Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 517.956+517.968.2+517.984

О ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНО–НАГРУЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов

Аннотация: В четверти плоскости рассматриваются граничные задачи для нагруженного (одномерного по пространственной переменной) оператора теплопроводности. Особенностью рассматриваемого оператора является то, что, во-первых, спектральный параметр является коэффициентом при нагруженном слагаемом, во-вторых, порядок производной в нагруженном слагаемом равен порядку дифференциальной части оператора и, в-третьих, точка нагрузки движется с переменной скоростью. Показано, что рассматриваемая в работе граничная задача является нётеровой.

Ключевые слова: нагруженный оператор теплопроводности, граничная задача, сопряженный оператор, спектр, резольвентное множество, нётеров оператор, индекс оператора.

В работе рассматриваются граничные задачи для нагруженного (одномерного по пространственной переменной) оператора теплопроводности в четверти плоскости, относящегося к классу функционально-дифференциальных операторов и имеющего вид $Lu+\lambda Bu$, где L — дифференциальная, а B — нагруженная части. Особенностью рассматриваемого оператора является то, что, во-первых, спектральный параметр λ является коэффициентом при нагруженном слагаемом, во-вторых, порядок производной в нагруженном слагаемом равен порядку дифференциальной части оператора и, в-третьих, точка нагрузки, определяемая функцией $\bar{x}(t)$, движется с переменной скоростью, т. е. производная $\bar{x}'(t)$ не всегда равна константе. Кроме того, в обобщенной спектральной задаче $Lu + \lambda Bu = 0$, исследуемой в данной работе, оператор нагрузки B необратим (требование существования оператора B^{-1} обычно предполагается, см., например, [1, с. 520–523]). Такой оператор назван *спектрально-нагруженным.* В рассматриваемом случае в отличие от ранее изученных нагруженных дифференциальных уравнений [2–5] нагруженное слагаемое в уравнении не является слабым возмущением его дифференциальной части [6, 7]. Здесь проявляются новые свойства нагруженного дифференциального оператора, не присущие операторам со слабым возмущением. Показано, что рассматриваемая в работе граничная задача является нётеровой и для некоторых строго описанных в комплексной плоскости значений спектрального параметра λ она имеет конечный положительный индекс. Отметим также работу [8], посвященную решению граничной задачи для параболического уравнения, когда его нагруженная часть входит в коэффициент младшего слагаемого изучаемого уравнения.

Работа состоит из восьми пунктов и заключения. После постановок исследуемых задач (п. 1) дано сведе́ние исходных сопряженных граничных задач к изучению пары союзных интегральных уравнений типа Вольтерра (п. 2). Затем вводится пара союзных характеристических интегральных уравнений (п. 3) и дается их решение (п. 4). Далее решаются союзные интегральные уравнения типа Вольтерра методом регуляризации решением характеристических уравнений (п. 5) и исходные граничные задачи (п. 6). Наконец, спектральным задачам посвящены пп. 7, 8. В заключении приведен ряд задач, которые могут быть изучены по аналогичной схеме.

1. Постановки задач. Пусть $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$, $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$. Рассмотрим в области $Q = \{x \in \mathbb{R}_+,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ следующие граничные задачи (черточка над λ здесь и всюду далее означает знак комплексного сопряжения):

$$L_\lambda u = f \Leftrightarrow \begin{cases} u_t - u_{xx} + \lambda u_{xx}(x,t)|_{x=t^\omega} = f, \\ u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0; \end{cases} \tag{1}$$

$$L_\lambda^* v = g \Leftrightarrow \begin{cases} -v_t - v_{xx} + \bar\lambda \delta''(x - t^\omega) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)\,d\xi = g, \\ v(x,\infty) = 0, \quad v(0,t) = v(\infty,t) = v_x(\infty,t) = 0; \end{cases} \tag{2}$$

и следующие спектральные задачи:

$$L_1 u = -\lambda u_{xx}(x,t)|_{x=t^\omega} \Leftrightarrow \begin{cases} u_t - u_{xx} = -\lambda u_{xx}(x,t)|_{x=t^\omega}, \\ u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0; \end{cases} \tag{3}$$

$$L_1^* v = -\bar\lambda \delta''(x-t^\omega) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)\,d\xi \Leftrightarrow \begin{cases} -v_t - v_{xx} = -\bar\lambda \delta''(x - t^\omega) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)\,d\xi, \\ v(x,\infty) = 0, v(0,t) = v(\infty,t) = v_x(\infty,t) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} \omega > 1/2, \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ — спектральный параметр}, \\ t^{3/2-\omega} f \in M(Q), \quad t^{\omega-1}(x + \sqrt{t}) g \in L_1(Q), \end{gathered} \tag{5}$$

$$t^{3/2-\omega}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right)\Bigg|_{x=t^\omega} \in M(\mathbb{R}_+) \text{ — заданные функции},$$

$M(Q) = L_\infty(Q) \cap C(Q)$, $M(\mathbb{R}_+) = L_\infty(\mathbb{R}_+) \cap C(\mathbb{R}_+)$, $\delta(x - t) \in \mathscr{E}'(Q)$ — дельта-функция, сосредоточенная на открытой диагонали $x = t$ области Q, $\mathscr{E}'(Q)$ — пространство обобщенных функций с компактным носителем в области Q [9, с. 102–103, 108–109, 130; 10, с. 103; 11, с. 32, 43–45; 12, с. 61],

$$\operatorname{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^a \exp(-z^2)dz,$$

функция Грина $G(x,\xi,t-\tau)$ определена ниже формулой (12).

В задачах (1)–(4) предполагается, что движение точки нагрузки описывается функцией $\bar x(t) = t^\omega$, $\omega > 1/2$.

Замечание 1. Если функция f не зависит от x, то второе условие для функции f из (5) следует из первого: $t^{3/2-\omega} f \in M(Q)$.

Определим функциональные классы $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ для решений соответственно граничных задач (1) и (2), а также области $\mathscr{D}(L)$ и $\mathscr{D}(L^*)$ определения операторов L и L^* соответственно следующим образом:

$$\mathscr{U} = \{u \mid t^{1-\omega}(x+\sqrt{t})^{-1} u, t^{3/2-\omega}(u_t - u_{xx}) \in M(Q), t^{3/2-\omega} u_{xx}(x,t)|_{x=t^\omega} \in M(\mathbb{R}_+)\}, \tag{6}$$

$$\mathscr{V} = \left\{ v \mid t^{\omega-3/2}v,\ t^{\omega-1}(x+\sqrt{t})(v_t+v_{xx}) \in L_1(Q),\ t^{\omega-3/2}\int\limits_0^\infty v(\xi,t)\,d\xi \in L_1(\mathbb{R}_+) \right\}, \tag{7}$$

$$\mathscr{D}(L_\lambda) \equiv \mathscr{D}(L_1) = \{u \mid u \in \mathscr{U},\ u(x,0)=0,\ u(0,t)=0\}, \tag{8}$$

$$\mathscr{D}(L^*_\lambda) \equiv \mathscr{D}(L^*_1) = \{v \mid v \in \mathscr{V},\ v(x,\infty)=0,\ v(0,t)=0,\ v(\infty,t)=0,\ v_x(\infty,t)=0\}. \tag{9}$$

Граничная задача (1) является сопряженной к задаче (2). Действительно, согласно (1)–(9) имеем

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, L^*v\rangle \quad \forall u \in \mathscr{D}(L),\ \forall v \in \mathscr{D}(L^*). \tag{10}$$

Задача 1. *Требуется исследовать вопросы разрешимости граничных задач* (1) *и* (2) *при условиях* (5)–(9).

Задача 2. *Требуется исследовать спектральные задачи* (3) *и* (4) *поиска пар* $\{\lambda, u_\lambda(x,t)\}$ *и* $\{\lambda, v_\lambda(x,t)\}$ *при условиях* (6)–(9).

2. Свед́ение к интегральным уравнениям. Обращая дифференциальную часть в граничной задаче (1), будем иметь

$$u(x,t) = -\lambda\int\limits_0^t \mathscr{K}_0(x,t-\tau)u_{\eta\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=\tau^\omega}\,d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \tag{11}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right)\right\}, \tag{12}$$

$$\mathscr{K}_0(x,t-\tau) = \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right). \tag{13}$$

Дифференцируя (11) по x дважды и вводя обозначения

$$\mu(t) = t^{3/2-\omega}u_{xx}(x,t)|_{x=t^\omega}, \tag{14}$$

$$\mathscr{K}_2(t,\tau) = -\left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/2-\omega}\frac{\partial^2\mathscr{K}_0(x,t-\tau)}{\partial x^2}\Big|_{x=t^\omega} = \left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/2-\omega}\frac{t^\omega}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{t^{2\omega}}{4(t-\tau)}\right), \tag{15}$$

$$f_1(t) = t^{3/2-\omega}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right)\Bigg|_{x=t^\omega}, \tag{16}$$

из (11) получим интегральное уравнение

$$\mathbf{K}_{2\lambda}\mu \equiv (I-\lambda\mathbf{K}_2)\mu \equiv \mu(t) - \lambda\int\limits_0^t \mathscr{K}_2(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau = f_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{17}$$

Замечание 2. Ограниченность функции $f_1(t)$ (16) на $\mathbb{R}_+$ следует из условия (5) на f.

Отметим, что ядро $\mathscr{K}_2(t,\tau)$ обладает следующими свойствами:
1°) непрерывно при $0 < \tau < t < \infty$;
2°) $\mathscr{K}_2(t,\tau) \geq 0$, $0 < \tau < t < \infty$;
3°) $\lim\limits_{t\to+t_0} \int\limits_{t_0}^{t} \mathscr{K}_2(t,\tau)\,d\tau = 0$ для каждого $t_0 \geq \varepsilon > 0$;
4°) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t\to+0} \int\limits_0^t \mathscr{K}_2(t,\tau)\,d\tau = \lim_{t\to+0} \exp(-t^{2\omega-1}/4) = 1. \tag{18}$$

Из (18) следует, что норма интегрального оператора, действующего в пространстве ограниченных непрерывных функций и определяемого ядром $\mathscr{K}_2(t,\tau)$, равна единице (хотя ядро $\mathscr{K}_2(t,\tau)$ имеет интегрируемую особенность). Это принципиальным образом отличает уравнение (17) от уравнений Вольтерра второго рода, для которых, как известно, решение существует и единственно. В нашем случае решение соответствующего однородного уравнения:

$$\mathbf{K}_{2\lambda}\mu \equiv (I - \lambda \mathbf{K}_2)\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int\limits_0^t \mathscr{K}_2(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{19}$$

для некоторых значений $\lambda \in \mathbb{C}$ может быть и нетривиальным. Это будет показано ниже.

Обращая дифференциальную часть в задаче (2), как и в задаче (1), будем иметь

$$v(x,t) = -\bar{\lambda} \int\limits_t^\infty \int\limits_0^\infty G(x,\xi,\tau-t)\delta''(\xi-\tau^\omega) \otimes \int\limits_0^\infty v(\eta,\tau)\,d\eta d\xi d\tau \\ + \int\limits_t^\infty \int\limits_0^\infty G(x,\xi,\tau-t) g(\xi,\tau)\,d\xi d\tau. \tag{20}$$

Интегрируя соотношение (20) по переменной x от 0 до ∞ и обозначая

$$\nu(t) = (t)^{\omega-3/2} \int\limits_0^\infty v(\eta,t)d\eta, \tag{21}$$

получим интегральное уравнение

$$\mathbf{K}^*_{2\lambda}\nu \equiv (I - \bar{\lambda}\mathbf{K}^*_2)\nu \equiv \nu(t) - \bar{\lambda} \int\limits_t^\infty \mathscr{K}_2(\tau,t)\nu(\tau)\,d\tau = g_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{22}$$

где

$$\mathscr{K}_2(\tau,t) = -\left(\frac{\tau}{t}\right)^{3/2-\omega} \int\limits_0^\infty \delta''(\xi-\tau) \otimes \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau-t}}\right) d\xi \\ = \left(\frac{\tau}{t}\right)^{3/2-\omega} \frac{\tau^\omega}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}\right), \tag{23}$$

$$g_1(t) = (t)^{\omega-3/2} \int\limits_t^\infty \int\limits_0^\infty \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau - t}}\right) g(\xi, \tau)\, d\xi d\tau. \tag{24}$$

Замечание 3. Интегрируемость функции $g_1(t)$ (24) на $\mathbb{R}_+$ следует из условия (5) на g.

При получении уравнения (22) из (20) учтено следующее соотношение [10, с. 66; 13, с. 99–100]:

$$\delta'(\xi) \otimes \rho(\xi, \tau) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{\delta(\xi+\varepsilon)}{2\varepsilon} \otimes \rho(\xi, \tau) - \frac{\delta(\xi-\varepsilon)}{2\varepsilon} \otimes \rho(\xi, \tau)\right] \quad \text{в } \mathscr{E}'(Q). \tag{25}$$

Очевидно, что уравнение (22) является союзным интегральным уравнением для (17).

Таким образом, решение сопряженных граничных задач (1) и (2) сведено к исследованию пары союзных интегральных уравнений (17) и (22).

Дальнейшее исследование разрешимости граничных задач (1) и (2) проводится по следующей схеме:

1) выделение главной части ядра интегрального оператора из (17) и введение соответствующего этой главной части характеристического интегрального уравнения и его союзного;

2) изучение вопросов разрешимости характеристических интегральных уравнений;

3) исследование разрешимости интегральных уравнений (17) и (22) методом регуляризации решением характеристических интегральных уравнений [14];

4) исследование разрешимости граничных задач (1) и (2) (задача 1);

5) исследование спектральных задач (3) и (4) (задача 2).

3. Характеристические интегральные уравнения. Характеристическими интегральными уравнениями для (17) и (22) будет следующая пара союзных уравнений:

$$\mathbf{K}_\lambda \mu \equiv (I - \lambda \mathbf{K})\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int\limits_0^t \mathscr{K}(t, \tau)\mu(\tau)\, d\tau = f_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{26}$$

$$\mathbf{K}^*_\lambda \nu \equiv (I - \bar{\lambda} \mathbf{K}^*)\nu \equiv \nu(t) - \bar{\lambda} \int\limits_t^\infty \mathscr{K}(\tau, t)\nu(\tau)\, d\tau = g_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{27}$$

где (с использованием обозначения $\gamma = 2\omega - 1$)

$$\mathscr{K}(t, \tau) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1-\gamma/2} \frac{\gamma^{3/2} t^{2\gamma-1}}{2\sqrt{\pi}(t^\gamma - \tau^\gamma)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma t^\gamma \tau^\gamma}{4(t^\gamma - \tau^\gamma)}\right). \tag{28}$$

Отметим, что ядро характеристического уравнения $\mathscr{K}(t, \tau)$ обладает теми же свойствами, что и ядро $\mathscr{K}_2(t, \tau)$, и так как

$$\int\limits_0^t \mathscr{K}(t, \tau)\, d\tau = 1 \quad \forall t \in (0, \infty),\ \forall \gamma > 0 \quad (\omega > 1/2), \tag{29}$$

справедливо аналогичное (18) предельное соотношение.

Запишем ядра $\mathscr{K}_2(t,\tau)$ (23), $\mathscr{K}(t,\tau)$ (28) интегральных операторов в виде

$$\mathscr{K}_2(t,\tau) = \mathbf{P}_2(t,\tau)\exp\{-\mathbf{Q}_2(t,\tau)\}, \quad \mathscr{K}(t,\tau) = \mathbf{P}(t,\tau)\exp\{-\mathbf{Q}(t,\tau)\},$$

где

$$P_2(t,\tau) = \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1-\gamma/2} \frac{\tau^{(\gamma+1)/2}}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}}, \quad Q_2(t,\tau) = \frac{t^{\gamma+1}}{8(t-\tau)},$$

$$P(t,\tau) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1-\gamma/2} \frac{\gamma^{3/2}t^{2\gamma-1}}{2\sqrt{\pi}(t^\gamma-\tau^\gamma)^{3/2}}, \quad Q(t,\tau) = \frac{\gamma t^\gamma \tau^\gamma}{8(t^\gamma-\tau^\gamma)}.$$

Лемма 1. *При $\gamma > 0$ и $0 < \tau < t < \infty$ имеет место оценка*

$$|\mathscr{K}_2(t,\tau) - \mathscr{K}(t,\tau)| \\ \le C(\gamma)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1-\gamma/2} \frac{t^{(\gamma-1)/2}}{\sqrt{t-\tau}}\left[\exp\left(-Q(t,\tau)/2\right) + \exp\left(-Q_2(t,\tau)/2\right)\right] \tag{30}$$

и верно предельное соотношение

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_0^t \left[\mathscr{K}_2(t,\tau) - \mathscr{K}(t,\tau)\right] d\tau = 0. \tag{31}$$

Доказательство. Для тех значений параметра γ и $0 < \tau < t < \infty$, при которых $\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q} \ge 0$, требуемая оценка вытекает из следующих неравенств (для сокращения записи аргументы функций опущены):

$$|\mathscr{K} - \mathscr{K}_2| \le |(\mathbf{P} - \mathbf{P}_2)\exp\{-\mathbf{Q}\}| + |\mathbf{P}_2\exp\{-\mathbf{Q}\}(1 - \exp\{-\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}\})| \\ \le |\mathbf{P} - \mathbf{P}_2|\exp\{-\mathbf{Q}\} + |\mathbf{P}_2(\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q})\exp\{-\mathbf{Q}\}|,$$

$$|\mathbf{P} - \mathbf{P}_2| \le C_1(\gamma)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1-\gamma/2} \frac{t^{(\gamma-1)/2}}{\sqrt{t-\tau}}\exp\{-\mathbf{Q}\}, \quad |\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}| \le C_2(\gamma)t^\gamma,$$

$$\mathbf{P}_2|\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}|\exp\{-\mathbf{Q}\} \le C_2(\gamma)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1-\gamma/2} \frac{t^{(\gamma-1)/2}}{\sqrt{t-\tau}}\exp\{-\mathbf{Q}/2\}.$$

Для тех значений параметра γ и $0 < \tau < t < \infty$, для которых $\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q} < 0$, достаточно в этих же неравенствах поменять роли функций $\mathbf{Q}_2$ и $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}$ соответственно.

Справедливость неравенства (30) показывает, что разность $\mathscr{K}_2(t,\tau) - \mathscr{K}(t,\tau)$ обладает слабой особенностью, имеет место следующее предельное соотношение (в отличие от случаев (18) и (29)):

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_0^t \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1-\gamma/2} \frac{t^{(\gamma-1)/2}}{\sqrt{t-\tau}}[\exp(-Q(t,\tau)/2) + \exp(-Q_2(t,\tau)/2)]\, d\tau = 0,$$

и уравнение (26) действительно является характеристическим для уравнения (17). Лемма доказана.

4. Исследование характеристических интегральных уравнений. В уравнениях (26), (27) сделаем замены независимых переменных (напомним, что $\gamma = 2\omega - 1$):

$$t = [\gamma t_1]^{-1/\gamma}, \quad \tau = [\gamma\tau_1]^{-1/\gamma},$$

и введем обозначения:

$$\varphi(t_1) = \mu([\gamma t_1]^{-1/\gamma}), \quad f_2(t_1) = f_1([\gamma t_1]^{-1/\gamma}),$$

$$\psi(t_1) = t_1^{(-\gamma-1)/\gamma}\nu([\gamma t_1]^{-1/\gamma}), \quad g_2(t_1) = t_1^{(-\gamma-1)/\gamma}g_1([\gamma t_1]^{-1/\gamma}), \tag{32}$$

$$k(t_1-\tau_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(\tau_1-t_1)^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{4(\tau_1-t_1)}\right), \quad 0<\tau_1<t_1<\infty, \tag{33}$$

$$k^*(t_1-\tau_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(t_1-\tau_1)^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{4(t_1-\tau_1)}\right), \quad 0<t_1<\tau_1<\infty. \tag{34}$$

Тогда уравнения (26), (27) запишутся в виде

$$\mathbf{k}_\lambda\varphi \equiv (I-\lambda\mathbf{k})\varphi \equiv \varphi(t_1) - \lambda\int\limits_{t_1}^{\infty} k(t_1-\tau_1)\varphi(\tau_1)\,d\tau_1 = f_2(t_1), \quad 0<t_1<\tau_1<\infty; \tag{35}$$

$$\mathbf{k}^*_\lambda\psi \equiv (I-\bar\lambda\mathbf{k}^*)\psi \equiv \psi(t_1) - \bar\lambda\int\limits_{0}^{t_1} k(\tau_1-t_1)\psi(\tau_1)\,d\tau_1 = g_2(t_1), \quad 0<\tau_1<t_1<\infty. \tag{36}$$

Далее, введя соответствующие односторонние функции (для $\varphi, k, f_2, \psi, g_2$) по формулам

$$l_+(\theta) = \begin{cases} l(\theta), & \text{если } \theta>0,\\ 0, & \text{если } \theta\le 0,\end{cases} \quad l_-(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta\ge 0,\\ -l(\theta), & \text{если } \theta<0,\end{cases} \tag{37}$$

$$l(\theta) = l_+(\theta) - l_-(\theta), \quad \theta\in\mathbb{R},$$

из (35), (36) получим

$$\mathbf{k}_{\lambda-}\varphi_+ \equiv (I-\lambda\mathbf{k}_-)\varphi_+ \equiv \varphi_+(t_1) - \lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_-(t_1-\tau_1)\varphi_+(\tau_1)\,d\tau_1 = f_{2+}(t_1) + \varphi_-(t_1), \quad t_1\in\mathbb{R}, \tag{38}$$

$$\mathbf{k}_{\lambda+}\psi_+ \equiv (I-\bar\lambda\mathbf{k}_+)\psi_+ \equiv \psi_+(t_1) - \bar\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_+(t_1-\tau_1)\psi_+(\tau_1)\,d\tau_1 = g_{2+}(t_1) + \psi_-(t_1), \quad t_1\in\mathbb{R}. \tag{39}$$

Уравнения (38), (39) совпадают соответственно с уравнениями (35), (36), если $t_1>0$, и, как будет показано ниже, решения уравнений (35), (36) не зависят от способа доопределения уравнений на отрицательной полуоси, т. е. не зависят от функций $\varphi_-(t_1), \psi_-(t_1)$.

Вначале исследуем уравнение (38). Применяя преобразование Фурье для (38), имеем

$$\Phi^+(s) - \lambda\mathbf{K}^-(s)\Phi^+(s) = \mathbf{F}_2^+(s) + \Phi^-(s), \quad s\in\mathbb{R}, \tag{40}$$

где прописными буквами обозначены соответствующие образы Фурье и $\mathbf{K}^-(s) = \exp[-(1+i\,\mathrm{sign}(s))\sqrt{|s|/2}]$. Функция $K^-(s)$ аналитически продолжаема на комплексную плоскость $z=s+i\sigma$ с разрезом вдоль мнимой положительной полуоси функцией $\mathbf{K}^-(z) = \exp\{-\sqrt{iz}\}$.

Более того, существуют функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, аналитические в верхней $\sigma \geq 0$ и нижней $\sigma \leq 0$ полуплоскостях переменной $z = s + i\sigma$, следы которых на действительной оси $\sigma = 0$ соответственно равны $\Phi^+(s)$ и $\Phi^-(s)$.

При выполнении условия

$$\mathbf{A}_\lambda(s) \equiv 1 - \lambda \mathbf{K}^-(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{41}$$

из (40) получаем следующую задачу Римана:

$$\Phi^+(s) = [\mathbf{A}_\lambda(s)]^{-1}\Phi^-(s) + \lambda \mathbf{R}_\lambda^-(s)\mathbf{F}_2^+(s) + \mathbf{F}_2^+(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{42}$$

где $\mathbf{R}_\lambda^-(s) = \mathbf{K}^-(s)/\mathbf{A}_\lambda(s)$.

Коэффициент $\mathbf{R}_\lambda^-(s)$ в задаче Римана (42) имеет аналитическое продолжение $\mathbf{R}_\lambda^-(z)$ в плоскости $z = s + i\sigma$ с разрезом вдоль мнимой положительной полуоси, и $\mathbf{R}_\lambda^-(z)$ имеет простые полюсы в точках

$$z_k = s_k + i\sigma_k = 2(\arg\lambda + 2k\pi)\ln|\lambda| - i[\ln^2|\lambda| - (\arg\lambda + 2k\pi)^2], \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{43}$$

которые являются нулями функции $\mathbf{A}_\lambda(z)$ и расположены на параболе

$$z = s + i\left(\frac{s^2}{4\ln^2|\lambda|} - \ln^2|\lambda|\right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{44}$$

Очевидно, что вершина параболы (44) расположена на мнимой оси и в зависимости от значения $|\lambda|$ смещается вниз или вверх по мнимой оси плоскости переменной z, а ветви параболы обращены вверх.

Запишем условие (41) в терминах комплексного параметра λ. Из формулы (43) для корней z_k замечаем, что критерий (41) выполнен тогда и только тогда, когда не равны нулю мнимые части этих корней, т. е. $\ln^2|\lambda| - (\arg\lambda + 2k\pi)^2 \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Последнее условие при $|\lambda| > 1$ будет эквивалентно следующему:

$$|\lambda| \neq \exp(|\arg\lambda + 2k\pi|) \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{45}$$

При $|\lambda| < 1$, очевидно, функция $\mathbf{A}_\lambda(z)$ не равна 0 на всей комплексной плоскости $z = s + i\sigma$ с разрезом вдоль мнимой положительной полуоси, так как $|\exp(\sqrt{iz})| > 1$.

Если же $|\lambda| = 1$, то уравнение $|\lambda| = |\exp(\sqrt{iz})|$ относительно комплексной переменной λ имеет единственное решение $\lambda = 1$, которое соответствует значению $z = 0$.

Линии, описываемые уравнением $|\lambda| = \exp(|\arg\lambda + 2k\pi|)$, делят комплексную плоскость параметра λ на непересекающиеся области D_m, $m = 0, 1, 2, \dots$, следующим образом:

$$D_{2n} = \left\{D_n^{(1)} \cap D_n^{(2)}\right\} \setminus \bigcup_{k=-1}^{2n-1} D_k, \quad D_{-1} = \varnothing, \quad D_{2n+1} = \left\{D_n^{(1)} \cup D_n^{(2)}\right\} \setminus \bigcup_{k=0}^{2n} D_k, \tag{46}$$

где $D_n^{(1)} = \{\lambda : |\lambda| < \exp[(2n+1)\pi - \arg\lambda]\}$, $D_n^{(2)} = \{\lambda : |\lambda| < \exp[2n\pi + \arg\lambda]\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Внешние части границ ∂D_m, $m = 0, 1, 2, \dots$, областей D_m, $m = 0, 1, 2, \dots$, обозначим соответственно через Γ_m, $m = 0, 1, 2, \dots$.

Замечание 4. Заметим, что кроме области D_0, которая имеет только внешнюю границу $\Gamma_0 = \partial D_0$, каждая из областей D_m имеет границу ∂D_m, состоящую из внешней Γ_m и внутренней Γ_{m-1} частей:

$$\partial D_m = \Gamma_{m-1} \cup \Gamma_m, \quad \text{причем } \Gamma_{m-1} \cap \Gamma_m = (-1)^m \exp\{m\pi\},$$

т. е. внешняя Γ_m и внутренняя Γ_{m-1} части границы ∂D_m области D_m имеют одну общую точку, лежащую на действительной оси комплексной плоскости параметра λ.

Таким образом, получаем, что $\lambda \in \Gamma_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна точка $\tilde{s}$, для которой выполнено равенство $\mathbf{A}_\lambda(\tilde{s}) = 0$.

Пусть $|\lambda| > 1$. Тогда согласно (44) функция $\mathbf{A}_\lambda(z)$ в нижней полуплоскости может иметь только конечное число нулей вида (43), где

$$-N_1 \le k \le N_2, \quad N_1 = \left[\frac{\ln|\lambda| + \arg\lambda}{2\pi}\right], \quad N_2 = \left[\frac{\ln|\lambda| - \arg\lambda}{2\pi}\right], \tag{47}$$

здесь символ $[a]$ означает целую часть числа a, причем целая часть отрицательного числа принимается равной нулю. Действительно, (47) следует из условия, что мнимые части корней (43) должны принимать отрицательные значения, т. е. $\mathrm{Re}\{-iz_k\} \le 0$. Таким образом, из неравенства $(2\pi k + \arg)^2 < \ln^2|\lambda|$ вытекает утверждение (47).

Задача Римана (42) имеет положительный индекс $\varkappa(\lambda)$, равный числу нулей функции $\mathbf{A}_\lambda(z)$ в нижней полуплоскости (нули считаются с учетом их кратности):

$$\varkappa(\lambda) = \mathrm{Ind}\{[\mathbf{A}_\lambda(z)]^{-1}\} = -\,\mathrm{Ind}\{\mathbf{A}_\lambda(z)\} = N_1 + N_2 + 1 > 0. \tag{48}$$

Кстати, из (43) и (44) получаем, что при $|\lambda| < 1$ индекс задачи Римана $\varkappa(\lambda)$ равен 0.

Пусть $\sum\limits_{k=-N_1}^{N_2} \frac{c_k}{z-z_k}$ — главная часть разложения функции $[\mathbf{A}_\lambda(z)]^{-1}\,\Phi^-(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_k$, $k = -N_1, \ldots, 0, \ldots, N_2$. Тогда

$$\chi(z) \equiv \frac{\Phi^-(z)}{\mathbf{A}_\lambda(z)} - \sum_{k=-N_1}^{N_2} \frac{c_k}{z - z_k}$$

будет функцией, оригинал которой равен нулю при $t_1 \in \mathbb{R}_+$. Теперь равенство (42) можно представить в виде

$$\Phi^+(s) = \mathbf{F}_2^+(s) + \lambda \mathbf{R}_\lambda^-(s)\mathbf{F}_2^+(s) + \sum_{k=-N_1}^{N_2} \frac{c_k}{s - z_k} + \chi(s), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{49}$$

Переходя в соотношении (49) к оригиналам, при $t_1 \in \mathbb{R}_+$ получаем общее решение интегрального уравнения (35):

$$\varphi(t_1) = f_2(t_1) + \lambda \int_{t_1}^{\infty} \mathbf{r}_{\lambda-}(t_1 - \tau_1) f_2(\tau_1)\, d\tau_1 + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t_1), \quad t_1 \in \mathbb{R}_+, \tag{50}$$

где $\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta)$ является сужением на отрицательную полуось оригинала образа Фурье $\mathbf{R}_\lambda^-(s)$ и определяется по формулам (согласно теории вычетов [15])

$$\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta) = 2 \sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{iz_k}\exp(-iz_k\theta) + 2 \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{iz_k}\exp(-iz_k\theta)$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\lambda^m} \exp\left(\frac{m^2}{4\theta}\right), \quad \mathrm{Re}(iz_k) < 0,\ |\lambda| > 1,\ \theta \in \mathbb{R}_-, \tag{51}$$

$$\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}}\sum_{m=1}^{\infty}m\lambda^m\exp\left(\frac{m^2}{4\theta}\right),\quad |\lambda|\le 1,\ \theta\in\mathbb{R}_-, \tag{52}$$

числа N_1, N_2, z_k определяются соотношениями (47) и (43).

Для того чтобы решение $\varphi(t_1)$, определяемое формулой (50), было ограниченным, достаточно, чтобы интеграл $\int\limits_{t_1}^{\infty}\mathbf{r}_{\lambda-}(t_1-\tau_1)\,d\tau_1$ был ограничен для любых $t_1\in\mathbb{R}_+$, так как функция $f_2(t_1)+\sum\limits_{k=-N_1}^{N_2}c_k\exp(-iz_kt_1)$ является ограниченной функцией переменной t_1. Интеграл $\int\limits_{t_1}^{\infty}\mathbf{r}_{\lambda-}(t_1-\tau_1)\,d\tau_1$ будет ограниченным, так как $\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta)$ (51) удовлетворяет оценке

$$|\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta)|\le\frac{C_1}{|\theta|^{1/2}}\exp(-\delta_0|\theta|)+\frac{C_2}{|\theta|^{3/2}}\exp(-\delta_0|\theta|^{-1})\quad\forall\theta\in\mathbb{R}_-, \tag{53}$$

где

$$\delta_0=\min\{1/4;[2\pi(N_1+1)+\arg\lambda]^2-\ln^2|\lambda|;[2\pi(N_2+1)+\arg\lambda]^2-\ln^2|\lambda|\}.$$

Оценка (53) вытекает из следующих соотношений. Для второго слагаемого в (51) имеем

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=N_2+1}^{\infty}\sqrt{iz_k}\exp(-iz_k\theta)\right|&\le|\ln\lambda|\sum_{k=N_2+1}^{\infty}|\exp(-iz_k\theta)|\\
&\le|\ln\lambda|\sum_{k=N_2+1}^{\infty}\exp\{[(2k\pi+\arg\lambda)^2-\ln^2|\lambda|]\theta\}\\
&\qquad\qquad(\text{положим } y=2k\pi+\arg\lambda,\ a=2\pi(N_2+1)+\ln|\lambda|)\\
&\le|\ln\lambda|\int\limits_a^{\infty}\exp\{(y^2-\ln^2|\lambda|)\theta\}\,dy=|\ln\lambda|\exp\{-\theta\ln^2|\lambda|\}\int\limits_a^{\infty}\exp\{\theta y^2\}\,dy\\
&=\|z=y-a\|=|\ln\lambda|\exp\{-\theta\ln^2|\lambda|\}\int\limits_0^{\infty}\exp\{\theta(a^2+z^2+2az)\}\,dz\\
&=|\ln\lambda|\exp\{-\theta\ln^2|\lambda|+\theta a^2\}\int\limits_0^{\infty}\exp\{\theta z^2+\theta 2az\}\,dz\\
&\le|\ln\lambda|(-\theta)^{-1/2}\exp\{\theta(a^2-\ln^2|\lambda|)\}\int\limits_0^{\infty}\exp\{-(\sqrt{-\theta}z)^2\}\,d(\sqrt{-\theta}z)\\
&=|\ln\lambda|\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\theta}}\exp\{\delta_2\theta\},
\end{aligned}$$

где $\delta_2=[2\pi(N_2+1)+\arg\lambda]^2-\ln^2|\lambda|>0$.

Аналогично для первого слагаемого

$$\left|\sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)}\sqrt{iz_k}\exp(-iz_k\theta)\right|\le|\ln\lambda|\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\theta}}\exp\{\delta_1\theta\},$$

где $\delta_1 = [2\pi(N_1+1) + \arg\lambda]^2 - \ln^2|\lambda| > 0$.

Для третьего слагаемого в (51) получаем

$$|\theta|^{-3/2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\lambda^m} \exp\left(-\frac{m^2}{4|\theta|}\right)$$
$$= |\theta|^{-3/2} \exp\left\{-\frac{1}{4|\theta|}\right\} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\lambda^m} \exp\left(-\frac{m^2-1}{4|\theta|}\right) \le C|\theta|^{-3/2} \exp\left\{-\frac{1}{4|\theta|}\right\}.$$

Для представления (52) при $|\lambda| = 1$ имеем

$$|\theta|^{-3/2} \sum_{m=1}^{\infty} m \exp\left(-\frac{m^2}{4|\theta|}\right)$$
$$\le \frac{2}{\sqrt{|\theta|}} \int_1^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{4|\theta|}\right) d\left(-\frac{y^2}{4|\theta|}\right) = \frac{2}{\sqrt{|\theta|}} \exp\left(-\frac{1}{4|\theta|}\right)$$

и при $|\lambda| < 1$

$$|\theta|^{-3/2} \sum_{m=1}^{\infty} m\lambda^m \exp\left(-\frac{m^2}{4|\theta|}\right) \le C|\theta|^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4|\theta|}\right).$$

Можно проверить, что (50) будет решением уравнения (35) при произвольных коэффициентах c_k. Так как число линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения для (35) равно индексу $\varkappa(\lambda)$ (48), найденное решение (50) действительно будет общим решением неоднородного уравнения (35).

Сформулируем полученные результаты в виде следующих лемм.

Лемма 2. *Значения $\lambda \in D_0$ из (46) являются регулярными числами оператора* $\mathbf{k}$ (35) *и соответственно оператора* $\mathbf{K}$ (26).

Лемма 3. *Множество $\mathbb{C} \setminus D_0$ состоит из характеристических чисел оператора* $\mathbf{k}$ (35) *и соответственно оператора* $\mathbf{K}$ (26). *Причем если $\lambda \in D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}$, $m = 1, 2, \dots$, то $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{k}_\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{K}_\lambda) = \varkappa(\lambda) = m$; и соответствующие собственные функции имеют вид*

$$\varphi_{\lambda k}(t_1) = \exp(-iz_k t_1), \quad k = 1, \dots, m = \varkappa(\lambda) = N_1 + N_2 + 1.$$

Теперь рассмотрим союзное интегральное уравнение (39). Применяя преобразование Фурье для (39), получим

$$\Psi^+(s) - \bar{\lambda}\mathbf{K}^+(s)\Psi^+(s) = \mathbf{G}_2^+(s) + \Psi^-(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{54}$$

где прописными буквами обозначены соответствующие образы Фурье.

При выполнении условия

$$\mathbf{A}_\lambda^*(s) \equiv 1 - \bar{\lambda}\mathbf{K}^+(s) \ne 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{55}$$

из (54) получаем следующую краевую задачу Римана:

$$\Psi^+(s) = [\mathbf{A}_\lambda^*(s)]^{-1}\Psi^-(s) + \bar{\lambda}\mathbf{R}_\lambda^+(s)\mathbf{G}_2^+(s) + \mathbf{G}_2^+(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{56}$$

где $\mathbf{R}_\lambda^+(s) = \mathbf{K}^+(s)/\mathbf{A}_\lambda^*(s)$.

Здесь $\mathbf{R}_\lambda^+(s)$ в задаче (56) есть функция, аналитически продолжимая в верхнюю полуплоскость, за исключением конечного числа возможных полюсов, являющихся нулями функции $\mathbf{A}_\lambda^*(s)$. Поэтому индекс $\varkappa^*(\lambda)$ задачи (56) неположителен, т. е. $\varkappa^*(\lambda) = -\varkappa(\lambda) \le 0$. Переписав задачу (54) в виде

$$[1 - \bar{\lambda}\mathbf{K}^+(s)]\Psi^+(s) = \mathbf{G}_2^+(s) + \Psi^-(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

находим, что $\Psi^-(s) \equiv 0$, так что краевая задача Римана (56) принимает вид

$$\Psi^+(s) = \bar{\lambda}\mathbf{R}_\lambda^+(s)\mathbf{G}_2^+(s) + \mathbf{G}_2^+(s), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{57}$$

Из (57) непосредственно следует, что однородное интегральное уравнение, соответствующее (39), для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет только тривиальное решение.

Переходя в соотношении (57) к оригиналам, при $t_1 \in \mathbb{R}_+$ получаем решение интегрального уравнения (39):

$$\psi(t_1) = g_2(t_1) + \bar{\lambda}\int\limits_0^{t_1} \mathbf{r}_{\lambda+}(t_1 - \tau_1) g_2(\tau_1)\, d\tau_1, \quad t_1 \in \mathbb{R}_+, \tag{58}$$

где $\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta)$ является сужением на положительную полуось оригинала образа Фурье $\mathbf{R}_\lambda^+(s)$ и определяется по формулам (согласно теории вычетов)

$$\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta) = 2\sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{-iz_k}\exp(iz_k\theta) + 2\sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{-iz_k}\exp(iz_k\theta)$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\lambda^m}\exp\left(-\frac{m^2}{4\theta}\right), \quad \operatorname{Re}(-iz_k) > 0,\ |\lambda| > 1,\ \theta \in \mathbb{R}_+, \tag{59}$$

$$\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}\sum_{m=1}^{\infty} m\lambda^m \exp\left(-\frac{m^2}{4\theta}\right), \quad |\lambda| \le 1,\ \theta \in \mathbb{R}_+, \tag{60}$$

где числа N_1, N_2, z_k определяются соотношениями (47) и (43).

Для того чтобы выражение $t_1^{(\gamma+1)/\gamma}\psi(t_1)$ (где $\psi(t_1)$ — решение, определяемое формулой (58)) было интегрируемым, достаточно, чтобы функция $\mathbf{r}_-(t_1 - \tau_1)$ была ограниченной для любых $0 < \tau_1 \le t_1 < \infty$, ибо функция $t_1^{(\gamma+1)/\gamma}g_2(t_1)$ является интегрируемой функцией переменной t_1. Функция $\mathbf{r}_{\lambda+}(t_1 - \tau_1)$ будет ограниченной, так как $\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta)$ (59) удовлетворяет оценке

$$|\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta)| \le \frac{C_1}{|\theta|^{1/2}}\exp(-\delta_0|\theta|) + \frac{C_2}{|\theta|^{3/2}}\exp(-\delta_0|\theta|^{-1}) \quad \forall\theta \in \mathbb{R}_+, \tag{61}$$

где

$$\delta_0 = \min\{1/4; [2\pi(N_1+1) + \arg\lambda]^2 - \ln^2|\lambda|; [2\pi(N_2+1) + \arg\lambda]^2 - \ln^2|\lambda|\}.$$

Далее, если $\lambda \in D_0$, то по лемме 1 неоднородное уравнение (39) безусловно однозначно разрешимо; если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus D_0$, то по лемме 2 для однозначной разрешимости уравнения (39) необходимо и достаточно выполнения следующих условий ортогональности:

$$\int\limits_0^{\infty} g_2(t_1)\exp(-iz_kt_1)\, dt_1 = 0, \quad k = 1, \dots, m. \tag{62}$$

Итак, доказана

Лемма 4. *Любое* $\lambda \in \mathbb{C}$ *является регулярным числом оператора* $\mathbf{k}^*$ (36) *и соответственно оператора* $\mathbf{K}^*$ (27).

Из полученных результатов вытекает, что решения пары союзных характеристических интегральных уравнений (26) и (27) определены согласно (50) и (58) следующими выражениями (где $\gamma = 2\omega - 1$):

$$\mu(t) \equiv \varphi([\gamma t^\gamma]^{-1}) = f_1(t) + \lambda \int\limits_0^t \tau^{-\gamma-1} \mathbf{r}_{\lambda-}([\gamma t^\gamma]^{-1} - [\gamma \tau^\gamma]^{-1}) f_1(\tau)\, d\tau \\ + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k[\gamma t^\gamma]^{-1}), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (63)$$

$$\nu(t) \equiv \gamma^{(-\gamma-1)/\gamma} t^{-\gamma-1} \psi([\gamma t^\gamma]^{-1}) \\ = g_1(t) + \bar{\lambda} \int\limits_t^\infty t^{-\gamma-1} \mathbf{r}_{\lambda+}([\gamma t^\gamma]^{-1} - [\gamma \tau^\gamma]^{-1}) g_1(\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (64)$$

и удовлетворяют следующим условиям:

$$\mu(t) = \varphi([\gamma t^\gamma]^{-1}) \in M(\mathbb{R}_+), \quad \nu(t) = t^{-\gamma-1} \psi([\gamma t^\gamma]^{-1}) \in L_1(\mathbb{R}_+). \quad (65)$$

5. О разрешимости интегральных уравнений (17) и (22) методом регуляризации [14]. Введем обозначение

$$\widetilde{\mathscr{K}}(t,\tau) = \mathscr{K}_2(t,\tau) - \mathscr{K}(t,\tau) \quad (66)$$

и, учитывая уравнение (26), запишем интегральное уравнение (17) в виде

$$\mathbf{K}_\lambda \mu \equiv (I - \lambda \mathbf{K})\mu = \lambda \int\limits_0^t \widetilde{\mathscr{K}}(t,\tau)\mu(\tau)\, d\tau + f_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (67)$$

Решим последнее уравнение как характеристическое, рассматривая временно правую часть как известную функцию. Тогда согласно (63) получаем

$$\mu(t) = f_1(t) + \lambda \int\limits_0^t \widetilde{\mathscr{K}}(t,\tau)\mu(\tau)\, d\tau + \lambda \int\limits_0^t \tau^{-\gamma-1} \mathbf{r}_{\lambda-}([\gamma t^\gamma]^{-1} - [\gamma \tau^\gamma]^{-1}) \\ \times \left[f_1(\tau) + \lambda \int\limits_0^\tau \widetilde{\mathscr{K}}(\tau,\eta)\mu(\eta)\, d\eta \right] d\tau + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k[\gamma t^\gamma]^{-1}), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (68)$$

Приведем уравнение (68) к виду

$$\widehat{\mathbf{K}}_\lambda \mu \equiv (I - \lambda \widehat{\mathbf{K}})\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int\limits_0^t \widehat{\mathscr{K}}(t,\tau)\mu(\tau)\, d\tau \\ = \hat{f}(t) + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k[\gamma t^\gamma]^{-1}), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (69)$$

где

$$\widehat{\mathscr{K}}(t,\tau) = \widetilde{\mathscr{K}}(t,\tau) + \lambda \int\limits_{\tau}^{t} \eta^{-\gamma-1}\mathbf{r}_{\lambda-}([\gamma t^{\gamma}]^{-1} - [\gamma\eta^{\gamma}]^{-1})\widetilde{\mathscr{K}}(\eta,\tau)\,d\eta$$

$$\equiv \widetilde{\mathscr{K}}(t,\tau) + \lambda\,\widetilde{\widetilde{\mathscr{K}}}(t,\tau),$$

$$\hat{f}(t) = f_1(t) + \lambda \int\limits_{0}^{t} \tau^{-\gamma-1}\mathbf{r}_{\lambda-}([\gamma t^{\gamma}]^{-1} - [\gamma\tau^{\gamma}]^{-1})f_1(\tau)\,d\tau.$$

Используя оценки для (30) и (53), получаем справедливость следующего утверждения.

Лемма 5. *Ядро $\widehat{\mathscr{K}}(t,\tau)$ имеет слабую особенность, т. е. справедлива оценка*

$$|\widehat{\mathscr{K}}(t,\tau)| \le C\frac{t^{1/2+\varepsilon}}{\tau^{1-\gamma/2+\varepsilon}(t-\tau)^{1/2}}, \quad 0<\varepsilon<\gamma/2,\ \gamma = 2\omega-1>0,\ 0<\tau<t<\infty. \tag{70}$$

Доказательство. Так как $\widehat{\mathscr{K}}(t,\tau)$ имеет представление $\widetilde{\mathscr{K}}(t,\tau)+\lambda\,\widetilde{\widetilde{\mathscr{K}}}(t,\tau)$, оценка (70) следует из (30), (53) и нижеприведенных соотношений. Применяя следующее двойное неравенство [16, с. 55]:

$$C_1 t^{\gamma-1}(t-\tau) \le t^{\gamma} - \tau^{\gamma} \le C_2 t^{\gamma-1}(t-\tau),$$

где $C_1 = \min\{1,\gamma\}$, $C_2 = \max\{1,\gamma\}$, вначале получим ($\gamma = 2\omega-1$)

$$\widetilde{\widetilde{\mathscr{K}}}(t,\tau) \le M_1(\gamma)\int\limits_{\tau}^{t} \eta^{-\gamma-1}\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{1-\gamma/2}\frac{\eta^{(\gamma-1)/2}}{\sqrt{\eta-\tau}}\,\frac{\sqrt{t}\eta^{\gamma/2}}{\sqrt{t-\eta}}\exp\left(-\frac{C_1(\gamma)(t-\eta)}{t\eta^{\gamma}}\right)d\eta$$

$$+ M_2(\gamma)\int\limits_{\tau}^{t} \eta^{-\gamma-1}\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{1-\gamma/2}\frac{\eta^{(\gamma-1)/2}}{\sqrt{\eta-\tau}}\,\frac{t^{3/2}\eta^{3\gamma/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\gamma)t\eta^{\gamma}}{t-\eta}\right)d\eta$$

$$= J_1(t,\tau) + J_2(t,\tau).$$

Здесь $C_j(\gamma)$, $M_j(\gamma)$, $j=1,2$, — постоянные, зависящие только от γ, функции $J_1(t,\tau)$, $J_2(t,\tau)$ соответственно равны

$$J_1 = M_1(\gamma)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\gamma/2}}\int\limits_{\tau}^{t}\frac{1}{\eta^{(\gamma+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau)(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\gamma)(t-\eta)}{t\eta^{\gamma}}\right)d\eta$$

$$= M_1(\gamma)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\gamma/2}}I_1(t,\tau);$$

$$J_2 = M_2(\gamma)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\gamma/2}}\int\limits_{\tau}^{t}\frac{t\eta^{(\gamma-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\gamma)t\eta^{\gamma}}{t-\eta}\right)d\eta$$

$$= M_2(\gamma)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\gamma/2}}I_2(t,\tau).$$

Далее, каждую из функций $I_1(t,\tau)$, $I_2(t,\tau)$ представим в виде сумм из двух слагаемых:

$$I_1(t,\tau) = I_{11}(t,\tau) + I_{12}(t,\tau); \quad I_2(t,\tau) = I_{21}(t,\tau) + I_{22}(t,\tau),$$

для каждого из которых последовательно будем иметь

$$I_{11}(t,\tau) = \int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} \frac{1}{\eta^{(\gamma+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau)(t-\eta)}} \exp\left(-\frac{C_1(\gamma)(t-\eta)}{t\eta^{\gamma}}\right) d\eta$$

$$\le C(\gamma)\sqrt{t} \int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} \frac{\sqrt{t}\, d\eta}{(t-\eta)\sqrt{\eta(\eta-\tau)}}$$

(полагаем $z^2 = \frac{t-\tau}{t-\eta} - 1$)

$$\le \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^2+\tau/t}} = \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}} \ln(\sqrt{t/\tau} + \sqrt{t/\tau+1})$$

$$= \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}} \ln \frac{1+\sqrt{1+\tau/t}}{\sqrt{\tau/t}} \le \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}} \ln \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{\tau/t}}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[C_1 + C_2\,(\tau/t)^{\varepsilon} \left|\ln\frac{\tau}{t}\right| (t/\tau)^{\varepsilon}\right] = \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} [C_1 + C_3 (t/\tau)^{\varepsilon}],$$

где значение параметра ε выбирается из условия $0 < \varepsilon < \gamma/2$;

$$I_{12}(t,\tau) = \int\limits_{(t+\tau)/2}^{t} \frac{1}{\eta^{(\gamma+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau)(t-\eta)}} \exp\left(-\frac{C_1(\gamma)(t-\eta)}{t\eta^{\gamma}}\right) d\eta$$

$$\le \left(\frac{2}{(t+\tau)}\right)^{(\gamma+1)/2} \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_{(t+\tau)/2}^{t} \frac{1}{\sqrt{t-\eta}} \exp\left(-\frac{C_1(\gamma)(t-\eta)}{t^{\gamma+1}}\right) d\eta$$

$$\le C(\gamma)\left(\frac{t}{\sqrt{t+\tau}}\right)^{(\gamma+1)/2} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_{(t+\tau)/2}^{t} \exp\left(-\frac{C_1(\gamma)(t-\eta)}{t^{\gamma+1}}\right) d\left(\frac{\sqrt{C_1(\gamma)(t-\eta)}}{t^{(\gamma+1)/2}}\right)$$

$$\le \left\| z = \frac{\sqrt{C_1(\gamma)(t-\eta)}}{t^{(\gamma+1)/2}} \right\| \le \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_0^{\infty} \exp\{-z^2\}\, dz \le \frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}};$$

$$I_{21}(t,\tau) = \int\limits_{\tau}^{(t+\tau)/2} \frac{\sqrt{t}\eta^{(\gamma-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}} \exp\left(-\frac{C_2(\gamma)t\eta^{\gamma}}{t-\eta}\right) d\eta$$

$$\le C(\gamma) \int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} \frac{\sqrt{t} d\,\eta}{(t-\eta)\sqrt{\eta(\eta-\tau)}}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[C_1 + C_2\,(\tau/t)^{\varepsilon} \left|\ln\frac{\tau}{t}\right| (t/\tau)^{\varepsilon}\right] = \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} [C_1 + C_3 (t/\tau)^{\varepsilon}],$$

где последнее неравенство получается так же, как при оценке функции $I_{11}(t,\tau)$, и значение параметра ε выбирается также из условия $0<\varepsilon<\gamma/2$;

$$I_{22}(t,\tau)=\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{t\eta^{(\gamma-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\gamma)t\eta^{\gamma}}{t-\eta}\right)d\eta$$

$$\le\frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{t\eta^{(\gamma-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_3(\gamma)t(t+\tau)^{\gamma}}{t-\eta}\right)d\eta$$

$$=\frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{t\eta^{(\gamma-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_3(\gamma)t^{\gamma+1}}{t-\eta}\left\{1+\frac{\tau}{t}\right\}^{\gamma}\right)d\eta$$

$$\le\frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{0}^{t}\frac{t^{(\gamma+1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_4(\gamma)t^{\gamma+1}}{(t-\eta)}\right)d\eta$$

(полагаем $z=\frac{t^{(\gamma+1)/2}}{2\sqrt{t-\eta}},\ dz=\frac{t^{(\gamma+1)/2}d\eta}{4(t-\eta)^{3/2}}$)

$$=\frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{t^{\gamma/2}/2}^{\infty}\exp\{-z^2\}\,dz\le\frac{C(\gamma)}{\sqrt{t-\tau}}.$$

В этих неравенствах постоянные $C(\gamma)$, $C_j(\gamma)$, $j=1,2,3,4$, разные и зависят только от γ.

Из полученных неравенств вытекает искомая оценка (70). Лемма доказана.

Итак, в силу (70) для заданной правой части уравнение (69) имеет единственное решение, существование которого можно показать методом последовательных приближений.

Из соотношений (17) и (69) следует, что однородное уравнение

$$\mathbf{K}_{2\lambda}\mu\equiv(I-\lambda\mathbf{K}_2)\mu\equiv\mu(t)-\lambda\int\limits_0^t\mathscr{K}_2(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau=0,\quad t\in\mathbb{R}_+,\tag{71}$$

равносильно неоднородному уравнению

$$\widehat{\mathbf{K}}_{\lambda}\mu\equiv\mu(t)-\lambda\int\limits_0^t\widehat{\mathscr{K}}(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau=\sum_{k=-N_1}^{N_2}c_k\exp(-iz_k[\gamma t^{\gamma}]^{-1}),\quad t\in\mathbb{R}_+.\tag{72}$$

Рассмотрим вместо (72) семейство интегральных уравнений

$$\widehat{\mathbf{K}}_{\lambda}\mu\equiv\mu(t)-\lambda\int\limits_0^t\widehat{\mathscr{K}}(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau=\exp(-iz_k[\gamma t^{\gamma}]^{-1}),\tag{73}$$

$$k=-N_1,\dots,0,\dots,N_2,\quad t\in\mathbb{R}_+.$$

В силу того, что каждое из уравнений (73) имеет единственное нетривиальное решение $\mu_{\lambda k}(t), k=-N_1,\dots,0,\dots,N_2$ (соответствующее правой части уравнения (73) $\exp(-iz_k[\gamma t^{\gamma}]^{-1})$), для каждого значения параметра $\lambda\in\mathbb{C}\backslash D_0$ функции $\mu_{\lambda k}(t)$, $k=-N_1,\dots,0,\dots,N_2$, будут соответствующими собственными функциями однородного уравнения (71) (а значит, и однородного для (17) уравнения).

Из утверждений лемм 2 и 3 вытекает

Лемма 6. *Значения* $\lambda \in D_0$ *из* (46) *являются регулярными числами оператора* $\mathbf{K}_2$ (17).

Лемма 7. *Любое* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus D_0$ *является характеристическим числом оператора* $\mathbf{K_2}$ (17). *При этом если* $\lambda \in D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}$, $m = 1, 2, \ldots$, *то* $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{K_{2\lambda}}) = \varkappa(\lambda) = m$; *соответствующими собственными функциями будут решения уравнений* (73):

$$\mu_{\lambda k}(t) = [\widehat{\mathbf{K}}_\lambda]^{-1}[\exp(-iz_k[\gamma t^\gamma]^{-1})], \quad k = 1, \ldots, m = \varkappa(\lambda) = N_1 + N_2 + 1.$$

Замечание 5. Общим решением неоднородного интегрального уравнения (69), равно как и уравнения (17), будет функция

$$\mu_\lambda(t) = [\widehat{\mathbf{K}}_\lambda]^{-1}\hat{f}(t) + \sum_{k=1}^{m=N_1+N_2+1} c_k \mu_{\lambda k}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{74}$$

где $c_k, k = 1, \ldots, m,$ — произвольные постоянные.

Перейдем к рассмотрению интегрального уравнения (22), являющегося союзным для уравнения (17). Покажем, что соответствующее (22) однородное интегральное уравнение для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет только тривиальное решение. Для этого в однородном уравнении, проведя следующие замены независимых переменных:

$$t = [\gamma t_1]^{-1/\gamma}, \quad \tau = [\gamma \tau_1]^{-1/\gamma},$$

и вводя обозначение $\nu_1(t_1) = \nu([\gamma t_1]^{-1/\gamma})[\gamma t_1]^{-1/\gamma}$, имеем

$$\nu_1(t_1) - \bar{\lambda} \int_0^{t_1} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\tau_1}{t_1}\right)^{3/2} \left(\frac{t_1^{1/\gamma}}{\gamma \tau_1 (t_1^{1/\gamma} - \tau_1^{1/\gamma})}\right)^{3/2}$$
$$\times \exp\left(-\frac{t_1^{1/\gamma}}{4\gamma \tau_1 (t_1^{1/\gamma} - \tau_1^{1/\gamma})}\right) \nu_1(\tau_1)\, d\tau_1 = 0, \quad t_1 \in \mathbb{R}_+. \tag{75}$$

Тогда требуемое следует из ограниченности ядра интегрального оператора (75).

Итак, с учетом утверждений лемм 4, 6 и 7 получаем следующее утверждение.

Лемма 8. 1. *Каждое значение* $\lambda \in \mathbb{C}$ *является регулярным числом оператора* $\mathbf{K}_2^*$ (22).

2. *Неоднородное интегральное уравнение* (22) *однозначно разрешимо при любой правой части* $g_1(t)$, *если* $\lambda \in D_0$ (46).

3. *Если* $\lambda \in D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}$, $m = 1, 2, \ldots$, *то для однозначной разрешимости неоднородного интегрального уравнения* (22) *необходимо и достаточно, чтобы функции* $g_1(t)$ *удовлетворяли следующим условиям ортогональности:*

$$\int_0^\infty \mu_{\lambda k}(t) g_1(t)\, dt = 0, \quad k = 1, \ldots, m = \varkappa(\lambda) = N_1 + N_2 + 1. \tag{76}$$

Замечание 6. Согласно утверждениям леммы 8 решением неоднородного интегрального уравнения (22) будет функция

$$\nu_\lambda(t) = [\mathbf{K}_{2\lambda}^*]^{-1} g_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{77}$$

Замечание 7. Из вышеизложенных результатов непосредственно следует, что

$$\mu_\lambda(t) \in M(\mathbb{R}_+), \quad \nu_\lambda(t) \in L_1(\mathbb{R}_+). \tag{78}$$

Это согласуется с условиями (6) и (7).

6. Исследование граничных задач (1) и (2). С учетом (11) запишем решение задачи (1) в виде

$$u(x,t) = -\lambda \int_0^t \tau^{\omega-3/2} \mathscr{K}_0(x,t-\tau)\mu_\lambda(\tau)\,d\tau \\ + \int_0^t \int_0^\infty \tau^{\omega-3/2} G(x,\xi,t-\tau)\tau^{3/2-\omega} f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \tag{79}$$

где функции $\mu_\lambda(t)$ (74) и $t^{3/2-\omega} f(x,t)$ являются ограниченными и непрерывными функциями соответственно на $\mathbb{R}_+$ и Q. Учитывая неотрицательность функций $\mathscr{K}_0(x,t-\tau)$ (13) и $G(x,\xi,t-\tau)$ (12), непосредственно из (79) получаем следующую оценку:

$$|u(x,t)| \le (C_1|\lambda| + C_2) \int_0^t \tau^{\omega-3/2} \mathscr{K}_0(x,t-\tau)\,d\tau \le C_{3\lambda} t^{\omega-1}(x + t^{1/2}), \tag{80}$$

где $C_{3\lambda} = C_1|\lambda| + C_2$.

Для производных решения $u(x,t)$ (79) справедливо соотношение

$$t^{3/2-\omega}\left[u_t(x,t) - u_{xx}(x,t)\right] = -\lambda\mu(t) + t^{3/2-\omega} f(x,t) \in M(Q) \tag{81}$$

(что следует непосредственно и из уравнения (1)).

Итак, функция (79) удовлетворяет уравнению из (1) в смысле соотношения (81). Непосредственно для решения $u(x,t)$ (79) проверяется выполнение начального и граничного условий из (1). Таким образом, функция (79) согласно (80) и (81) полностью удовлетворяет граничной задаче (1) и принадлежит классу (6).

Учитывая (20), запишем решение задачи (2) в виде

$$v(x,t) = -\bar{\lambda} \int_t^\infty \tau^{3/2-\omega} G_{\xi\xi}(x,\xi,\tau-t)|_{\xi=\tau} \nu_\lambda(\tau)\,d\tau + \int_t^\infty \int_0^\infty G(x,\xi,\tau-t) g(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \tag{82}$$

где $\nu_\lambda(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ (77).

Для того чтобы функция $v(x,t)$ была из класса (7), достаточно выполнения условий

$$t^{\omega-3/2} \int_t^\infty \tau^{3/2-\omega} G_{\xi\xi}(x,\xi,\tau-t)|_{\xi=\tau} \nu(\tau)\,d\tau \in L_1(Q), \tag{83}$$

$$t^{\omega-3/2} \int_t^\infty \int_0^\infty G(x,\xi,\tau-t) g(\xi,\tau)\,d\xi d\tau \in L_1(Q). \tag{84}$$

Включение (84) действительно имеет место согласно условиям (5). Включение (83) равносильно неравенству

$$\int_0^\infty \int_0^\infty t^{\omega-3/2} \int_t^\infty \tau^{3/2-\omega} G_{\xi\xi}(x,\xi,\tau-t)|_{\xi=\tau}\nu(\tau)\,d\tau dt dx \le \|\nu\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \le \infty.$$

Очевидно, что для производных $v_t(x,t)$, $v_{xx}(x,t)$ функции $v(x,t)$ справедливо включение $t^{\omega-1}(x+\sqrt{t})(v_t+v_{xx}) \in L_1(Q)$.

Замечание 8. Из уравнения (2) дополнительно получаем, что

$$t^{2-\omega}(1+\sqrt{t})\nu(t) \in L_1(\mathbb{R}_+).$$

Сформулируем установленные результаты по разрешимости граничных задач (1) и (2) в виде следующих теорем.

Теорема 1. *Если* $\lambda \in D_0$ (46), *то для любой* f (5) *граничная задача* (1) *имеет единственное решение* $u \in \mathscr{U}$ (6). *Если* $\lambda \in \{\mathbb{C} \setminus D_0\} \cap \{D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}\}$ (46), *то для любой* f (5) *граничная задача* (1) *имеет общее решение* $u \in \mathscr{U}$ (6), *состоящее из решения* $u_{\text{hom}}(x,t)$ *однородного уравнения:*

$$u_{\text{hom}}(x,t) = \sum_{k=1}^m c_k u_{\lambda k}(x,t), \tag{85}$$

$$u_{\lambda k}(x,t) = -\lambda \int_0^t \tau^{\omega-3/2} \mathscr{K}_0(x,t-\tau)\mu_{\lambda k}(\tau)\,d\tau, \quad k=1,\dots,m, \tag{86}$$

где $\mu_{\lambda k} = [\widehat{\mathbf{K}}_\lambda]^{-1}[\exp(-iz_k[\gamma t^\gamma]^{-1})]$, $k=1,\dots,m$, c_k, $k=1,\dots,m$, *— произвольные постоянные, плюс частное решение* $u_{\text{part}}(x,t)$*:*

$$\begin{aligned} u_{\text{part}}(x,t) = -\lambda \int_0^t \tau^{\omega-3/2} \mathscr{K}_0(x,t-\tau)[\widehat{\mathbf{K}}_\lambda]^{-1}\hat{f}(\tau)\,d\tau \\ + \int_0^t \int_0^\infty \tau^{\omega-3/2} G(x,\xi,t-\tau)\tau^{3/2-\omega} f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{87}$$

Теорема 2. *Если* $\lambda \in D_0$ (46), *то для любой* g (5) *граничная задача* (2) *имеет единственное решение* $v \in \mathscr{V}$ (7). *Если* $\lambda \in \{\mathbb{C} \setminus D_0\} \cap \{D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}\}$ (46), *то для однозначной разрешимости граничной задачи* (2) *в классе* $\mathscr{V}$ (7) *необходимо и достаточно, чтобы функция* g (5) *удовлетворяла условиям ортогональности*

$$\int_0^\infty u_{\lambda k}(x,t) g(x,t)\,dx dt = 0, \quad k=1,\dots,m=\varkappa(\lambda)=N_1+N_2+1. \tag{88}$$

7. О спектрах операторов L_1 (3) и L_1^* (4). Непосредственно из утверждений лемм 6–8 вытекает

Теорема 3. *Открытое множество* D_0 (46) *является резольвентным для оператора* L_1 (3), *а его дополнение* $\mathbb{C} \setminus D_0$ *составляет спектр оператора* L_1 (3). *Причем если* $\lambda \in D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}$, $m = 1, 2, \dots$, *то* $\dim \operatorname{Ker}(L_1) = \varkappa(\lambda) = m$, *и соответствующие собственные функции оператора* L_1 (3) *определяются согласно формулам*

$$u_{\lambda k}(x,t) = -\lambda \int\limits_0^t \tau^{\omega-3/2} \mathscr{K}_0(x, t-\tau) \mu_\lambda(\tau) d\tau, \quad k = 1, \dots, m = \varkappa(\lambda) = N_1 + N_2 + 1, \tag{89}$$

где

$$\mu_{\lambda k}(t) = [\widehat{\mathbf{K}}_\lambda]^{-1} [\exp(-iz_k[\gamma t^\gamma]^{-1})], \quad k = 1, \dots, m = \varkappa(\lambda) = N_1 + N_2 + 1.$$

Теорема 4. *Множество значений* $\lambda \in \mathbb{C}$ *есть резольвентное множество оператора* L_1^* (4).

8. О спектрах операторов L_λ (1) и L_λ^* (2). Теперь рассмотрим следующие спектральные задачи для операторов L_λ (1) и L_λ^* (2) по определению пар $\{\alpha, u_\alpha(x,t)\}$ и $\{\alpha, v_\alpha(x,t)\}$:

$$L_\lambda u = \alpha u, \quad \{\alpha, u_\alpha(x,t)\} \in \{\mathbb{C} \times \mathscr{D}(L_{\lambda,\alpha})\}, \tag{90}$$

$$L_\lambda^* v = \bar{\alpha} v, \quad \{\alpha, v_\alpha(x,t)\} \in \{\mathbb{C} \times \mathscr{D}(L_{\lambda,\alpha}^*)\}, \tag{91}$$

где

$$\mathscr{U}_\alpha = \left\{ u \mid \frac{t^{1-\omega} e^{-\alpha t}}{x + \sqrt{t}} u,\ t^{3/2-\omega} e^{-\alpha t}(u_t - u_{xx}) \in M(Q), \right. \\ \left. t^{3/2-\omega} e^{-\alpha t} u_{xx}(x,t)|_{x=t} \in M(\mathbb{R}_+) \right\}, \tag{92}$$

$$\mathscr{V}_\alpha = \left\{ v \mid \frac{e^{\alpha t}}{t^{3/2-\omega}} v,\ e^{\alpha t} t^{\omega-1}(x + \sqrt{t})(v_t + v_{xx}) \in L_1(Q), \right. \\ \left. \frac{e^{\alpha t}}{t^{3/2-\omega}} \int\limits_0^\infty v(\xi, t)\, d\xi \in L_1(\mathbb{R}_+) \right\}, \tag{93}$$

$$\mathscr{D}(L_{\lambda,\alpha}) = \{u \mid u \in \mathscr{U}_\alpha,\ u(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0\},$$

$$\mathscr{D}(L_{\lambda,\alpha}^*) = \{v \mid v \in \mathscr{V}_\alpha,\ v(x,\infty) = 0,\ v(0,t) = 0,\ v(\infty,t) = 0,\ v_x(\infty,t) = 0\}.$$

Задача (90) согласно замене $u(x,t) = u_1(x,t)e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, сводится к уже исследованной спектральной задаче для оператора L_1 (3). Непосредственно из теоремы 3 вытекает

Теорема 5. *Если значение* λ *принадлежит резольвентному множеству* D_0 *оператора* L_1 (3), *то каждое значение* $\alpha \in \mathbb{C}$ *принадлежит резольвентному множеству оператора* L_λ (90), *т. е. спектр оператора* L_λ (90) *в этом случае есть пустое множество. Если же* λ *принадлежит спектру* $\mathbb{C} \setminus D_0$ *оператора* L_1 (3), *то каждое значение* $\alpha \in \mathbb{C}$ *принадлежит спектру оператора* L_λ (90), *т. е. резольвентное множество оператора* L_λ (90) *в этом случае есть пустое множество.*

Как и в задаче (90), для спектральной задачи (91) с помощью замены $v(x,t) = v_1(x,t)e^{-\bar{\alpha} t}$ из теоремы 4 получим следующий результат.

Теорема 6. *Множество значений $\alpha \in \mathbb{C}$ есть резольвентное множество оператора L_λ^** (91).

Очевидно, что классами решений соответствующих неоднородных граничных задач для (90) и (91) будут классы функций (92) и (93).

Заключение. Наряду с рассмотренным в данной работе нагруженным оператором теплопроводности представляют определенный интерес (с соответствующими граничными условиями) операторы вида

$$u_t - u_{xx} + \lambda u_t(x,t)|_{x=t^\omega}, \ \{x,t\} \in \mathbb{R}_+^2; \quad \omega > 1/2, \quad u(x,0) = u(0,t) = 0; \tag{1*}$$

$$u_t - u_{xx} + \lambda u(x,t)|_{x=t^\omega}, \ \{x,t\} \in \mathbb{R}_+^2; \quad \omega > 1/2, \quad u(x,0) = u(0,t) = 0; \tag{2*}$$

$$u_t - u_{xx} + \lambda u_x(x,t)|_{x=t^\omega}, \ \{x,t\} \in \mathbb{R}_+^2; \quad \omega > 1/2, \quad u(x,0) = u(0,t) = 0; \tag{3*}$$

$$u_t - u_{xx} + \lambda u_{xx}(x,t)_{|x|=t^\omega}, \ \{x,t\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \quad \omega > 1/2, \quad u(x,0) = 0; \tag{4*}$$

$$u_t - u_{xx} + \lambda u_{xx}(x,t)_{x=\bar{x}}, \ \{x,t\} \in \mathbb{R}_+^2; \quad u(x,0) = u(0,t) = 0, \tag{5*}$$

где $\bar{x} \in \mathbb{R}_+$ — фиксированная точка. Ситуации, подобные рассмотренным выше, возникают и здесь. Однако разбиение комплексной области параметра λ на резольвентное и спектральное множества у операторов (1^*)–(5^*) происходит совершенно по-другому.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
2. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
3. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
4. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995.
5. *Дженалиев М. Т.* О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 48–54.
6. *Рамазанов М. И.* О краевой задаче для «существенно» нагруженного параболического уравнения в неограниченных областях // Докл. АМАН (Нальчик). 2004. Т. 7, № 1. С. 84–91.
7. *Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* О граничных задачах для «существенно» нагруженных параболических уравнений в ограниченных областях в многомерном случае // Докл. АМАН (Нальчик). 2004. Т. 7, № 1. С. 18–23.
8. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 848–853.
9. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.
10. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
11. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
12. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
13. *Шубин М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2001.
14. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1963.
15. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958.
16. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

Статья поступила 22 февраля 2005 г.

Дженалиев Мувашархан Танабаевич, *Рамазанов Мурат Ибраевич*
Институт математики МОН РК,
ул. Пушкина, 125, Алматы 050010
dzhenali@math.kz