\operatorname{Im} z) + \varphi(\ln^+ \|z\|))} < \infty\right\},$$

где $H(\mathbb{C}^N)$ — множество всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций; $\operatorname{Im} z := (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_N)$ и $\|z\| := \max\limits_{1 \le j \le N} |z_j|$ для $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$.

Пространство $\mathscr{H}_\varphi(K)$ мы будем рассматривать как нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_{\varphi,K}$, относительно которой оно является банаховым. Далее, для $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ из $\mathrm{W}_\uparrow$ (из $\mathrm{W}_\downarrow$) определим векторное пространство

$$\mathscr{H}_{(\Phi)}(K) := \bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{H}_{\varphi_n}(K) \quad \left(\text{соответственно } \mathscr{H}_{\{\Phi\}}(K) := \bigcap_{n=1}^\infty \mathscr{H}_{\varphi_n}(K)\right).$$

В случае, когда G — открытое множество в $\mathbb{R}^N$, а Φ — весовая последовательность из $\mathrm{W}_\uparrow$ или $\mathrm{W}_\downarrow$, положим

$$\mathscr{H}_\Phi(G) := \bigcup_{K \Subset G} \mathscr{H}_\Phi(K).$$

Пространство $\mathscr{H}_{(\Phi)}(K)$ наделим топологией внутреннего индуктивного предела последовательности банаховых пространств $\{\mathscr{H}_{\varphi_n}(K)\}_{n=1}^{\infty}$, пространство $\mathscr{H}_{\{\Phi\}}(K)$ — топологией, задаваемой набором норм $\{\|\cdot\|_{\varphi_n,K} : n \in \mathbb{N}\}$, а $\mathscr{H}_\Phi(G)$ — топологией внутреннего индуктивного предела семейства пространств $\{\mathscr{H}_\Phi(K) : K \Subset G\}$. Условимся еще обозначать символом $\mathscr{X}'_b$ сильное сопряженное к локально выпуклому пространству $\mathscr{X}$. Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть Ω — выпуклый компакт с непустой внутренностью или выпуклая область в $\mathbb{R}^N$; Φ — весовая последовательность из $\mathrm{W}_\uparrow$ или $\mathrm{W}_\downarrow$. Тогда преобразование Фурье — Лапласа функционалов*

$$\mathscr{F} : \nu \mapsto \hat{\nu}(\zeta) := \nu(e^{-i\langle\zeta,x\rangle})$$

устанавливает топологический изоморфизм между $(\mathscr{E}_\Phi(\Omega))'_b$ и $\mathscr{H}_\Phi(\Omega)$.

Теорема 1 содержит результаты подобного ей характера, установленные ранее в [1, 3, 5–8, 10] для пространств, которые могут быть определены с помощью последовательностей Φ, задаваемых одним весом φ. Более того, даже для таких простейших последовательностей она снимает ряд ограничений, которые налагались на φ в перечисленных работах. Так, в [3], как отмечено самим автором, существенно использовалась так называемая сильная неквазианалитичность пространства. В [7, 8, 10] для пространств, задаваемых последовательностями $\Phi = \{\frac{1}{n}\varphi(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\Phi = \{n\varphi(x)\}_{n=1}^{\infty}$, от φ требовалось, чтобы $\varphi(x+1) = O(\varphi(x))$ при $x \to \infty$, причем в [10] дополнительно предполагалось, что $\varphi(x) = o(e^x)$ при $x \to \infty$. Что касается весовых последовательностей общего вида, то в [9] анонсирован аналогичный теореме 1 результат в неквазианалитическом случае и при более жестких ограничениях на веса. Попутно отметим, что в [9] было пропущено условие, обеспечивающее наличие структуры кольца у соответствующих пространств пробных функций, без которой обозначенный там классический метод доказательства не работает. Основу доказательства теоремы 1 в настоящей работе составляет схема, предложенная Б. А. Тейлором в [18]. Ряд моментов, связанных с реализацией этой схемы в рассматриваемых здесь пространствах и особенно в случае $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(\Omega)$, имеет самостоятельное значение и может оказаться полезным для других пространств и задач.

§ 2. Вспомогательные результаты

В этом параграфе собраны вспомогательные результаты, касающиеся свойств весов, экспонент и целых функций, которые будут использованы в доказательстве теоремы 1.

Обозначим через W_0 подкласс тех весов φ, которые выпуклы на всем луче $[0, \infty)$ и нормированы условием $\varphi(0) = 0$. При рассмотрении всех вопросов, связанных с введенными выше пространствами, можно, не жертвуя общностью, ограничиться весами из W_0. В самом деле, по определению для произвольного веса φ имеется такое $t_0 \geq 0$, что φ выпукла на $[t_0, \infty)$. Тогда функция $\widetilde{\varphi}(t) := (\varphi(t) - \varphi(t_0))^+$ принадлежит W_0. При этом ясно, что пары однотипных банаховых пространств, введенных выше и задаваемых весами φ и $\widetilde{\varphi}$, совпадают как множества и топологически. Поэтому ниже мы проведем все рассуждения для веса φ из W_0. Условимся, что символ φ' обозначает правую производную выпуклой функции φ.

В силу условия 1 на вес φ (см. начало § 1) имеется такое $A = A(\varphi) > 0$, что при всех $t \geq 0$

$$\varphi(t) \leq Ae^t. \tag{2}$$

Поэтому для любого $s > 0$

$$\varphi^*(s) \ge \sup_{r\ge 0}\{rs - Ae^r\} = s\ln\frac{s}{eA}. \tag{3}$$

Отсюда, учитывая выпуклость φ^* и равенство $\varphi^*(0) = 0$, заключаем, что при всех $s > 0$

$$\varphi^{*\prime}(s) \ge \frac{\varphi^*(s)}{s} \ge \ln\frac{s}{eA}. \tag{4}$$

Докажем еще, что при любом $t \ge 0$

$$\varphi(\ln^+(t+1)) - \varphi(\ln^+ t) \le Ae^2. \tag{5}$$

Ясно, что при $t \in [0,1]$ имеет место неравенство

$$\varphi(\ln^+(t+1)) - \varphi(\ln^+ t) \le \varphi(\ln 2) \le 2A,$$

обеспечивающее справедливость (5) для $t \in [0,1]$.

Теперь рассмотрим $t \ge 1$. Так как всегда $r+e^{-r} \ge \ln(e^r+1)$, то, использовав неубывание и выпуклость функции φ, для всех $r \ge 0$ имеем

$$\varphi(\ln(e^r+1)) - \varphi(r) \le \varphi(r+e^{-r}) - \varphi(r) \le e^{-r}\varphi'(r+e^{-r}).$$

Еще раз воспользовавшись выпуклостью φ и условием (2), при тех же r получим

$$\varphi'(r+e^{-r}) \le \varphi(r+e^{-r}+1) - \varphi(r+e^{-r}) \le A\exp(r+e^{-r}+1).$$

Поэтому для всех $r \ge 0$

$$\varphi(\ln(e^r+1)) - \varphi(r) \le e^{-r}\varphi'(r+e^{-r}) \le e^{-r}A\exp(r+e^{-r}+1) \le Ae^2.$$

Это влечет (5) для $t \ge 1$ после замены e^r на t.

Нетрудно видеть, что при надлежащем увеличении постоянной A оценка (5) верна для любого веса φ, не обязательно принадлежащего W_0.

Лемма 1. *Пусть φ и ψ — два веса из W_0, для которых при некоторой постоянной $C > 0$ верно условие*

$$\psi(t) + t \le \varphi(t) + C, \quad t \ge 0. \tag{6}$$

Тогда для всех $s > 0$ справедливы оценки

$$\varphi^*(s+1) \le \psi^*(s) + C \quad \text{и} \quad \varphi^*(s) - \psi^*(s) \le -\ln s + \ln Ae^{C+1}, \tag{7}$$

где $A = A(\varphi)$ определено выше.

Доказательство. Из (6) следует, что для любого $s \ge 0$

$$\varphi^*(s+1) = \sup_{r\ge 0}\{r(s+1) - \varphi(r)\} \le \sup_{r\ge 0}\{rs - \psi(r)\} + C = \psi^*(s) + C,$$

и, значит, первая оценка в (7) верна. Далее, учитывая предыдущее неравенство, выпуклость φ^* и (4), имеем при всех $s > 0$

$$\psi^*(s) - \varphi^*(s) \ge \varphi^*(s+1) - \varphi^*(s) - C \ge \varphi^{*\prime}(s) - C \ge \ln\frac{s}{eA} - C.$$

Это и есть вторая оценка в (7). Лемма доказана.

Пусть α, β и ψ_n $(n = 1, 2, \dots)$ — заданные на $[0,\infty)$ вещественнозначные функции, $\Psi := \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Будем писать $\alpha \le \beta$ или $\alpha \lll \beta$ в случае, когда $\alpha(t) \le \beta(t)$ при всех $t \in [0,\infty)$ или соответственно $\beta(t) - \alpha(t) \to +\infty$ при $t \to \infty$. Запись $\alpha \lll \Psi$ будем использовать, если $\alpha \lll \psi_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 2. *Пусть $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность неубывающих выпуклых на $[0,\infty)$ функций, причем $t = o(\psi_n(t))$ при $t \to \infty$ и $\psi_{n+1} \lll \psi_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольной локально ограниченной сверху на $[0,\infty)$ функции $\alpha \lll \Psi$ имеется такая неубывающая выпуклая на $[0,\infty)$ функция ψ, что $\alpha \le \psi \lll \Psi$ и $t = o(\psi(t))$ при $t \to \infty$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что так как $t = o(\psi_n(t))$ при $t \to \infty$, то $\psi_n'(t) \to +\infty$ при $t \to \infty$ (как и выше, под ψ_n' мы понимаем правую производную функции ψ_n). Отсюда следует, в частности, что график каждой функции ψ_n лежит выше любой прямой начиная с некоторого места.

Образуем две возрастающие последовательности $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ по следующему правилу. Положим $r_0 = t_0 = 0$ и допустим, что $\{t_j\}_{j=0}^{n-1}$ и $\{r_j\}_{j=0}^{n-1}$ уже выбраны. Возьмем $t_n \in [r_{n-1}+1,\infty)$ настолько большим, чтобы $\psi_n'(t_n) > n$ и $\psi_n(t) > \psi_{n+1}(t) \ge \alpha(t)$ при $t \ge t_n$. Последнее возможно, так как по условию $\alpha \lll \psi_{n+1} \lll \psi_n$. Проведем через точку $(t_n, \psi_n(t_n))$ правую касательную κ_n к графику ψ_n, являющуюся графиком функции

$$\beta_n(t) := \psi_n(t) + \psi_n'(t_n)(t - t_n), \quad t \ge t_n.$$

В качестве r_n выбираем первую точку, лежащую правее t_n, в которой κ_n пересекает график функции ψ_{n+1}.

Положим $C := \max\limits_{t\in[0,t_1]}\{\alpha(t)\}$ и рассмотрим функцию

$$\psi(t) := C + \begin{cases} \psi_1(t_1), & t \in [0,t_1), \\ \beta_n(t), & t \in [t_n, r_n), \\ \psi_{n+1}(t), & t \in [r_n, t_{n+1}). \end{cases}$$

По построению $\beta_n'(t_n) = \psi_n'(t_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, из выпуклости ψ_{n+1}, линейности β_n и соотношений $\beta_n(t_n) = \psi_n(t_n) > \psi_{n+1}(t_n)$ и $\beta_n(r_n) = \psi_{n+1}(r_n)$ следует, что

$$\beta_n'(r_n) = \frac{\beta_n(r_n) - \beta_n(t_n)}{r_n - t_n} < \frac{\psi_{n+1}(r_n) - \psi_{n+1}(t_n)}{r_n - t_n} \le \psi_{n+1}'(r_n).$$

Отсюда, учитывая еще то, что $\psi_1'(t_1) > 0$, заключаем, что ψ выпукла и не убывает на $[0,\infty)$. Далее, в силу выбора t_n и r_n при $t \in [t_n, t_{n+1})$ имеют место неравенства

$$\alpha(t) \le \psi_{n+1}(t) + C \le \psi(t) \le \psi_n(t) + C.$$

Поэтому $\alpha \le \psi \lll \Phi$. Условие $t = o(\psi(t))$ при $t \to \infty$ вытекает из того, что $\psi'(t_n) = \psi_n'(t_n) \to +\infty$ при $n \to \infty$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\varphi \in \mathrm{W}_0$. Тогда для любого $\zeta \in \mathbb{C}^N$ экспонента $e^{-i\langle\zeta,x\rangle}$ содержится в $\mathscr{E}_\varphi(K)$, причем*

$$\frac{1}{1+\|\zeta\|} e^{h_K(\operatorname{Im} z)+\varphi(\ln^+\|\zeta\|)} \le |e^{-i\langle\zeta,x\rangle}|_{\varphi,K} \le e^{h_K(\operatorname{Im} z)+\varphi(\ln^+\|\zeta\|)},$$

и, кроме того, ее степенное разложение

$$e^{-i\langle\zeta,x\rangle} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \frac{(-i)^{|\alpha|}\zeta^\alpha}{\alpha!} x^\alpha$$

сходится в $\mathscr{E}_\varphi(K)$ *абсолютно и равномерно на компактах в* $\mathbb{C}^N$.

Доказательство. Действительно, при любом $\zeta \in \mathbb{C}^N$

$$|e^{-i\langle\zeta,x\rangle}|_{\varphi,K} = \exp(h_K(\operatorname{Im} z) + \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}\{|\alpha|\ln^+\|\zeta\| - \varphi^*(|\alpha|)\}).$$

Остается применить неравенство

$$\varphi(\ln^+\|\zeta\|) - \ln(1+\|\zeta\|) \le \varphi^{**}(\ln^+\|\zeta\|) - \ln^+\|\zeta\| \\ \le \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}\{|\alpha|\ln^+\|\zeta\| - \varphi^*(|\alpha|)\} \le \varphi(\ln^+\|\zeta\|),$$

справедливое при всех $\zeta \in \mathbb{C}^N$, чтобы получить оценку, приведенную в формулировке леммы.

Докажем вторую часть леммы. Из неравенства (3) следует, что при некотором $B > 1$ и всех $s \ge 0$ верна оценка $e^{\varphi^*(s)} \ge B^{-s}s!$. Поэтому, положив $D := \max\{B, \max_{x\in K}\|x\|\}$, при всех $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ имеем

$$\left|\frac{x^\alpha}{\alpha!}\right|_{\varphi,K} = \sup_{\beta\le\alpha}\sup_{x\in K}\frac{|x^{\alpha-\beta}|}{(\alpha-\beta)!}\frac{1}{e^{\varphi^*(|\beta|)}} \le \sup_{\beta\le\alpha}\frac{D^{|\alpha|-|\beta|}}{(\alpha-\beta)!}\frac{D^{|\beta|}}{|\beta|!} \le \frac{(2D)^{|\alpha|}}{\alpha!}.$$

Отсюда в силу того, что пространство $\mathscr{E}_\varphi(K)$ банахово, и того, что его топология мажорирует топологию поточечной сходимости, получаем нужное.

Следующие два результата касаются продолжения целых функций и представления Гефера с ограничениями роста.

Для веса φ и числа $m \in \mathbb{N}_0$ обозначим через $\mathscr{A}_{\varphi,m}(K)$ линейное пространство всех целых в $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ функций $G(z,\zeta)$, удовлетворяющих при некотором $C = C(G) > 0$ оценке

$$|G(z,\zeta)| \le C(1+\|z\|)^m e^{h_K(\operatorname{Im} z)+\varphi(\ln^+\|\zeta\|)}, \quad z,\zeta \in \mathbb{C}^N.$$

Для последовательности весов $\Phi := \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ из $\mathrm{W}_\uparrow$ (из $\mathrm{W}_\downarrow$) положим

$$\mathscr{A}_{(\Phi)}(K) := \bigcup_{m=0}^\infty\bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{A}_{\varphi_n,m}(K) \quad (\text{соответственно } \mathscr{A}_{\{\Phi\}}(K) := \bigcup_{m=0}^\infty\bigcap_{n=1}^\infty \mathscr{A}_{\varphi_n,m}(K)).$$

Как и прежде, будем опускать скобки и писать $\mathscr{A}_\Phi(K)$, если утверждение касается как $\mathscr{A}_{(\Phi)}(K)$, так и $\mathscr{A}_{\{\Phi\}}(K)$.

Лемма 4. *Пусть* Φ *— весовая последовательность из* $\mathrm{W}_\uparrow$ *или из* $\mathrm{W}_\downarrow$. *Тогда для любой функции* $g \in \mathscr{H}_\Phi(K)$ *найдется функция* $G \in \mathscr{A}_\Phi(K)$, *для которой* $G(z,z) = g(z)$ *всюду в* $\mathbb{C}^N$.

Доказательство. Будем считать, не ограничивая общности, что все функции φ_n принадлежат W_0. Отметим, что по определению $\mathrm{W}_\uparrow$ ($\mathrm{W}_\downarrow$) имеются такие $C_n > 0$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}^N$

$$\varphi_n(\ln^+\|z\|) + \ln(1+\|z\|) \le \varphi_{n+1}(\ln^+\|z\|) + C_n \\ (\text{соответственно } \varphi_{n+1}(\ln^+\|z\|) + \ln(1+\|z\|) \le \varphi_n(\ln^+\|z\|) + C_n). \tag{8}$$

В случае $\Phi \in \mathrm{W}_\uparrow$ утверждение леммы следует непосредственно из [19, теорема 4.4.3] и условий (5), (8).

Пусть теперь $\Phi \in \mathrm{W}_{\downarrow}$ и $g \in \mathscr{H}_{\{\Phi\}}(K)$. Тогда имеется такая положительная числовая последовательность $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$|g(z)| \le e^{h_K(\operatorname{Im} z)+\varphi_n(\ln^+\|z\|)+D_n}, \quad z \in \mathbb{C}^N.$$

Следовательно, при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha(t) := (\max_{\|z\|\le e^t}\{\ln|g(z)| - h_K(\operatorname{Im} z)\})^+ \le \varphi_n(t) + D_n, \quad t \ge 0.$$

Применив к α и Φ лемму 2, построим выпуклую неубывающую на $[0,\infty)$ функцию φ так, чтобы $\alpha \le \varphi \lll \Phi$. Ясно, что φ обладает свойством (5). Из условия $\alpha \le \varphi$ следует, что верно неравенство

$$|g(z)| \le e^{h_K(\operatorname{Im} z)+\varphi(\ln^+\|z\|)}, \quad z \in \mathbb{C}^N.$$

В соответствии с [19, теорема 4.4.3] существует целая в $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ функция $G(z,\zeta)$ с $G(z,z) = g(z)$ в $\mathbb{C}^N$, для которой всюду в $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ при некоторых постоянных $C_0 > 0$ и $m_0 \in \mathbb{N}$

$$|G(z,\zeta)| \le C_0(1+\|z\|+\|\zeta\|)^{m_0} e^{h_K(\operatorname{Im} z)+\varphi(\ln^+\|\zeta\|)}.$$

Из этой оценки, условия $\varphi \lll \Phi$ и неравенств (8) получаем, что G принадлежит $\mathscr{A}_{\{\Phi\}}(K)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть Φ — весовая последовательность из $\mathrm{W}_{\uparrow}$ или из $\mathrm{W}_{\downarrow}$. Тогда для любой функции G из $\mathscr{A}_{\Phi}(K)$, для которой $G(z,z) = 0$ в $\mathbb{C}^N$, найдутся функции $G_j \in \mathscr{A}_{\Phi}(K)$, $j = 1,\dots,N$, такие, что*

$$G(z,\zeta) = \sum_{j=1}^{N}(z_j - \zeta_j)G_j(z,\zeta), \quad z,\zeta \in \mathbb{C}^N.$$

Доказательство леммы проводится стандартно с помощью результатов Л. Хёрмандера [19, теорема 4.4.3] о продолжении из подпространства с ограничениями на рост (см. по этому поводу, например, [8, 20]). Отметим лишь, что в случае $\mathrm{W}_{\downarrow}$ нужно так же, как и в лемме 4, сначала воспользоваться леммой 2.

§ 3. Структурная теорема

Цель этого параграфа — получить представление линейных непрерывных функционалов из $(\mathscr{E}_{\Phi}(K))'$ рядами по системам линейных непрерывных функционалов на $C(K)$. Как обычно, через $C(K)$ обозначается пространство всех непрерывных на K функций с нормой $\|f\|_K := \sup_{x\in K}|f(x)|$.

Теорема 2. *Для каждого функционала $\nu \in (\mathscr{E}_{\Phi}(K))'$ найдется последовательность $\{\nu_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ линейных непрерывных функционалов на $C(K)$, которая представляет функционал ν в виде*

$$\nu(f) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}\nu_\alpha(f^{(\alpha)}), \quad f \in \mathscr{E}_{\Phi}(K), \tag{9}$$

и обладает следующим свойством: при некотором n в случае $\mathscr{E}_{(\Phi)}(K)$ (соответственно для любого n в случае $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$) найдется $L_n > 0$ такое, что для всех $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ имеют место оценки

$$|\nu_\alpha(f)| \le L_n \frac{\|f\|_K}{e^{\varphi_n^*(|\alpha|)}}, \quad f \in C(K). \tag{10}$$

Доказательство этой теоремы, которое мы проведем чуть позже, основано на изоморфном погружении $\mathscr{E}_\Phi(K)$ в более широкое пространство последовательностей непрерывных функций. Именно, по весу φ и компакту K определим банахово пространство

$$\mathscr{C}_\varphi(K) := \left\{ f = (f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \in (C(K))^{\mathbb{N}_0^N} : |f|_{\varphi,K} := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \sup_{x\in K} \frac{|f_\alpha(x)|}{\exp\varphi^*(|\alpha|)} < \infty \right\}.$$

Мы применяем одинаковые обозначения нормы в $\mathscr{C}_\varphi(K)$ и $\mathscr{E}_\varphi(K)$, поскольку всякий раз, когда они будут использоваться, будет ясно, о чем идет речь — о функции f или о последовательности $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$.

Для $\Phi := \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ из $\mathrm{W}_\uparrow$ (из $\mathrm{W}_\downarrow$) вводим пространство

$$\mathscr{C}_{(\Phi)}(K) := \bigcap_{n=1}^\infty \mathscr{C}_{\varphi_n}(K) \quad \left(\text{соответственно } \mathscr{C}_{\{\Phi\}}(K) := \bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{C}_{\varphi_n}(K)\right)$$

и наделяем его топологией, задаваемой набором норм $\{|\cdot|_{\varphi_n,K} : n\in\mathbb{N}\}$ (соответственно топологией внутреннего индуктивного предела последовательности банаховых пространств $\{\mathscr{C}_{\varphi_n}(K)\}_{n=1}^\infty$). Ясно, что $\mathscr{C}_{(\Phi)}(K)$ является пространством Фреше. Далее, в силу того, что топология $\mathscr{C}_{\{\Phi\}}(K)$ мажорирует топологию τ_0 поточечной сходимости по каждой координате f_α, которая задается набором преднорм $\{|f_\alpha(x)| : \alpha\in\mathbb{N}_0^N,\ x\in K\}$ и отделима, само $\mathscr{C}_{\{\Phi\}}(K)$ также отделимо. Поэтому как отделимый индуктивный предел последовательности нормированных пространств оно является (DF)-пространством (см. [21, теорема 9] или [22, теорема 25.16]). Кроме того, $\mathscr{C}_{\{\Phi\}}(K)$ является также регулярным внутренним индуктивным пределом, т. е. каждое ограниченное в $\mathscr{C}_{\{\Phi\}}(K)$ множество содержится и ограничено в некотором $\mathscr{C}_{\varphi_n}(K)$. В самом деле, для этого в соответствии с теоремой 1 из [23] достаточно проверить замкнутость в $\mathscr{C}_{\{\Phi\}}(K)$ единичных шаров

$$B_{\varphi_n}(K) := \{f\in\mathscr{C}_\Phi(K) : |f|_{\varphi_n,K} \le 1\} \quad (n=1,2,\dots),$$

что мы сейчас и сделаем. Пусть сеть $\{f^\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ элементов $f^\gamma = (f_\alpha^\gamma)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ из $B_{\varphi_n}(K)$ сходится к $f = (f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ в $\mathscr{C}_{\{\Phi\}}(K)$. Тогда, так как топология $\mathscr{C}_{\{\Phi\}}(K)$ мажорирует τ_0, то $f_\alpha^\gamma(x)\to f_\alpha(x)$ при любом $x\in K$ и каждом $\alpha\in\mathbb{N}_0^N$. Поэтому $|f|_{\varphi_n,K}\le 1$ и, значит, $f\in B_{\varphi_n}(K)$, что обеспечивает нужное.

Итак, $\mathscr{C}_{(\Phi)}(K)$ — пространство Фреше, а $\mathscr{C}_{\{\Phi\}}(K)$ является (DF)-пространством, представляющим собой регулярный внутренний индуктивный предел расширяющейся последовательности $\{\mathscr{C}_{\varphi_n}(K)\}_{n=1}^\infty$ банаховых пространств, фундаментальную систему ограниченных множеств которого образует последовательность шаров $\{nB_{\varphi_n}(K)\}_{n=1}^\infty$.

Приведем теперь некоторые топологические свойства определенных выше пространств Φ-ультрадифференцируемых на компакте K функций. При этом мы будем использовать без дополнительных ссылок некоторые понятия и результаты из обзора В. В. Жаринова [24].

Опираясь на теорему Арцела, нетрудно проверить (см., например, [2, предложение 2.2]), что если $\varphi \lll \psi$, то $\mathscr{E}_\psi(K)$ компактно вложено в $\mathscr{E}_\varphi(K)$. Поэтому для любой последовательности $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ весовых функций, для которой $\varphi_1 \lll \varphi_2 \lll \dots$ или $\varphi_1 \ggg \varphi_2 \ggg \dots$, операторы тождественного вложения $i_n^{n+1} : \mathscr{E}_{\varphi_{n+1}}(K)\to\mathscr{E}_{\varphi_n}(K)$ или соответственно $i_{n+1}^n : \mathscr{E}_{\varphi_n}(K)\to\mathscr{E}_{\varphi_{n+1}}(K)$ являются компактными при всех $n\in\mathbb{N}$. Тогда проективный спектр $\left(\mathscr{E}_{\varphi_n}(K); i_n^{n+1}\right)$ в первом случае и индуктивный $\left(\mathscr{E}_{\varphi_n}(K); i_{n+1}^n\right)$ во втором являются компактными, а их пределы $\operatorname*{proj}_n\left(\mathscr{E}_{\varphi_n}(K); i_n^{n+1}\right)$ и $\operatorname*{ind}_n\left(\mathscr{E}_{\varphi_n}(K); i_{n+1}^n\right)$ будут (FS)- или (DFS)-пространствами. Ясно, что эти пределы являются одной из возможных изоморфных реализаций пространств $\mathscr{E}_{(\Phi)}(K)$ и $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$. Таким образом, для Φ из $\mathrm{W}_\uparrow$ (из $\mathrm{W}_\downarrow$) пространство $\mathscr{E}_{(\Phi)}(K)$ (соответственно $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$) принадлежит классу (FS) (соответственно (DFS)).

Докажем еще одну вспомогательную лемму и перейдем к доказательству теоремы 2.

Лемма 6. *Отображение $T : \mathscr{E}_\Phi(K) \to \mathscr{C}_\Phi(K)$, $T(f) := (f^{(\alpha)})_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ устанавливает топологический изоморфизм между пространством $\mathscr{E}_\Phi(K)$ и пространством $T(\mathscr{E}_\Phi(K))$, наделенном топологией, индуцированной из $\mathscr{C}_\Phi(K)$.*

Доказательство. В случае $\Phi \in \mathrm{W}_\uparrow$ утверждение леммы тривиально, поскольку при всех $f \in \mathscr{E}_{(\Phi)}$

$$|T(f)|_{\varphi_n,K} = |f|_{\varphi_n,K}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

и $\{|\cdot|_{\varphi_n,K}, n \in \mathbb{N}\}$ — наборы преднорм, задающие топологии в $\mathscr{E}_{(\Phi)}(K)$ и $\mathscr{C}_{(\Phi)}(K)$.

Теперь рассмотрим $\Phi \in \mathrm{W}_\downarrow$. Из соотношения (11), которое имеет место и в этом случае, следует, что T действует непрерывно из $\mathscr{E}_{\varphi_n}(K)$ в $\mathscr{C}_{\varphi_n}(K)$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Поэтому T непрерывно отображает $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$ в $\mathscr{C}_{\{\Phi\}}(K)$. Возьмем произвольное ограниченное в $\mathscr{C}_{\{\Phi\}}(K)$ множество A. В соответствии с отмеченным выше найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $A \subset nB_{\varphi_n}(K)$ или, что то же самое, $|f|_{\varphi_n,K} \le n$ для всех $f \in A$. Снова применив (11), только в виде $|f|_{\varphi_n,K} = |T^{-1}(f)|_{\varphi_n,K}$, отсюда получаем, что множество $T^{-1}(A)$ ограничено в $\mathscr{E}_{\varphi_n}(K)$ и тем более в $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$.

Итак, получили, что T — линейное инъективное непрерывное отображение (DFS)-пространства $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$ в (DF)-пространство $\mathscr{C}_{\{\Phi\}}(K)$. При этом полный прообраз каждого ограниченного в $\mathscr{C}_{\{\Phi\}}(K)$ множества ограничен в $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$. Значит, для отображения T выполнены все предположения леммы из работы [25], в соответствии с которой T^{-1} — непрерывное отображение из $T(\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K))$ в $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$. Лемма доказана.

Отметим, что для использования леммы из [25] от $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$ достаточно было потребовать монтелевости, которой обладают все (DFS)-пространства.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\nu \in (\mathscr{E}_\Phi(K))'$. Тогда по лемме 6 линейный функционал $\nu \circ T^{-1} : T(\mathscr{E}_\Phi(K)) \to \mathbb{C}$ непрерывен. Поскольку $T(\mathscr{E}_\Phi(K))$ — подпространство $\mathscr{C}_\Phi(K)$, этот функционал можно непрерывно продолжить на все $\mathscr{C}_\Phi(K)$. Обозначим через $\tilde{\nu}$ одно из таких продолжений и определим последовательность функционалов

$$\nu_\alpha : C(K) \to \mathbb{C}, \nu_\alpha(f) := \tilde{\nu}\left(\left(f\delta_\beta^\alpha\right)_{\beta\in\mathbb{N}_0^N}\right),$$

где δ_β^α — функции, тождественно на K равные нулю при $\alpha \ne \beta$ и единице при $\alpha = \beta$. Так как $\tilde{\nu}$ непрерывен, то в случае $\mathscr{E}_{(\Phi)}(K)$ для некоторого, а в случае $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$ для каждого n найдется $L_n > 0$ такое, что при всех $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ и $f \in C(K)$

$$|\nu_\alpha(f)| = \left|\tilde{\nu}\left(\left(f\delta_\beta^\alpha\right)_{\beta\in\mathbb{N}_0^N}\right)\right| \le L_n\left|\left(f\delta_\beta^\alpha\right)_{\beta\in\mathbb{N}_0^N}\right|_{\varphi_n,K} = L_n\frac{\|f\|_K}{e^{\varphi_n^*(|\alpha|)}}.$$

Поэтому последовательность $\{\nu_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ состоит из непрерывных линейных функционалов на $C(K)$ и удовлетворяет (10). То, что она обеспечивает представление (9), легко следует из леммы 1, непрерывности функционала $\tilde{\nu}$ и определения сходящегося ряда. Теорема доказана.

§ 4. Доказательство основного результата

Параграф посвящен доказательству теоремы 1. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — весовая последовательность из $\mathrm{W}_{\uparrow}$ или $\mathrm{W}_{\downarrow}$; K — выпуклый компакт с непустой внутренностью в $\mathbb{R}^N$. В силу леммы 3 все экспоненты $e^{-i\langle\zeta,x\rangle}$ содержатся в $\mathscr{E}_\Phi(K)$, а их степенные разложения сходятся в $\mathscr{E}_\Phi(K)$ абсолютно и равномерно на компактах из $\mathbb{C}^N$. Поэтому преобразование Фурье — Лапласа $\hat{\nu}(\zeta) := \nu(e^{-i\langle\zeta,x\rangle})$ любого функционала ν из $(\mathscr{E}_\Phi(K))'$ является целой в $\mathbb{C}^N$ функцией. Оценка норм экспонент из леммы 3 с учетом того, что $\mathscr{E}_\Phi(K)$ — (FS)- или (DFS)-пространство, влечет, что оператор преобразования Фурье — Лапласа $\mathscr{F} : \nu \to \hat{\nu}$ действует непрерывно из $(\mathscr{E}_\Phi(K))'_b$ в $\mathscr{H}_\Phi(K)$. Обратное к $\mathscr{F}$ отображение, если оно существует, будет непрерывно по теореме об открытом отображении (Банаха для $\Phi \in \mathrm{W}_{\downarrow}$ и Гротендика для $\Phi \in \mathrm{W}_{\uparrow}$; см. [26, приложение 1]). Таким образом, для доказательства теоремы 1 в случае компакта нам остается лишь установить, что $\mathscr{F}$ биективно отображает $(\mathscr{E}_\Phi(K))'_b$ на $\mathscr{H}_\Phi(K)$.

В технической части наших рассуждений будем предполагать, не оговаривая этого дополнительно, что веса из Φ принадлежат W_0. Отметим также, что по мере возможности доказательство будет проводится сразу для двух типов пространств $\mathscr{E}_{(\Phi)}(K)$ и $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$.

Инъективность. Пусть $\nu \in (\mathscr{E}_\Phi(K))'$ и $\hat{\nu}(\zeta) \equiv 0$ в $\mathbb{C}^N$. По теореме 2 имеется такая последовательность функционалов $\{\nu_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ с оценками (10), что для ν справедливо представление (9).

Образуем функцию

$$G(z,\zeta) := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} (-i)^{|\alpha|}\zeta^\alpha \hat{\nu}_\alpha(z), \quad z,\zeta \in \mathbb{C}^N,$$

где $\hat{\nu}_\alpha(z) := \nu_\alpha(e^{-i\langle z,x\rangle})$. Нетрудно видеть, что $G(z,\zeta)$ корректно определена и принадлежит $\mathscr{A}_\Phi(K)$. Проверим это, к примеру, для Φ из $\mathrm{W}_{\downarrow}$.

Возьмем произвольное $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу (1) и леммы 1 имеется такая постоянная $A_k < \infty$, что

$$\varphi_k^*(s) \le -(N+1)\ln s + \varphi_{k+N+1}^*(s) + A_k \quad \text{при всех } s > 0.$$

Это обеспечивает сходимость ряда

$$\sum_\alpha \exp(\varphi_k^*(|\alpha|) - \varphi_{k+N+1}^*(|\alpha|)),$$

сумму которого мы обозначим через B_k. Использовав неравенство (10), справедливое в рассматриваемом случае для всех номеров, при любых $z,\zeta \in \mathbb{C}^N$ имеем

$$\begin{aligned} |G(z,\zeta)| &\le \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \|\zeta\|^{|\alpha|}|\hat{\nu}_\alpha(z)| \le L_k e^{h_K(\operatorname{Im} z)} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \|\zeta\|^{|\alpha|} e^{-\varphi_k^*(|\alpha|)} \\ &\le B_k L_k e^{h_K(\operatorname{Im} z)} \exp \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \{|\alpha| \ln^+ \|\zeta\| - \varphi_{k+N+1}^*(|\alpha|)\} \\ &\le B_k L_k e^{h_K(\operatorname{Im} z) + \varphi_{k+N+1}(\ln^+ \|\zeta\|)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $G \in \mathscr{A}_{\{\Phi\}}(K)$. Для Φ из $\mathrm{W}_{\uparrow}$ доказательство проводится аналогично.

Учитывая (9), замечаем, что $G(\zeta,\zeta)=\nu(e^{-i\langle\zeta,x\rangle})=0$. Таким образом, для функции $G(z,\zeta)$ выполнены условия леммы 5, применив которую, мы найдем такие целые в $\mathbb{C}^N\times\mathbb{C}^N$ функции $G_j(z,\zeta)$ из $\mathscr{A}_\Phi(K)$, что

$$G(z,\zeta)=i\sum_{j=1}^N(z_j-\zeta_j)G_j(z,\zeta),\quad z,\zeta\in\mathbb{C}^N.$$

Принадлежность всех G_j пространству $\mathscr{A}_\Phi(K)$ означает существование такого $m\in\mathbb{N}$, что для каждого $j=1,\dots,N$ справедлива оценка

$$|G_j(z,\zeta)|\le\widetilde{C}_n(1+\|z\|)^m e^{h_K(\operatorname{Im}z)+\varphi_n(\ln^+\|\zeta\|)},\quad z,\zeta\in\mathbb{C}^N, \tag{12}$$

где номер n можно брать произвольным в случае $\mathscr{A}_{\{\Phi\}}(K)$, а в случае $\mathscr{A}_{(\Phi)}(K)$ этот номер можно найти.

Разложим $G_j(z,\zeta)$ в ряд по степеням ζ:

$$G_j(z,\zeta)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}g_{j,\alpha}(z)\zeta^\alpha,\quad z,\zeta\in\mathbb{C}^N.$$

Функции $g_{j,\alpha}(z)$ являются целыми в $\mathbb{C}^N$, и для них в силу неравенств Коши для тейлоровских коэффициентов и (12) имеем оценки

$$\begin{aligned}|g_{j,\alpha}(z)|&\le r^{-|\alpha|}\max_{\|\zeta\|\le r}|G_j(z,\zeta)|\\&\le\widetilde{C}_n(1+\|z\|)^m e^{h_K(\operatorname{Im}z)}r^{-|\alpha|}e^{\varphi_n(\ln r)},\quad z\in\mathbb{C}^N,\ r\ge1.\end{aligned}$$

Перейдя здесь к инфимуму по $r\ge1$, получим, что при любых $\alpha\in\mathbb{N}_0^N$ и $j=1,\dots,N$

$$|g_{j,\alpha}(z)|\le\widetilde{C}_n(1+\|z\|)^m e^{h_K(\operatorname{Im}z)-\varphi_n^*(|\alpha|)},\quad z\in\mathbb{C}^N.$$

Из этих оценок по теореме Пэли — Винера — Шварца в ее топологической форме следует, что функции $(-i)^{|\alpha|}g_{j,\alpha}(z)$ являются преобразованиями Фурье — Лапласа линейных непрерывных на $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ функционалов $\chi_{j,\alpha}$ с носителями в K, для которых при любых $\alpha\in\mathbb{N}_0^N$ и $j=1,\dots,N$

$$|\chi_{j,\alpha}(F)|\le D_n e^{-\varphi_n^*(|\alpha|)}\max_{|\beta|\le l}\sup_{x\in K}|F^{(\beta)}(x)|,\quad F\in C^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{13}$$

где l зависит лишь от m, а постоянные D_n — от n и m (зависимость от K мы не отмечаем, так как компакт фиксирован).

Пусть e_j — j-й орт в $\mathbb{N}_0^N$, а ∂_j — операция дифференцирования распределений по x_j. Учитывая вышеизложенное, при всех $z,\zeta\in\mathbb{C}^N$ имеем

$$\begin{aligned}G(z,\zeta)&=i\sum_{j=1}^N(z_j-\zeta_j)\sum_{|\alpha|=0}^\infty g_{j,\alpha}(z)\zeta^\alpha\\&=\sum_{j=1}^N iz_jg_{j,0}(z)+\sum_{|\alpha|=1}^\infty\left(\sum_{j=1}^N iz_jg_{j,\alpha}(z)-\sum_{j:\alpha_j\ne0}ig_{j,\alpha-e_j}(z)\right)\zeta^\alpha\\&=\sum_{j=1}^N\widehat{\partial_j\chi}_{j,0}(z)+\sum_{|\alpha|=1}^\infty(-i)^{|\alpha|}\zeta^\alpha\left(\sum_{j=1}^N\widehat{\partial_j\chi}_{j,\alpha}(z)+\sum_{j:\alpha_j\ne0}\hat{\chi}_{j,\alpha-e_j}(z)\right).\end{aligned}$$

Сравнивая это разложение с тем, которое исходно задавало функцию $G(z,\zeta)$, приходим к выводу, что всюду в $\mathbb{C}^N$

$$\hat\nu_0(z)=\sum_{j=1}^N \widehat{\partial_j\chi_{j,0}}(z) \quad \text{и} \quad \hat\nu_\alpha(z)=\sum_{j=1}^N \widehat{\partial_j\chi_{j,\alpha}}(z)+\sum_{j:\alpha_j\neq 0}\hat\chi_{j,\alpha-e_j}(z) \quad \text{при } \alpha\neq 0.$$

Обозначим через ρ_K операцию сужения $f\mapsto f|_K$. Ясно, что $\mu_\alpha:=\nu_\alpha\circ\rho_K$ — линейные непрерывные функционалы на $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ и что $\hat\mu_\alpha=\hat\nu_\alpha$ при всех $\alpha\in\mathbb{N}_0^N$. Поэтому, учитывая инъективность на $(C^\infty(\mathbb{R}^N))'$ преобразования Фурье — Лапласа функционалов, заключаем, что

$$\mu_0=\sum_{j=1}^N \partial_j\chi_{j,0} \quad \text{и} \quad \mu_\alpha=\sum_{j=1}^N \partial_j\chi_{j,\alpha}+\sum_{j:\alpha_j\neq 0}\chi_{j,\alpha-e_j} \quad \text{при } \alpha\neq 0.$$

Отсюда, продолжив каждую функцию $f\in\mathscr{E}_\Phi(K)$ по теореме Уитни [27] до функции $F\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, за счет элементарных преобразований имеем

$$\begin{aligned}
\nu(f)&=\sum_{|\alpha|=0}^\infty \nu_\alpha(f^{(\alpha)})=\sum_{|\alpha|=0}^\infty \nu_\alpha(\rho_K(F^{(\alpha)}))=\sum_{|\alpha|=0}^\infty \mu_\alpha(f^{(\alpha)})\\
&=\sum_{j=1}^N \partial_j\chi_{j,0}(F)+\lim_{M\to\infty}\sum_{|\alpha|=1}^M\left(\sum_{j=1}^N \partial_j\chi_{j,\alpha}(F^{(\alpha)})+\sum_{j:\alpha_j\neq 0}\chi_{j,\alpha-e_j}(F^{(\alpha)})\right)\\
&=-\sum_{j=1}^N \chi_{j,0}(F^{(e_j)})+\lim_{M\to\infty}\sum_{|\alpha|=1}^M\left(-\sum_{j=1}^N \chi_{j,\alpha}(F^{(\alpha+e_j)})+\sum_{j:\alpha_j\neq 0}\chi_{j,\alpha-e_j}(F^{(\alpha)})\right)\\
&=-\lim_{M\to\infty}\sum_{|\alpha|=M}\sum_{j=1}^N \chi_{j,\alpha}(F^{(\alpha+e_j)}).
\end{aligned}$$

Докажем, что последний предел равен нулю. Установив это, мы получим, что $\nu(f)=0$ для любой функции f из $\mathscr{E}_\Phi(K)$, откуда будет следовать инъективность оператора $\mathscr{F}$. Доказательство требует раздельного рассмотрения случаев $\mathscr{E}_{(\Phi)}(K)$ и $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$. Мы ограничимся здесь случаем пространства $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$.

Возьмем произвольную функцию f из пространства $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$. Для нее существует $p\in\mathbb{N}$ такое, что $|f|_{\varphi_p,K}<\infty$. В силу условия (1) и леммы 1 имеются такие постоянные A_p и B_p, что при $s>0$

$$\varphi_p^*(s+l+1)\le\varphi_{p+l+1}^*(s)+A_p \text{ и } \varphi_{p+l+1}^*(s)-\varphi_{p+l+N+2}^*(s)\le-(N+1)\ln s+B_p.$$

Тогда, использовав оценку (13) для какого-либо продолжения $F\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ функции f при $n:=p+l+N+2$, при всех $M\in\mathbb{N}$ получим

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{|\alpha|=M}\sum_{j=1}^N \chi_{j,\alpha}(F^{(\alpha+e_j)})\right|\\
&\qquad\le D_{p+l+N+2}\sum_{|\alpha|=M}\sum_{j=1}^N e^{-\varphi^*_{p+l+N+2}(|\alpha|)}\max_{|\beta|\le l}\sup_{x\in K}|F^{(\alpha+e_j+\beta)}(x)|\\
&\qquad\le N(M+1)^N D_{p+l+N+2}e^{-\varphi^*_{p+l+N+2}(M)}e^{\varphi_p^*(M+l+1)}|f|_{\varphi_p,K}\\
&\qquad\qquad\le N(M+1)^N M^{-N-1}D_{p+l+N+2}e^{A_p+B_p}|f|_{\varphi_p,K}.
\end{aligned}$$

Поэтому исследуемый предел равен нулю, и тем самым доказательство инъективности $\mathscr{F} : (\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K))' \to \mathscr{H}_{\{\Phi\}}(K)$ завершено.

Сюръективность. Пусть $g \in \mathscr{H}_\Phi(K)$. По лемме 4 найдется такая функция G из $\mathscr{A}_\Phi(K)$, что $G(\zeta, \zeta) = g(\zeta)$ в $\mathbb{C}^N$. По определению $\mathscr{A}_\Phi(K)$ имеется $m \in \mathbb{N}$, при котором всюду в $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$

$$|G(z,\zeta)| \le C_n(1 + \|z\|)^m e^{h_K(\operatorname{Im} z) + \varphi_n(\ln^+ \|\zeta\|)},$$

где C_n — постоянная, а n таково, что $G \in \mathscr{A}_{\varphi_n, m}(K)$ (напомним, что для Φ из $\mathrm{W}_\uparrow$ такое n существует, а для $\Phi \in \mathrm{W}_\downarrow$ оно произвольно). Отсюда следует, что целые в $\mathbb{C}^N$ функции $g_\alpha(z)$, определяемые из разложения

$$G(z,\zeta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} g_\alpha(z)\zeta^\alpha, \quad z, \zeta \in \mathbb{C}^N,$$

при всех $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ и $z \in \mathbb{C}^N$ удовлетворяют оценкам

$$|g_\alpha(z)| \le C_n(1 + \|z\|)^m e^{h_K(\operatorname{Im} z)} \inf_{r \ge 1} r^{-|\alpha|} e^{\varphi_n(\ln r)} = C_n(1 + \|z\|)^m e^{h_K(\operatorname{Im} z) - \varphi_n^*(|\alpha|)}.$$

Тогда по теореме Пэли — Винера — Шварца найдутся такие линейные непрерывные на $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ функционалы μ_α, что $g_\alpha(z) = (-i)^{|\alpha|}\hat{\mu}_\alpha(z)$ в $\mathbb{C}^N$, при этом для всех $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$

$$|\mu_\alpha(F)| \le D_n e^{-\varphi_n^*(|\alpha|)} \max_{|\beta| \le l} \sup_{x \in K} |F^{(\beta)}(x)|, \quad F \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{14}$$

где D_n зависит от n и m, а l — лишь от m. В силу (14) на $C^\infty(K)$ корректно определены функционалы $\nu_\alpha(f) := \mu_\alpha(F^{(\alpha)})$, где функция f принадлежит $C^\infty(K)$, а F — ее произвольное C^∞-продолжение в $\mathbb{R}^N$. Кроме того, из (14) следует, что если $f \in \mathscr{E}_{\varphi_p}(K)$ при некотором $p \in \mathbb{N}$, то при каждом $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ справедливо неравенство

$$|\nu_\alpha(f)| = |\mu_\alpha(F^{(\alpha)})| \le D_n e^{\varphi_p^*(|\alpha| + l) - \varphi_n^*(|\alpha|)} |f|_{\varphi_p, K}. \tag{15}$$

Теперь нам так же, как и при доказательстве инъективности, приходится раздельно рассматривать случаи $\mathscr{E}_{(\Phi)}(K)$ и $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$, и мы снова ограничимся вторым из них. В силу (1) по лемме 1 для $p \in \mathbb{N}$ имеются такие A_p и B_p, что при любом $s > 0$

$$\varphi_p^*(s + l) \le \varphi_{p+l}^*(s) + A_p \quad \text{и} \quad \varphi_{p+l}^*(s) - \varphi_{p+l+N+1}^*(s) \le -(N+1)\ln s + B_p.$$

Тогда из (15) при $n := p + l + N + 1$ следует, что

$$|\nu_\alpha(f)| \le D_{p+l+N+1} e^{A_p + B_p} \frac{1}{|\alpha|^{N+1}} |f|_{\varphi_p, K}, \quad |\alpha| \ge 1.$$

Поэтому для любой функции $f \in \mathscr{E}_{\varphi_p}(K)$

$$\Big|\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \nu_\alpha(f)\Big| \le D_{p+l+N+1}\left(e^{\varphi_p^*(l)} + e^{A_p + B_p} \sum_{|\alpha| \ge 1} \frac{1}{|\alpha|^{N+1}}\right) |f|_{\varphi_p, K}.$$

Отсюда, учитывая произвольность p, заключаем, что ряд $\sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \nu_\alpha(f)$ определяет линейный непрерывный на $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K)$ функционал ν. Остается заметить, что при любом $\zeta \in \mathbb{C}^N$

$$\hat{\nu}(\zeta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \nu_\alpha(e^{-i\langle \zeta, x\rangle}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} (-i)^{|\alpha|} \zeta^\alpha \mu_\alpha(e^{-i\langle \zeta, x\rangle}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \zeta^\alpha g_\alpha(\zeta) = g(\zeta),$$

и сюръективность $\mathscr{F}:(\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K))'\to\mathscr{H}_{\{\Phi\}}(K)$ доказана.

Итак, для выпуклых компактов с непустой внутренностью справедливость теоремы 1 установлена.

Случай выпуклой области. Пусть теперь G — выпуклая область в $\mathbb{R}^N$. Так как система экспонент $\{e^{-i\langle\zeta,x\rangle}:\zeta\in\mathbb{C}^N\}$ полна в $\mathscr{E}_\Phi(K)$ для любого выпуклого компакта $K\Subset\mathbb{R}^N$, она полна и в $\mathscr{E}_\Phi(G)$. Отсюда, в частности, следует, что $\rho_K(\mathscr{E}_\Phi(G))$ — плотное подпространство в $\mathscr{E}_\Phi(K)$, $K\Subset G$ (как и выше, ρ_K — операция сужения $f\mapsto f|_K$). Поэтому для любого функционала $\mu\in(\mathscr{E}_\Phi(G))'$ имеются компакт $K\Subset G$ и единственный для этого K функционал $\nu\in(\mathscr{E}_\Phi(K))'$, для которого $\mu=\nu\circ\rho_K$, и, обратно, каждый функционал такого вида будет элементом $(\mathscr{E}_\Phi(G))'$. При этом $\hat\mu=\hat\nu$. Из сказанного с учетом теоремы 1 для компактов легко следует, что преобразование Фурье — Лапласа $\mathscr{F}$ устанавливает линейное взаимно однозначное соответствие между $(\mathscr{E}_\Phi(G))'$ и $\mathscr{H}_\Phi(G)$.

Таким образом, чтобы завершить доказательство теоремы 1, остается проверить, что оператор $\mathscr{F}:(\mathscr{E}_\Phi(G))'_b\to\mathscr{H}_\Phi(G)$ и обратный к нему непрерывны. Для этой цели нам потребуются топологические свойства пространств $(\mathscr{E}_\Phi(G))'_b$ и $\mathscr{H}_\Phi(G)$, к перечислению которых мы сейчас переходим.

Очевидно, что в определении пространств $\mathscr{E}_\Phi(G)$ и $\mathscr{H}_\Phi(G)$ можно ограничится произвольной последовательностью $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ выпуклых компактов с непустой внутренностью, исчерпывающих G изнутри, т. е. таких, что

$$K_n\Subset\operatorname{int}K_{n+1}\ (n\in\mathbb{N}),\qquad\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n=G.$$

Другими словами,

$$\mathscr{E}_\Phi(G)=\operatorname*{proj}_n(\mathscr{E}_\Phi(K_n),\rho_n),\quad\mathscr{H}_\Phi(G)=\operatorname*{ind}_n(\mathscr{H}_\Phi(K_n),i_n),$$

где ρ_n — операция сужения $f\mapsto f|_{K_n}$, а i_n — операция тождественного вложения. Из этого следует, что пространство $\mathscr{E}_{(\Phi)}(G)$ изоморфно проективному пределу последовательности (FS)-пространств $\{\mathscr{E}_{(\Phi)}(K_n)\}_{n=1}^\infty$. Поэтому $\mathscr{E}_{(\Phi)}(G)$ само является (FS)-пространством, а значит, $(\mathscr{E}_{(\Phi)}(G))'_b$ — это (DFS)-пространство. Далее, как отмечено выше, $\rho_m(\mathscr{E}_\Phi(G))$ плотно в $\mathscr{E}_\Phi(K_m)$ при любом $m\in\mathbb{N}$, и, следовательно, $\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(G)$ представляет собой приведенный проективный предел последовательности (DFS)-пространств $\{\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(K_n)\}_{n=1}^\infty$. Тогда, как известно (см., например, [28, теорема 3.5]), $(\mathscr{E}_{\{\Phi\}}(G))'_b$ представимо в виде индуктивного предела последовательности пространств Фреше. Ясно также, что оно отделимо. Таким образом, в любом случае $(\mathscr{E}_\Phi(G))'_b$ относится к классу пространств типа (β), т. е. отделимых индуктивных пределов пространств Фреше (см. [26, с. 229]).

Заметим, что

$$\mathscr{H}_{(\Phi)}(G)=\operatorname*{ind}_n\big(\mathscr{H}_{\varphi_n}(K_m),i_{n+1}^n\big),$$

где i_{n+1}^n — операция вложения $\mathscr{H}_{\varphi_n}(K_n)$ в $\mathscr{H}_{\varphi_{n+1}}(K_{n+1})$, т. е. $\mathscr{H}_{(\Phi)}(G)$ — внутренний индуктивный предел последовательности банаховых пространств. По определению $\mathscr{H}_{\{\Phi\}}(G)$ — внутренний индуктивный предел последовательности $\{\mathscr{H}_{\{\Phi\}}(K_n)\}_{n=1}^\infty$ пространств Фреше. Итак, для любой последовательности Φ из $\mathrm{W}_\uparrow\cup\mathrm{W}_\downarrow$ пространство $\mathscr{H}_\Phi(G)$ — внутренний индуктивный предел пространств Фреше. Очевидно, что оно отделимо и поэтому относится к классу (UF)-пространств (см. [26, с. 230]).

Теперь мы готовы к тому, чтобы завершить доказательство. По теореме 1 для компактов операторы $\mathscr{F}^{-1} : \mathscr{H}_\Phi(K_n) \to (\mathscr{E}_\Phi(K_n))'_b$ непрерывны при всех $n \in \mathbb{N}$. Учитывая еще непрерывность $\rho'_n : (\mathscr{E}_\Phi(K_n))'_b \to (\mathscr{E}_\Phi(G))'_b$ и критерий непрерывности оператора на индуктивном пределе, заключаем, что $\mathscr{F}^{-1}$ действует непрерывно из (UF)-пространства $\mathscr{H}_\Phi(G)$ на пространство типа (β) $(\mathscr{E}_\Phi(G))'_b$. Остается применить теорему Гротендика об открытом отображении [26, приложение 1, теорема 2], чтобы сделать вывод о непрерывности $\mathscr{F}$. Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Roumieu C.* Sur quelques extensions de la notion de distribution // Ann. Sci. École Norm. Sup. (3). 1960. T. 77, N 1. P. 41–121.

2. *Komatsu H.* Ultradistributions. I. Structure theorems and a characterization // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA. Math. 1973. V. 20, N 1. P. 25–105.

3. *Komatsu H.* Ultradistributions. II. The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math. 1977. V. 24, N 3. P. 607–628.

4. *Ciorânescu I., Zsidó L.* ω-Ultradistributions and their applications to operator theory // Spectral Theory. Warsaw: Banach Center Publ. 1982. V. 8. P. 77–220.

5. *Meise R., Taylor B. A.* Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type // Ark. Mat. 1988. V. 26, N 2. P. 265–287.

6. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results Math. 1990. V. 17. P. 206–237.

7. *Meyer T.* Surjectivity of convolution operators on spaces of ultradifferentiable functions of Roumieu type // Studia Math. 1997. V 125, N 2. P. 101–129.

8. *Rösner T.* Surjektivität partieller Differentialoperatoren auf quasianalytischen Roumieu-Klassen: Dissertation. Aachen: Shaker Verl., 1997.

9. *Абанин А. В., Тищенко Е. С.* Пространства ультрадифференцируемых функций и обобщение теоремы Пэли — Винера — Шварца // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 1997. № 2. С. 5–8.

10. *Heinrich T., Meise R.* A support theorem for quasianalytic functionals. Düsseldorf, 2003. (Preprint / Math. Institut).

11. *Beaugendre P.* Opérateurs linéaires continues d'extension dans des intersections de classes ultradifférentiables // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. 2004. P. 197–202.

12. *Владимиров В. С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.

13. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

14. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, вып. 1. С. 73–126.

15. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.

16. *Смирнов А. Г., Соловьев М. А.* Спектральные свойства виковых степенных рядов свободного поля с индефинитной метрикой // Теорет. и мат. физика. 2000. Т. 125, № 1. С. 57–73.

17. *Соловьев М. А.* Лоренц-ковариантные ультрараспределения, гиперфункции и аналитические функционалы // Теорет. и мат. физика. 2001. Т. 128, № 3. С. 492–514.

18. *Taylor B. A.* Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions // Comm. Pure Appl. Math. 1971. V. 24. P. 39–51.

19. *Хёрмандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1967.

20. *Мусин И. Х.* О преобразовании Фурье — Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 10. С. 83–108.

21. *Гротендик А.* О пространствах (F) и (DF) // Математика. 1958. Т. 2, № 3. С. 81–127.

22. *Meise R., Vogt D.* Einführung in die Funktionalanalysis. Braunschweig: Vieweg, 1992.

23. *Макаров Б. М.* Об индуктивных пределах нормированных пространств // Вестн. ЛГУ. 1965. Т. 20, № 13. С. 50–58.

24. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 4. С. 97–131.

25. *Baernstein II A.* Representation of holomorphic functions by boundary integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 160. P. 27–37.

26. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.

27. *Whitney H.* Analytic extension of differentiable functions defined in closed set // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V. 36. P. 63–89.

28. *Vogt D.* Topic on projective spectra of (LB)-spaces // Advances in the theory of Fréchet spaces. NATO ASI Ser. C. V. 287. Dordrecht: Kluwer, 1989. P. 11–27.

Статья поступила 16 апреля 2005 г.

Абанин Александр Васильевич, Филипьев Иван Анатольевич
Ростовский гос. университет, кафедра математического анализа,
ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону 344090
kaf_ma@math.rsu.ru