Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 512.554

(H, R)–КОАЛГЕБРЫ ЛИ И (H, R)–БИАЛГЕБРЫ ЛИ

Л. Чжан

Аннотация: По любой (H, R)-коалгебре Ли Γ и некоторому правому коциклу T строится (H, R_T)-коалгебра Ли Γ^T; здесь (H, R) — треугольная алгебра Хопфа. Доказано, что существует биекция между множеством (H, R)-коалгебр Ли и множеством обычных коалгебр Ли. Также показано, что если $(L, [\,,], \Delta, R)$ является (H, R)-биалгеброй Ли обычной алгебры Ли, то $(L^T, [,], \Delta_T, R_T)$ будет (H, R_T)-биалгеброй Ли обычной алгебры Ли.

Ключевые слова: (H, R)-коалгебра Ли, треугольная алгебра Хопфа, правый коцикл, (H, R)-биалгебра Ли.

§ 1. Введение и предварительные результаты

Коалгебры Ли недавно вновь стали объектом интереса вследствие связи между биалгебрами Ли и квантовыми группами. Дуальная теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта для коалгебр Ли доказана Михаэлисом [1]. В случае, когда k — алгебраически замкнутое поле, структура коалгебры Ли на W_1^0 определена Николсом [2]; здесь $W_1 = \mathrm{Der}_k(k[X])$ — алгебра Ли дифференцирований многочленов от одной переменной X над полем k.

Определение (треугольной когграничной) биалгебры Ли предложено Дринфельдом [3]. Биалгебры Ли изучались с различных сторон. Разнообразные структуры биалгебры Ли на алгебрах Витта и Вирасоро рассматривались Тафтом [4]. Михаэлисом найден класс бесконечномерных биалгебр Ли, содержащих алгебры Вирасоро [5].

Недавно Бахтурин, Фишман и Монтгомери ввели понятие (H, R)-алгебры Ли [6], которое является обобщением алгебры Ли, где (H, R) — треугольная алгебра Хопфа.

В этой статье мы вводим понятие (H, R)-коалгебры Ли, которое является дуальным к понятию (H, R)-алгебры Ли. Одна из наших мотиваций — получить дуальные результаты к случаю (H, R)-алгебр Ли, другая мотивация — ввести понятие (H, R)-биалгебры Ли, построить (H, R)-биалгебры Ли и установить биекцию между множеством всех (H, R)-биалгебр Ли обычных алгебр Ли и множеством всех стандартных биалгебр Ли.

Статья организована следующим образом. В § 2 введено понятие (H, R)-коалгебры Ли, построена (H, R_T)-коалгебра Ли при помощи правого коцикла T и доказано, что существует биекция между множеством (H, R)-коалгебр Ли и множеством обычных коалгебр Ли. В § 3 введено понятие (H, R)-биалгебры Ли, построена (H, R)-биалгебра Ли и показано, что если $(L, [\ ,\ ], \Delta, R)$ является

The author was supported by National Natural Science Foundation of China (10571153), Postdoctoral Science Foundation of China (2005037713) and Postdoctoral Science Foundation of Jiangsu (0203003403).

(H,R)-биалгеброй Ли обычной алгебры Ли, то $(L^T,[\ ,\ ],\Delta_T,R_T)$ будет (H,R_T)-биалгеброй Ли обычной алгебры Ли.

Все рассмотрения проводятся над фиксированным полем k и в терминологии, касающейся алгебр, алгебр Ли, модулей, коалгебр и алгебр Хопфа, представленной в книге Монтгомери [7].

Напомним некоторые используемые понятия.

• *Коалгебра* — это k-пространство C совместно с двумя k-линейными отображениями, коумножением $\Delta_C : C \to C\otimes C$ и коединицей $\varepsilon_C : C \to k$ такими, что выполняются следующие равенства:

$$(\Delta_C\otimes I_C)\Delta_C = (I_C\otimes\Delta_C)\Delta_C, \quad (\varepsilon_C\otimes I_C)\Delta_C = I_C = (I_C\otimes\varepsilon_C)\Delta_C.$$

В дальнейшем образ элемента $c\in C$ под действием коумножения Δ_C записывается в виде $\Delta_C(c)=\sum c_1\otimes c_2$.

• Пусть H — одновременно алгебра и коалгебра. Если ее коумножение Δ_H и коединица ε_H являются гомоморфизмами алгебр, то H называется *биалгеброй.*

• Предположим, что H — биалгебра. Если существует такое линейное отображение $S_H : H\to H$, что $S_H * I_H = \mu_H\varepsilon_H = I_H * S_H$, т. е.

$$\sum S_H(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h)1_H = \sum h_1 S_H(h_2)$$

для всех $h\in H$, то H называется *алгеброй Хопфа* с антиподом S_H.

• Пусть H — алгебра Хопфа и элемент $R=\sum R_i'\otimes R_i''\in H\otimes H$ обратим с обратным R^{-1}. Элемент R называется *косовой парой* на H, если R удовлетворяет следующим условиям:

$(R1)$ $(\Delta_H\otimes I_H)R = R^{13}R^{23}$, т. е. $\sum R_{i1}'\otimes R_{i2}'\otimes R_i'' = \sum R_i'\otimes r_i'\otimes R_i''r_i''$,

$(R2)$ $(I_H\otimes\Delta_H)R = R^{13}R^{12}$, т. е. $\sum R_i'\otimes R_{i1}''\otimes R_{i2}'' = \sum R_i'r_i'\otimes r_i''\otimes R_i''$,

$(R3)$ $\sum\varepsilon_H(R_i')R_i'' = 1_H = \sum R_i'\varepsilon_H(R_i'')$.

• Предположим, что R является косовой парой на H. Если $R^{-1}=\tau R$, то R называется *кососимметрическим бихарактером* на H [6], где τ означает обычное отображение перестановки сомножителей.

• Предположим, что R — кососимметрический бихарактер на H. Если (H,R) почти кокоммутативна, т. е. $\tau(\Delta_H(h)) = R\Delta_H(h)R^{-1}$ для всех $h\in H$, то (H,R) называется *треугольной алгеброй Хопфа.*

• Пусть H — биалгебра и A является одновременно алгеброй и правым H-модулем с модульной структурой «·». Если

$$(ab)\cdot h = \sum(a\cdot h_1)(b\cdot h_2), \quad 1_A\cdot h = \varepsilon_H(h)1_A$$

для всех $a,b\in A, h\in H$, то A называется *правой H-модульной алгеброй.*

• Пусть H — биалгебра и C является одновременно коалгеброй и правым H-модулем с модульной структурой «·». Если

$$\Delta_C(c\cdot h) = \Delta_C(c)\cdot\Delta_H(h), \quad \varepsilon_C(c\cdot h) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_H(h)$$

для всех $c\in C$, $h\in H$, то C называется правой *H-модульной коалгеброй.*

Определение 1.1. Пусть Γ — векторное пространство над k. Если существует такое линейное отображение $\Delta : \Gamma\to\Gamma\otimes\Gamma$, что

$$\operatorname{Im}\Delta \subseteq \operatorname{Im}(I-\tau), \tag{Γ1}$$

$$(I+\xi+\xi^2)(I\otimes\Delta)\Delta = 0, \tag{Γ2}$$

то (Γ, Δ) называется *коалгеброй Ли* [8], где $\xi, \xi^2 : \Gamma\otimes\Gamma\otimes\Gamma \to \Gamma\otimes\Gamma\otimes\Gamma$, $\xi : x\otimes y\otimes z \mapsto y\otimes z\otimes x$, $\xi^2 : x\otimes y\otimes z \mapsto z\otimes x\otimes y$.

Будем использовать всегда следующее обозначение:

$$\Delta(t) = \sum t_i \otimes t_j, \quad t \in \Gamma.$$

Замечание 1.1. Если характеристика $\chi(k)$ поля k отлична от 2, то (Г1) может быть заменено на

$$\Delta = -\tau\Delta. \tag{Г1$'$}$$

К примеру, если C является коалгеброй (не обязательно с коединицей), т. е. существует такое линейное отображение $\Delta_C : C \to C\otimes C$, что $(\Delta_C \otimes I_C)\Delta_C = (I_C \otimes \Delta_C)\Delta_C$, то на C мы можем задать структуру коалгебры Ли, полагая $\Delta(c) = \sum[c_1\otimes c_2 - c_2\otimes c_1]$ для всех $c\in C$, где $\Delta_C(c) = \sum c_1 \otimes c_2$.

Определение 1.2. Пусть $(L, [,])$ — алгебра Ли и (L, Δ) — коалгебра Ли. Если выполнено условие

$$\Delta[x, y] = x\cdot\Delta(y) - y\cdot\Delta(x), \quad x, y \in L, \tag{LB}$$

где действие «·» задается посредством $x\cdot(a\otimes b) = [x, a]\otimes b + a\otimes[x, b]$, то $(L, [\ ,\ ], \Delta)$ называется *биалгеброй Ли* [4, 5].

§ 2. (H, R)-коалгебры Ли

Определение 2.1. Пусть (H, R) — треугольная алгебра Хопфа. (H, R)-*коалгебра Ли* — это правый H-модуль Γ вместе с коскобкой Ли $\Delta : \Gamma \to \Gamma\otimes\Gamma$, которая является таким H-модульным морфизмом, что для всех $x \in \Gamma$ выполняются

(1) R-антикокоммутативность: $\Delta(x) = -\sum x_j \cdot R'_i \otimes x_i \cdot R''_i$, т. е. $\Delta(x) = -(\tau\Delta(x))\cdot R$,

(2) R-котождество Якоби:

$$\sum x_{ii}\cdot R''_i \otimes x_{ij} \otimes x_j \cdot R'_i + x_{ij} \otimes x_j \cdot R'_i \otimes x_{ii} \cdot R''_i + x_j \cdot R'_i \otimes x_{ii} \cdot R''_i \otimes x_{ij} = 0.$$

Симметрическая форма этого тождества:

$$\sum x_{ii} \otimes x_{ij} \otimes x_j + x_{ij}\cdot R'_{i1} \otimes x_j \cdot R'_{i2} \otimes x_{ii}\cdot R''_i + x_j\cdot R'_i \otimes x_{ii}\cdot R''_{i1} \otimes x_{ij}\cdot R''_{i2} = 0,$$

где $\Delta(x) = \sum x_i \otimes x_j$ и $R = \sum R'_i \otimes R''_i$.

Пример 1. Пусть (H, R) — треугольная алгебра Хопфа.

(1) Если (Γ, Δ) — коалгебра Ли, то легко проверяется, что (Γ, Δ) является $(H, 1_H \otimes 1_H)$-коалгеброй Ли.

(2) Пусть C — правая H-модульная коалгебра, $R = \sum R'_i \otimes R''_i \in H\otimes H$. Определим

$$\Delta : C \to C\otimes C, \quad c \mapsto \sum[c_1 \otimes c_2 - c_2 \cdot R'_i \otimes c_1 \cdot R''_i].$$

Если (H, R) — коммутативная треугольная алгебра Хопфа, то (C, Δ) является (H, R)-коалгеброй Ли. В дальнейшем она обозначается через (C_R, Δ).

Доказательство. (1) Проверяется непосредственно.

(2) Для всех $c \in C$ имеем

$$(\tau\Delta(c)) \cdot R = \sum (c_2 \otimes c_1 - c_1 \cdot R_i'' \otimes c_2 \cdot R_i') \cdot R$$
$$= \sum (c_2 \cdot r_i' \otimes c_1 \cdot r_i'' - c_1 \cdot R_i'' r_i' \otimes c_2 \cdot R_i' r_i'')$$
$$= \sum (c_2 \cdot R_i' \otimes c_1 \cdot R_i'' - c_1 \otimes c_2) = -\Delta(c) \quad (R = r = \sum r_i' \otimes r_i'').$$

С другой стороны, для всех $c \in C$ выполняется

$$\sum c_{ii} \otimes c_{ij} \otimes c_j = \sum \Delta(c_i) \otimes c_j = \sum [\Delta(c_1) \otimes c_2 - \Delta(c_2 \cdot R_i') \otimes c_1 \cdot R_i'']$$
$$= \sum [(c_1 \otimes c_2 - c_2 \cdot R_i' \otimes c_1 \cdot R_i'') \otimes c_3 - (c_2 \cdot R_{i1}' \otimes c_3 \cdot R_{i2}'$$
$$- c_3 \cdot R_{i2}' r_i' \otimes c_2 \cdot R_{i1}' r_i'') \otimes c_1 \cdot R_i'']$$
$$= \sum [c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 - c_2 \cdot R_i' \otimes c_1 \cdot R_i'' \otimes c_3 - c_2 \cdot R_{i1}' \otimes c_3 \cdot R_{i2}' \otimes c_1 \cdot R_i''$$
$$+ c_3 \cdot R_{i2}' r_i' \otimes c_2 \cdot R_{i1}' r_i'' \otimes c_1 \cdot R_i'']$$
$$= \sum [c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 - c_2 \cdot R_i' \otimes c_1 \cdot R_i'' \otimes c_3 - c_2 \cdot R_i' \otimes c_3 \cdot r_i' \otimes c_1 \cdot R_i'' r_i''$$
$$+ c_3 \cdot R_i' r_i' \otimes c_2 \cdot \breve{R}_i' r_i'' \otimes c_1 \cdot \breve{R}_i'' R_i''] (R = \sum \breve{R}_i' \otimes \breve{R}_i'').$$

Таким образом, по предыдущему равенству и $R^{-1} = \tau R$ имеем

$$\sum c_{ii} \cdot R_i'' \otimes c_{ij} \otimes c_j \cdot R_i' = \sum c_1 \cdot R_i'' \otimes c_2 \otimes c_3 \cdot R_i' - c_2 \cdot R_i' r_i'' \otimes c_1 \cdot R_i'' \otimes c_3 \cdot r_i'$$
$$- c_2 \otimes c_3 \cdot r_i' \otimes c_1 \cdot r_i'' + c_3 \cdot r_i' \otimes c_2 \cdot R_i' r_i'' \otimes c_1 \cdot R_i'';$$

$$\sum c_{ij} \otimes c_j \cdot R_i' \otimes c_{ii} \cdot R_i'' = \sum c_2 \otimes c_3 \cdot R_i' \otimes c_1 \cdot R_i'' - c_1 \cdot R_i'' \otimes c_3 \cdot r_i' \otimes c_2 \cdot R_i' r_i''$$
$$- c_3 \cdot r_i' \otimes c_1 \cdot r_i'' \otimes c_2 + c_2 \cdot R_i' r_i'' \otimes c_1 \cdot R_i'' \otimes c_3 \cdot r_i';$$

$$\sum c_j \cdot R_i' \otimes c_{ii} \cdot R_i'' \otimes c_{ij} = \sum c_3 \cdot R_i' \otimes c_1 \cdot R_i'' \otimes c_2 - c_3 \cdot r_i' \otimes c_2 \cdot R_i' r_i'' \otimes c_1 \cdot R_i''$$
$$- c_1 \cdot r_i'' \otimes c_2 \otimes c_3 \cdot r_i' + c_1 \cdot R_i'' \otimes c_3 \cdot r_i' \otimes c_2 \cdot R_i' r_i''.$$

Тогда

$$\sum c_{ii} \cdot R_i'' \otimes c_{ij} \otimes c_j \cdot R_i' + c_{ij} \otimes c_j \cdot R_i' \otimes c_{ii} \cdot R_i'' + c_j \cdot R_i' \otimes c_{ii} \cdot R_i'' \otimes c_{ij} = 0$$

и (C_R, Δ) является (H,R)-коалгеброй Ли. $\square$

Пусть H — алгебра Хопфа и $T = \sum T_i' \otimes T_i'' \in H \otimes H$ — обратимый элемент с обратным T^{-1}. Если элемент T удовлетворяет соотношениям

$$\sum T_i' \otimes T_{i1}'' t_i' \otimes T_{i2}'' t_i'' = \sum T_{i1}' t_i' \otimes T_{i2}' t_i'' \otimes T_i'',$$
$$\sum T_i' \varepsilon_H(T_i'') = 1_H = \sum \varepsilon_H(T_i') T_i'', \tag{CT}$$

то он называется *правым коциклом* на H [9], где $T = t = \sum t_i' \otimes t_i'' \in H \otimes H$.

• Предположим, что T является правым коциклом на H с обратным $T^{-1} = \sum T_i'^{-1} \otimes T_i''^{-1}$. Тогда легко доказать, что

$$\sum T_i'^{-1} \otimes t_i'^{-1} T_{i1}''^{-1} \otimes t_i''^{-1} T_{i2}''^{-1} = \sum t_i'^{-1} T_{i1}'^{-1} \otimes t_i''^{-1} T_{i2}'^{-1} \otimes T_i''^{-1},$$
$$\sum T_i'^{-1} \varepsilon_H(T_i''^{-1}) = 1_H = \sum \varepsilon_H(T_i'^{-1}) T_i''^{-1}, \tag{CT^{-1}}$$

где $T^{-1} = t^{-1} = \sum t_i'^{-1} \otimes t_i''^{-1}$.

• Пусть H — алгебра Хопфа и T — правый коцикл на H с обратным $T^{-1} = \sum T_i'^{-1} \otimes T_i''^{-1}$. Для всех $h \in H$ определим

$$\widetilde{\Delta}(h) = \sum T_i'^{-1} h_1 T_i' \otimes T_i''^{-1} h_2 T_i'',$$

тогда $(H, \widetilde{\Delta})$ является алгеброй Хопфа [9], которая обозначается через $\widetilde{H}$.

Предложение 2.1. *Пусть H — коммутативная и кокоммутативная алгебра Хопфа с правым коциклом T и R — кососимметрический бихарактер на H. Положим $R_T = (\tau T^{-1})RT$, т. е. $R_T = \sum T_i''^{-1} R_i' t_i' \otimes T_i'^{-1} R_i'' t_i''$. Тогда*

(1) R_T — кососимметрический бихарактер на $\widetilde{H}$;

(2) если (H, R) треугольная, то $(\widetilde{H}, R_T)$ также треугольная.

Доказательство. (1) Запишем R_T в виде

$$\sum \overline{R}_i' \otimes \overline{R}_i'' = \sum T_i''^{-1} R_i' t_i' \otimes T_i'^{-1} R_i'' t_i''.$$

Легко проверяется, что $\sum \varepsilon_H(\overline{R}_i') \overline{R}_i'' = 1_H = \sum \overline{R}_i' \varepsilon_H(\overline{R}_i'')$.

Для элемента R_T имеем

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\Delta} \otimes I) R_T &= \sum \widetilde{\Delta}(\overline{R}_i') \otimes \overline{R}_i'' = \sum \widetilde{\Delta}(T_i''^{-1} R_i' t_i') \otimes T_i'^{-1} R_i'' t_i'' \\
&= \sum t_i'^{-1} T_{i1}''^{-1} R_{i1}' t_{i1}' \bar{t}_i' \otimes t_i''^{-1} T_{i2}''^{-1} R_{i2}' t_{i2}' \bar{t}_{i2}' \bar{t}_i'' \otimes T_i'^{-1} R_i'' t_i'' \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (T = t = \textstyle\sum \bar{t}_i' \otimes \bar{t}_i'') \\
&= \sum t_i'^{-1} T_{i1}''^{-1} R_{i1}' t_i' \otimes t_i''^{-1} T_{i2}''^{-1} R_{i2}' t_{i1}'' T_i' \otimes T_i'^{-1} R_i'' t_{i2}'' T_i'' \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (T \text{ — правый коцикл}) \\
&= \sum t_i''^{-1} T_{i2}'^{-1} R_{i1}' t_i' \otimes T_i''^{-1} R_{i2}' t_{i1}'' T_i' \otimes t_i'^{-1} T_{i1}'^{-1} R_i'' t_{i2}'' T_i'' \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{по } (CT^{-1})) \\
&= \sum T_i''^{-1} t_{i2}'^{-1} R_{i1}' t_i' \otimes t_i''^{-1} R_{i2}' t_{i1}'' T_i' \otimes T_i'^{-1} t_{i1}'^{-1} R_i'' t_{i2}'' T_i''
\end{aligned}$$

и

$$\sum \overline{R}_i' \otimes \bar{r}_i' \otimes \overline{R}_i'' \bar{r}_i'' = \sum T_i''^{-1} R_i' t_i' \otimes t_i''^{-1} r_i' \bar{t}_i' \otimes T_i'^{-1} R_i'' t_i'' t_i'^{-1} r_i'' \bar{t}_i''.$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$\sum t_{i2}'^{-1} t_i' \otimes t_i''^{-1} t_{i1}'' T_i' \otimes t_{i1}'^{-1} t_{i2}'' T_i'' = \sum t_i' \otimes t_i''^{-1} \bar{t}_i' \otimes t_i'' t_i'^{-1} \bar{t}_i'',$$

для того чтобы показать равенство

$$(\widetilde{\Delta} \otimes I) R_T = \sum \overline{R}_i' \otimes \bar{r}_i' \otimes \overline{R}_i'' \bar{r}_i''.$$

Действительно, поскольку T — правый коцикл, то

$$\sum T_i'^{-1} \otimes t_i'^{-1} T_{i1}''^{-1} \otimes t_i''^{-1} T_{i2}''^{-1} = \sum t_i'^{-1} T_{i1}'^{-1} \otimes t_i''^{-1} T_{i2}'^{-1} \otimes T_i''^{-1}.$$

По предыдущему равенству несложно доказать, что

$$\begin{aligned}
&\sum 1 \otimes t_i'^{-1} \otimes t_i''^{-1} = \sum t_i'^{-1} T_{i1}'^{-1} T_i' \otimes t_i''^{-1} T_{i2}'^{-1} T_{i1}'' \otimes T_i''^{-1} T_{i2}'' \\
&\qquad \Longrightarrow \sum t_i' \otimes t_i''^{-1} \bar{t}_i' \otimes t_i'' t_i'^{-1} \bar{t}_i'' = \sum T_{i1}'^{-1} T_i' \otimes T_i''^{-1} T_{i2}'' \bar{t}_i' \otimes T_{i2}'^{-1} T_{i1}'' \bar{t}_i''.
\end{aligned}$$

Таким образом, по кокоммутативности H

$$\sum t'_i \otimes t''^{-1}_i \bar{t}'_i \otimes t''_i t'^{-1}_i \bar{t}''_i = \sum t'^{-1}_{i2} t'_i \otimes t''^{-1}_i t''_{i1} T'_i \otimes t'^{-1}_{i1} t''_{i2} T''_i.$$

Подобным образом мы можем доказать, что $(I \otimes \widetilde{\Delta}) R_T = \sum \overline{R}'_i \bar{r}'_i \otimes \bar{r}''_i \otimes \overline{R}''_i$. Более того, легко видеть, что $R_T^{-1} = T^{-1} R^{-1} (\tau T)$, т. е. $R^{-1} = \tau R$ влечет $R_T^{-1} = \tau R_T$, и R_T является кососимметрическим бихарактером на $\widetilde{H}$.

(2) Согласно (1) мы должны доказать только то, что $\tau \widetilde{\Delta}(h) = R_T \widetilde{\Delta}(h) R_T^{-1}$. Действительно, для всех $h \in H$ имеем

$$\begin{aligned} R_T \widetilde{\Delta}(h) R_T^{-1} &= \sum T''^{-1}_i R'_i t'_i t'^{-1}_i h_1 \bar{t}'_i \widetilde{T}'^{-1}_i R'^{-1}_i \tilde{t}''_i \otimes T'^{-1}_i R''_i t''_i t''^{-1}_i h_2 \bar{t}''_i \widetilde{T}''^{-1}_i R''^{-1}_i \tilde{t}'_i \\ &= \sum T''^{-1}_i R'_i h_1 R'^{-1}_i \tilde{t}''_i \otimes T'^{-1}_i R''_i h_2 R''^{-1}_i \tilde{t}'_i \\ &= \sum T''^{-1}_i h_2 \tilde{t}''_i \otimes T'^{-1}_i h_1 \tilde{t}'_i = \tau \widetilde{\Delta}(h) \quad (R\Delta(h) = (\tau\Delta(h))R). \qquad \square \end{aligned}$$

Определение 2.2. Пусть Γ — (H,R)-коалгебра Ли и $T = \sum T'_i \otimes T''_i$ — правый коцикл на H. Определим Γ^T совпадающей с Γ как правый H-модуль и зададим коумножение $\Delta_T : \Gamma \to \Gamma \otimes \Gamma$ при помощи равенства

$$\Delta_T(x) = \Delta(x) \cdot T = \sum x_i \cdot T'_i \otimes x_j \cdot T''_i,$$

где $\Delta(x) = \sum x_i \otimes x_j \in \Gamma \otimes \Gamma$.

Пример 2. Пусть $H = kZ_2 = k\{1, g\}$ и $\operatorname{char} k \neq 2$. Тогда по [7] (H,R) — треугольная алгебра Хопфа, где нетривиальный элемент R задан равенством

$$R = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes g + g \otimes 1 - g \otimes g).$$

Пусть $C = k\{X, Y, Z, E\}$ — коалгебра, на которой коумножение и коединица заданы соответственно равенствами

$$\Delta_C(X) = X \otimes X, \quad \Delta_C(Y) = Y \otimes Y, \quad \Delta_C(Z) = Z \otimes Z, \quad \Delta_C(E) = E \otimes E,$$
$$\varepsilon_C(X) = \varepsilon_C(Y) = \varepsilon_C(Z) = \varepsilon_C(E) = 1.$$

Определим структуру правого H-модуля:

$$X \cdot 1 = X,\ X \cdot g = Y,\ Y \cdot 1 = Y,\ Y \cdot g = X,\ Z \cdot 1 = Z,\ Z \cdot g = Z,\ E \cdot 1 = E,\ E \cdot g = E.$$

Тогда легко проверяется, что C — правая H-модульная коалгебра.

(1) Из примера 1 получаем (H,R)-коалгебру Ли (C, Δ), на которой коскобка Ли задана равенствами

$$\Delta(X) = \frac{1}{2}(X \otimes X - X \otimes Y - Y \otimes X + Y \otimes Y),$$
$$\Delta(Y) = \frac{1}{2}(X \otimes X - X \otimes Y - Y \otimes X + Y \otimes Y), \quad \Delta(Z) = \Delta(E) = 0.$$

(2) Очевидно, что R — правый коцикл на H. Тогда по определению 2.2 имеем

$$\Delta_R(X) = \Delta(X) \cdot R = \frac{1}{2}(X \otimes Y - X \otimes X - Y \otimes Y + Y \otimes X) = -\Delta(X),$$
$$\Delta_R(Y) = \Delta(Y) \cdot R = \frac{1}{2}(X \otimes Y - X \otimes X - Y \otimes Y + Y \otimes X) = -\Delta(Y),$$
$$\Delta_R(Z) = \Delta_R(E) = 0.$$

Предложение 2.2. *Пусть (H,R) — коммутативная и кокоммутативная треугольная алгебра Хопфа. Если (Γ,Δ) — (H,R)-коалгебра Ли и T — правый коцикл на H с обратным T^{-1}, то (Γ,Δ_T) является (H,R_T)-коалгеброй Ли, где $R_T=\sum T_i''^{-1}R_i't_i'\otimes T_i'^{-1}R_i''t_i''$.*

Доказательство. Во-первых, $\Delta_T(x)=-(\tau\Delta_T(x))\cdot R_T$. Действительно, по определению 2.2

$$
\begin{aligned}
-\tau\Delta_T(x)\cdot R_T &= -\sum(x_j\cdot T_i''\otimes x_i\cdot T_i')\cdot(T_i''^{-1}R_i't_i'\otimes T_i'^{-1}R_i''t_i'')\\
&= -\sum(x_j\cdot T_i''T_i''^{-1}R_i't_i'\otimes x_i\cdot T_i'T_i'^{-1}R_i''t_i'') = -\sum(x_j\cdot R_i't_i'\otimes x_i\cdot R_i''t_i'')\\
&= \Big(-\sum x_j\cdot R_i'\otimes x_i\cdot R_i''\Big)\cdot T = \Big(\sum x_i\otimes x_j\Big)\cdot T = \Delta_T(x),
\end{aligned}
$$

где $T^{-1}=\sum T_i'^{-1}\otimes T_i''^{-1}$ и $T=\sum t_i'\otimes t_i''$.

Во-вторых, докажем справедливость R_T-котождества Якоби. Обозначим $\Delta_T(x)$ через $\sum \bar{x}_i\otimes\bar{x}_j$, тогда

$$
\begin{aligned}
\sum \bar{x}_{ii}\otimes\bar{x}_{ij}\otimes\bar{x}_j &= \sum\Delta_T(x_i\cdot T_i')\otimes x_j\cdot T_i'' = \sum(x_{ii}\cdot T_{i1}')\cdot t_i'\otimes(x_{ij}\cdot T_{i2}')\cdot t_i''\otimes x_j\cdot T_i''\\
&= \sum x_{ii}\cdot T_{i1}'t_i'\otimes x_{ij}\cdot T_{i2}'t_i''\otimes x_j\cdot T_i''. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Заметим, что Δ является гомоморфизмом правых H-модулей.

Запишем R_T в виде $\sum \overline{R}_i'\otimes\overline{R}_i''$. Тогда по предложению 2.1 $\sum\overline{R}_{i1}'\otimes\overline{R}_{i2}'\otimes\overline{R}_i''=\sum\overline{R}_i'\otimes\bar{r}_i'\otimes\overline{R}_i''\bar{r}_i''$, поэтому

$$
\begin{aligned}
\sum\bar{x}_{ij}\cdot\overline{R}_{i1}'\otimes\bar{x}_j\cdot\overline{R}_{i2}'\otimes\bar{x}_{ii}\cdot\overline{R}_i'' &= \sum(\bar{x}_{ij}\otimes\bar{x}_j\otimes\bar{x}_{ii})\cdot(\overline{R}_{i1}'\otimes\overline{R}_{i2}'\otimes\overline{R}_i'')\\
&\overset{(*)}{=} \sum x_{ij}\cdot T_{i2}'t_i''t_i''^{-1}r_i'\tilde{t}_i'\otimes x_j\cdot T_i''T_i''^{-1}R_i'\bar{t}_i'\otimes x_{ii}\cdot T_{i1}'t_i't_i'^{-1}r_i''\tilde{t}_i''T_i'^{-1}R_i''\bar{t}_i''\\
&\qquad\qquad\Big(T=\sum\bar{t}_i\otimes\bar{t}_i''=\sum\tilde{t}_i\otimes\tilde{t}_i''\Big)\\
&= \sum x_{ij}\cdot T_{i2}'t_i''t_i''^{-1}\tilde{t}_i'r_i'\otimes x_j\cdot T_i''T_i''^{-1}R_i'\bar{t}_i'\otimes x_{ii}\cdot T_{i1}'t_i't_i'^{-1}T_i'^{-1}R_i''\bar{t}_i''r_i''\tilde{t}_i''\\
&\qquad\qquad(H\ \text{коммутативна})\\
&= \sum x_{ij}\cdot T_{i2}'r_i'\tilde{t}_i'\otimes x_j\cdot T_i''T_i''^{-1}R_i'\bar{t}_i'\otimes x_{ii}\cdot T_{i1}'T_i'^{-1}R_i''\bar{t}_i''r_i''\tilde{t}_i''\\
&= \sum x_{ij}\cdot T_{i1}'r_i'\tilde{t}_i'\otimes x_j\cdot T_i''T_i''^{-1}R_i'\bar{t}_i'\otimes x_{ii}\cdot T_{i2}'\tilde{t}_i''T_i'^{-1}R_i''r_i''\tilde{t}_i''\\
&\qquad\qquad(H\ \text{кокоммутативна})\\
&= \sum x_{ij}\cdot T_i'r_i'\otimes x_j\cdot T_{i2}''t_i''T_i''^{-1}R_i'\bar{t}_i'\otimes x_{ii}\cdot T_{i1}''t_i'T_i'^{-1}R_i''r_i''\bar{t}_i''\\
&\qquad\qquad(T\ \text{— правый коцикл})\\
&= \sum x_{ij}\cdot T_i'r_i'\otimes x_j\cdot T_{i1}''\bar{t}_i'R_i'\otimes x_{ii}\cdot T_{i2}''\bar{t}_i''R_i''r_i''\\
&= \sum x_{ij}\cdot T_{i1}'t_i'r_i'\otimes x_j\cdot T_{i2}'t_i''R_i'\otimes x_{ii}\cdot T_i''R_i''r_i''
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\sum\bar{x}_j\cdot\overline{R}_i'\otimes\bar{x}_{ii}\cdot\overline{R}_{i1}''\otimes\bar{x}_{ij}\cdot\overline{R}_{i2}'' \overset{(*)}{=} \sum(x_j\cdot T_i''\otimes x_{ii}\cdot T_{i1}'t_i'\otimes x_{ij}\cdot T_{i2}'t_i'')\cdot(\overline{R}_i'\otimes\overline{R}_{i1}''\otimes\overline{R}_{i2}'')\\
&= \sum(x_j\cdot T_i''\otimes x_{ii}\cdot T_{i1}'t_i'\otimes x_{ij}\cdot T_{i2}'t_i'')\cdot(T_i''^{-1}R_i'\tilde{t}_i't_i''^{-1}r_i'\bar{t}_i'\otimes t_i'^{-1}r_i''\bar{t}_i''\otimes T_i'^{-1}R_i''\tilde{t}_i'')\\
&\quad= \sum x_j\cdot T_i''T_i''^{-1}R_i'\tilde{t}_i't_i''^{-1}r_i'\bar{t}_i'\otimes x_{ii}\cdot T_{i1}'t_i't_i'^{-1}r_i''\bar{t}_i''\otimes x_{ij}\cdot T_{i2}'t_i''T_i'^{-1}R_i''\tilde{t}_i''\\
&\quad= \sum x_j\cdot T_{i2}''t_i''T_i''^{-1}R_i'\tilde{t}_i't_i''^{-1}r_i'\bar{t}_i'\otimes x_{ii}\cdot T_i't_i'^{-1}r_i''\bar{t}_i''\otimes x_{ij}\cdot T_{i1}''t_i'T_i'^{-1}R_i''\tilde{t}_i''
\end{aligned}
$$

(T — правый коцикл)

$$
\begin{aligned}
&= \sum x_j\cdot T''_{i2}R'_ir'_i\tilde t'_it''^{-1}_i\bar t'_i\otimes x_{ii}\cdot T'_it'^{-1}_ir''_i\bar t''_i\otimes x_{ij}\cdot T''_{i1}R''_i\tilde t''_i\\
&= \sum x_j\cdot T''_{i1}\tilde t'_iR'_ir'_it''^{-1}_i\bar t'_i\otimes x_{ii}\cdot T'_it'^{-1}_ir''_i\bar t''_i\otimes x_{ij}\cdot T''_{i2}\tilde t''_iR''_i\\
&= \sum x_j\cdot T'_{i2}t''_iR'_ir'_it''^{-1}_i\bar t'_i\otimes x_{ii}\cdot T'_{i1}t'_it'^{-1}_ir''_i\bar t''_i\otimes x_{ij}\cdot T''_iR''_i\\
&= \sum x_j\cdot T'_{i1}\bar t'_iR'_ir'_i\otimes x_{ii}\cdot T'_{i2}\bar t''_ir''_i\otimes x_{ij}\cdot T''_iR''_i.
\end{aligned}
$$

Следовательно, по R-котождеству Якоби

$$
\begin{aligned}
\sum \bar x_{ii}\otimes\bar x_{ij}\otimes\bar x_j &+ \sum\bar x_{ij}\cdot\overline{R}'_{i1}\otimes\bar x_j\cdot\overline{R}'_{i2}\otimes\bar x_{ii}\cdot\overline{R}''_i\\
&+\sum\bar x_j\cdot\overline{R}'_i\otimes\bar x_{ii}\cdot\overline{R}''_{i1}\otimes\bar x_{ij}\cdot\overline{R}''_{i2}\\
&=\sum x_{ii}\cdot T'_{i1}t'_i\otimes x_{ij}\cdot T'_{i2}t''_i\otimes x_j\cdot T''_i\\
&+\sum x_{ij}\cdot T'_{i1}t'_ir'_i\otimes x_j\cdot T'_{i2}t''_iR'_i\otimes x_{ii}\cdot T''_iR''_ir''_i\\
&+\sum x_j\cdot T'_{i1}t'_iR'_ir'_i\otimes x_{ii}\cdot T'_{i2}t''_ir''_i\otimes x_{ij}\cdot T''_iR''_i\\
&=\sum(x_{ii}\otimes x_{ij}\otimes x_j+x_{ij}\cdot r'_i\otimes x_j\cdot R'_i\otimes x_{ii}\cdot R''_ir''_i\\
&+x_j\cdot R'_ir'_i\otimes x_{ii}\cdot r''_i\otimes x_{ij}\cdot R''_i)\cdot(T'_{i1}t'_i\otimes T'_{i2}t''_i\otimes T''_i)\\
&=\sum(x_{ii}\otimes x_{ij}\otimes x_j+x_{ij}\cdot R'_{i1}\otimes x_j\cdot R'_{i2}\otimes x_{ii}\cdot R''_i\\
&+x_j\cdot R'_i\otimes x_{ii}\cdot R''_{i1}\otimes x_{ij}\cdot R''_{i2})\cdot(T'_{i1}t'_i\otimes T'_{i2}t''_i\otimes T''_i)=0. \quad\square
\end{aligned}
$$

Пример 3. (1) Пусть $H=kZ_2=k\{1,g\}$, $\operatorname{char}k\neq 2$, и (H,R) — треугольная алгебра Хопфа из примера 2. Легко показать, что $T=g\otimes 1+1\otimes g-g\otimes g$ — правый коцикл на H с обратным $T^{-1}=\frac{1}{3}(1\otimes g+g\otimes 1+2\otimes 1-g\otimes g)$. Таким образом, по предложению 2.2 имеем

(a) пусть (Γ,Δ) — (H,R)-коалгебра Ли, тогда Γ^T является (H,R_T)-коалгеброй Ли, где

$$R_T=(\tau T^{-1})RT=\frac{1}{6}(1\otimes 1-5g\otimes g+3g\otimes 1+5\otimes g);$$

(b) пусть C — правая H-модульная коалгебра, тогда в силу примера 1 (C,Δ) является (H,R)-коалгеброй Ли, на которой коскобка задана равенством

$$\Delta(c)=\sum(c_1\otimes c_2-c_2\cdot R'_i\otimes c_1\cdot R''_i).$$

Поэтому (C^T,Δ_T) является (H,R_T)-коалгеброй Ли, на которой коскобка Ли задана правилом

$$\Delta_T(x)=\sum x_i\cdot T'_i\otimes x_j\cdot T''_i,$$

где $\Delta(x)=\sum x_i\otimes x_j$ и

$$R_T=(\tau T^{-1})RT=\frac{1}{6}(1\otimes 1-5g\otimes g+3g\otimes 1+5\otimes g).$$

(2) Пусть (H,R) — коммутативная и кокоммутативная треугольная алгебра Хопфа. Тогда H является правой H-модульной коалгеброй с умножением алгебры H и (H,Δ) — (H,R)-коалгеброй Ли с коскобкой Ли $\Delta(h)=\Delta_H(h)(1\otimes 1-R)$ в силу примера 1.

Легко видеть, что R — правый коцикл на H, поэтому в силу (CT^{-1}) мы знаем, что R^{-1} также является правым коциклом на H и $(H^{R^{-1}}, \Delta_{R^{-1}})$ — (H, R^{-1})-коалгеброй Ли с коскобкой Ли

$$\Delta_{R^{-1}}(h) = \Delta(h)R^{-1} = \Delta_H(h)(R^{-1} - 1 \otimes 1).$$

Заметим, что $H^{R^{-1}} = H$ является правым H-модулем и

$$R_{R^{-1}} = (\tau(R^{-1})^{-1})RR^{-1} = \tau R = R^{-1}.$$

Следующая лемма проверяется непосредственно.

Лемма 2.1. *Пусть H — коммутативная алгебра Хопфа, C — правая H-модульная коалгебра и T — правый коцикл на H. Определим $\Delta_C(T) : C \to C \otimes C$, $c \mapsto \sum c_1 \cdot T_i' \otimes c_2 \cdot T_i''$, тогда $(C, \Delta_C(T))$ также является правой H-модульной коалгеброй.*

Предложение 2.3. *Пусть (H, R) — коммутативная и кокоммутативная треугольная алгебра Хопфа и T — правый коцикл на H. Тогда*

$$(C_R, \Delta, R_T) \cong (C^T, \Delta_T, R)$$

для любой правой H-модульной коалгебры C, где коскобка Ли коалгебры (C_R, Δ, R_T) задана в примере 1, а коскобка Ли коалгебры (C^T, Δ_T, R) — в определении 2.2.

Доказательство. По лемме 2.1 и примеру 1 коскобка Ли коалгебры Ли (C_R, Δ, R_T) задана так:

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \sum \bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2 - \bar{x}_2 \cdot \overline{R}_i' \otimes \bar{x}_1 \cdot \overline{R}_i'' \\ &\qquad\qquad (\Delta_C(T)(x) = \textstyle\sum \bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2, R_T = \sum \overline{R}_i' \otimes \overline{R}_i'') \\ &= \sum [x_1 \cdot T_i' \otimes x_2 \cdot T_i'' - (x_2 \cdot T_i'') \cdot \overline{R}_i' \otimes (x_1 \cdot T_i') \cdot \overline{R}_i''] \\ &\qquad\qquad (\Delta_C(T)(x) = \textstyle\sum x_1 \cdot T_i' \otimes x_2 \cdot T_i'') \\ &= \sum (x_1 \cdot T_i' \otimes x_2 \cdot T_i'' - x_2 \cdot T_i'' T_i''^{-1} R_i' t_i' \otimes x_1 \cdot T_i' T_i'^{-1} R_i'' t_i'') \\ &= \sum (x_1 \cdot T_i' \otimes x_2 \cdot T_i'' - x_2 \cdot R_i' t_i' \otimes x_1 \cdot R_i'' t_i''),\end{aligned}$$

и по определению 2.2 и примеру 1 коскобка Ли коалгебры Ли (C^T, Δ_T, R) задана соотношениями

$$\begin{aligned}\Delta_T(x) = \Delta(x) \cdot T &= \sum (x_1 \otimes x_2 - x_2 \cdot R_i' \otimes x_1 \cdot R_i'') \cdot (T_i' \otimes T_i'') \\ &= \sum (x_1 \cdot T_i' \otimes x_2 \cdot T_i'' - x_2 \cdot R_i' t_i' \otimes x_1 \cdot R_i'' t_i'').\end{aligned}$$

Поэтому $(C_R, \Delta, R_T) \cong (C^T, \Delta_T, R)$. $\square$

Теорема 2.1. *Пусть (H, R) — коммутативная и кокоммутативная треугольная алгебра Хопфа. Если существует правый коцикл T на H такой, что $R = (\tau T)T^{-1}$, то существует биекция между множеством (H, R)-коалгебр Ли и множеством обычных коалгебр Ли.*

Доказательство. Пусть Γ — (H, R)-коалгебра Ли. Тогда по предложению 2.2 Γ^T является (H, R_T)-коалгеброй Ли и

$$R_T = \sum T_i''^{-1} R_i' t_i' \otimes T_i'^{-1} R_i'' t_i'' = \sum T_i''^{-1}(T_i'' t_i'^{-1}) t_i' \otimes T_i'^{-1}(T_i' t_i''^{-1}) t_i'' = 1 \otimes 1.$$

Поэтому Γ^T — обычная коалгебра Ли по примеру 1.

Обратно, если Γ — обычная коалгебра Ли, т. е. $(H, 1 \otimes 1)$-коалгебра Ли, то $\Gamma^{T^{-1}}$ является $(H, (1 \otimes 1)_{T^{-1}})$-коалгеброй Ли, где $(1 \otimes 1)_{T^{-1}} = \sum T_i'' t_i'^{-1} \otimes T_i' t_i''^{-1} = R$, т. е. $\Gamma^{T^{-1}}$ будет (H, R)-коалгеброй Ли.

Заметим, что T^{-1} — правый коцикл на H в силу (CT^{-1}).

Таким образом, согласно рассуждениям, проведенным выше, для любой коалгебры Ли Γ имеем $(\Gamma^{T^{-1}})^T = \Gamma$, а для любой (H, R)-коалгебры Ли $\top$ будет $(\top^T)^{T^{-1}} = \top$. $\square$

§ 3. $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{R})$-биалгебры Ли

Определение 3.1. Пусть (H, R) — треугольная алгебра Хопфа. Согласно [6] (H, R)-*алгебра Ли* — это правый H-модуль L вместе с R-скобкой Ли $[\ ,\ ]_R : L \otimes L \to L$, являющейся H-модульным морфизмом и удовлетворяющей

(1) свойству R-антикоммутативности $[x, y]_R = -\sum [y \cdot R_i'', x \cdot R_i']_R$, т. е. $[\ ,\ ]_R(x \otimes y) = -[\ ,\ ]_R(\tau((x \otimes y) \cdot R))$,

(2) R-тождеству Якоби

$$\sum([x, [y, z]_R]_R + [z \cdot r_i'' R_i'', [x \cdot r_i', y \cdot R_i']_R]_R + [y \cdot R_i'', [z \cdot r_i'', x \cdot r_i' R_i']_R]_R) = 0.$$

К примеру, предположим, что A — правая H-модульная алгебра. Если взять $[a, b]_R = ab - \sum (b \cdot R_i'')(a \cdot R_i')$, то пара $(A, [\ ,\ ]_R)$ становится R-алгеброй Ли, как доказано в [6].

Предложение 3.1. *Пусть (H, R) — коммутативная треугольная алгебра Хопфа, $(L, [\ ,\ ]_R)$ — R-алгебра Ли и $T = \sum T_i' \otimes T_i''$ — правый коцикл на H такой, что*

$$\sum t_i' \otimes T_i' t_{i1}'' \otimes T_i'' t_{i2}'' = \sum T_i' t_{i1}'' \otimes T_i'' t_{i2}'' \otimes t_i'. \tag{3.1}$$

Тогда если положить $[x, y]_{R_T} = \sum [x \cdot T_i', y \cdot T_i'']_R$, то пара $(L^T, [\ ,\ ]_{R_T})$ является (H, R_T)-алгеброй Ли, где $R_T = \sum T_i''^{-1} R_i' t_i' \otimes T_i'^{-1} R_i'' t_i''$ и $L^T = L$ как правый H-модуль.

Доказательство. Представим $R_T = \sum T_i''^{-1} R_i' t_i' \otimes T_i'^{-1} R_i'' t_i''$ в виде $\sum \overline{R}_i' \otimes \overline{R}_i''$. Во-первых, докажем, что $[x, y]_{R_T} = -\sum [y \cdot \overline{R}_i'', x \cdot \overline{R}_i']_{R_T}$. Действительно, для всех $x, y \in L^T = L$ по определению 3.1 имеем

$$\begin{aligned} -\sum [y \cdot \overline{R}_i'', x \cdot \overline{R}_i']_{R_T} &= -\sum [y \cdot T_i'^{-1} R_i'' t_i'', x \cdot T_i''^{-1} R_i' t_i']_{R_T} \\ &= -\sum [y \cdot T_i'^{-1} R_i'' t_i'' T_i', x \cdot T_i''^{-1} R_i' t_i' T_i'']_R = -\sum [y \cdot R_i'' t_i'', x \cdot R_i' t_i']_R \\ &= \sum [x \cdot t_i', y \cdot t_i'']_R = [x, y]_{R_T}. \end{aligned}$$

Во-вторых, докажем справедливость R_T-тождества Якоби. Действительно, для всех $x, y, z \in L^T$ получим

$$\begin{aligned} &\sum [x, [y, z]_{R_T}]_{R_T} + [z \cdot r_i'' R_i'', [x \cdot r_i', y \cdot R_i']_{R_T}]_{R_T} + [y \cdot R_i'', [z \cdot r_i'', x \cdot r_i' R_i']_{R_T}]_{R_T} \\ &= \sum [x \cdot t_i', [y \cdot T_i' t_{i1}'', z \cdot T_i'' t_{i2}'']_R]_R + [z \cdot t_i' r_i'' R_i'', [x \cdot T_i' t_{i1}'' r_i', y \cdot T_i'' t_{i2}'' R_i']_R]_R \\ &\qquad + [y \cdot T_i' R_i'', [z \cdot t_i' T_{i1}'' r_i'', x \cdot t_i'' T_{i2}'' r_i' R_i']_R]_R \\ &= -\sum [z \cdot T_i'' t_{i2}'' r_i'' R_i'', [x \cdot t_i' r_i', y \cdot T_i' t_{i1}'' R_i']_R]_R - [y \cdot T_i' t_{i1}'' R_i'', [z \cdot T_i'' t_{i2}'' r_i'', x \cdot t_i' r_i' R_i']_R]_R \\ &\qquad + [z \cdot t_i' r_i'' R_i'', [x \cdot T_i' t_{i1}'' r_i', y \cdot T_i'' t_{i2}'' R_i']_R]_R + [y \cdot T_i' R_i'', [z \cdot t_i' T_{i1}'' r_i'', x \cdot t_i'' T_{i2}'' r_i' R_i']_R]_R \end{aligned}$$

$$= -\sum [z\cdot t_i' r_i'' R_i'', [x\cdot T_i' t_{i1}'' r_i', y\cdot T_i'' t_{i2}'' R_i']_R]_R - [y\cdot t_i' R_i'', [z\cdot T_i' t_{i1}'' r_i'', x\cdot T_i'' t_{i2}'' r_i' R_i']_R]_R$$
$$+ [z\cdot t_i' r_i'' R_i'', [x\cdot T_i' t_{i1}'' r_i', y\cdot T_i'' t_{i2}'' R_i']_R]_R + [y\cdot T_i' R_i'', [z\cdot t_i' T_{i1}'' r_i'', x\cdot t_i'' T_{i2}'' r_i' R_i']_R]_R = 0.$$

Первое из этих равенств следует из R-тождества Якоби, а последнее — из (3.1). □

Пример 4. Пусть $(H = kZ_2, R)$ — коммутативная треугольная алгебра Хопфа из примера 2, а $T = g\otimes 1 + 1\otimes g - g\otimes g$ — правый коцикл на H, заданный в примере 3. Легко видеть, что правый коцикл T удовлетворяет (3.1). Тогда по предложению 3.1 для любой R-алгебры Ли $(L, [\ ,\ ]_R)$ пара $(L^T, [\ ,\ ]_{R^T})$ является также (H, R_T)-алгеброй Ли, где $R_T = \frac{1}{6}(1\otimes 1 - 5g\otimes g + 3g\otimes 1 + 5\otimes g)$.

Определение 3.2. Пусть $(L, [\ ,\ ]_R)$ — (H,R)-алгебра Ли и (L, Δ) — (H,R)-коалгебра Ли. Если для всех $x, y \in L$

$$\Delta[x,y]_R = x\cdot_R \Delta(y) - y\cdot_R \Delta(x), \tag{LB}$$

то $(L, [\ ,\ ]_R, \Delta, R)$ называется (H,R)-*биалгеброй Ли*, где действие «$\cdot$» задано равенством

$$x\cdot_R (a\otimes b) = [x,a]_R \otimes b + a\otimes [x,b]_R.$$

Если $(L, [\ ,\ ]_R)$ — обычная алгебра Ли и (L, Δ) — (H,R)-коалгебра Ли такая, что она является (H,R)-биалгеброй Ли, то $(L, [\ ,\ ], \Delta, R)$ называется (H,R)-*биалгеброй Ли* обычной *алгебры Ли*; если (L, Δ) — обычная коалгебра Ли и $(L, [\ ,\ ]_R)$ — (H,R)-алгебра Ли такая, что она является (H,R)-биалгеброй Ли, то $(L, [\ ,\ ]_R, \Delta, R)$ называется (H,R)-*биалгеброй Ли* обычной *коалгебры Ли*.

Пример 5. Пусть $(H = kZ_2, R)$ — треугольная алгебра Хопфа и $C = k\{X, Y, Z, E\}$ — правая H-модульная коалгебра, приведенная в примере 2.

(1) Пусть $[X,Y] = Z = -[Y,X]$, $[Y,Z] = X = -[Z,Y]$, $[Z,X] = Y = -[X,Z]$, $[E,\cdot] = 0 = [\cdot, E]$ и $[c,c] = 0$ для всех $c \in C$. Тогда легко показать, что $(C, [\ ,\ ])$ является алгеброй Ли.

В соответствии с примером 2 (C, Δ) является (H,R)-коалгеброй Ли с коскобкой Ли, заданной соотношениями

$$\Delta(X) = \frac{1}{2}(X\otimes X - X\otimes Y - Y\otimes X + Y\otimes Y),$$
$$\Delta(Y) = \frac{1}{2}(X\otimes X - X\otimes Y - Y\otimes X + Y\otimes Y), \quad \Delta(Z) = \Delta(E) = 0.$$

Однако $(C, \Delta, [\ ,\ ], R)$ не является (H,R)-биалгеброй Ли обычной алгебры Ли, поскольку

$$\Delta[Z,X] = \Delta(Y) = \frac{1}{2}(X\otimes X - X\otimes Y - Y\otimes X + Y\otimes Y)$$

и

$$Z\cdot\Delta(X) - X\cdot\Delta(Z) = Z\cdot\left\{\frac{1}{2}(X\otimes X - X\otimes Y - Y\otimes X + Y\otimes Y)\right\} - X\cdot 0$$
$$= \frac{1}{2}[Z\cdot(X\otimes X) - Z\cdot(X\otimes Y) - Z\cdot(Y\otimes X) + Z\cdot(Y\otimes Y)]$$
$$= \frac{1}{2}(Y\otimes X + X\otimes Y - Y\otimes Y + X\otimes X + X\otimes X - Y\otimes Y - X\otimes Y - Y\otimes X)$$
$$= X\otimes X - Y\otimes Y \neq \frac{1}{2}(X\otimes X - X\otimes Y - Y\otimes X + Y\otimes Y).$$

(2) В [10] авторы ввели понятие квантовой расширенной $(1+1)$-алгебры Галилея $\tilde{\mathrm{g}}$ $(=C)$: это четырехмерная действительная алгебра Ли, порожденная элементами X (ускорение), Y (сдвиг времени), Z (сдвиг пространства) и E (масса частицы в свободной кинематике). Скобка Ли алгебры $\tilde{\mathrm{g}}$ задается равенствами

$$[X,Y]=Z,\quad [X,Z]=E,\quad [Y,Z]=0,\quad [E,\cdot]=0.$$

Используя коскобку Ли из примера 2, можно показать, что $(\tilde{\mathrm{g}},\Delta)$ является (H,R)-коалгеброй Ли. Но $(\tilde{\mathrm{g}},\Delta,[\ ,\ ],R)$ не является (H,R)-биалгеброй Ли обычной алгебры Ли. Действительно, $\Delta[X,Z]=\Delta(E)=0$ и

$$\begin{aligned}X\cdot\Delta(Z)-Z\cdot\Delta(X)&=X\cdot 0-Z\cdot\Delta(X)=-Z\cdot\Delta(X)\\&=-Z\cdot\frac{1}{2}(X\otimes X-X\otimes Y-Y\otimes X+Y\otimes Y)\\&=\frac{1}{2}[Z\cdot(X\otimes Y)+Z\cdot(Y\otimes X)-Z\cdot(X\otimes X)-Z\cdot(Y\otimes Y)]\\&=\frac{1}{2}\{-E\otimes Y-Y\otimes E+E\otimes X+X\otimes E\}\neq\Delta[X,Z].\end{aligned}$$

(3) Пусть $[X,Y]=Z=-[Y,X]$, $[Z,\cdot]=0=[\cdot,Z]$, $[E,\cdot]=0=[\cdot,E]$. Тогда $(C,[\ ,\ ])$ — алгебра Ли и $(C,\Delta,[\ ,\ ],R)$ является (H,R)-биалгеброй Ли обычной алгебры Ли.

Действительно, $\Delta[X,Y]=\Delta(Z)=0$ и

$$\begin{aligned}X\cdot\Delta(Y)-Y\cdot\Delta(X)&=X\cdot\left\{\frac{1}{2}(X\otimes X-X\otimes Y-Y\otimes X+Y\otimes Y)\right\}\\&\quad-Y\cdot\left\{\frac{1}{2}(X\otimes X-X\otimes Y-Y\otimes X+Y\otimes Y)\right\}\\&=\frac{1}{2}[X\cdot(X\otimes X)-X\cdot(X\otimes Y)-X\cdot(Y\otimes X)+X\cdot(Y\otimes Y)]\\&\quad-\frac{1}{2}[Y\cdot(X\otimes X)-Y\cdot(X\otimes Y)-Y\cdot(Y\otimes X)+Y\cdot(Y\otimes Y)]\\&=\frac{1}{2}\{-[X,X]\otimes Y-X\otimes[X,Y]-[X,Y]\otimes X-Y\otimes[X,X]+[X,Y]\otimes Y+Y\otimes[X,Y]\}\\&\quad-\frac{1}{2}\{[Y,X]\otimes X+X\otimes[Y,X]-[Y,X]\otimes Y-X\otimes[Y,Y]-[Y,Y]\otimes X-Y\otimes[Y,X]\}\\&=\frac{1}{2}(-X\otimes Z-Z\otimes X+Z\otimes Y+Y\otimes Z)-\frac{1}{2}(-Z\otimes X-X\otimes Z+Z\otimes Y+Y\otimes Z)=0,\end{aligned}$$

поэтому $\Delta[X,Y]=X\cdot\Delta(Y)-Y\cdot\Delta(X)$.

Легко показать, что $\Delta[Y,Z]=Y\cdot\Delta(Z)-Z\cdot\Delta(Y)$ и $\Delta[Z,X]=Z\cdot\Delta(X)-X\cdot\Delta(Z)$.

Заметим, что $\Delta[E,P]=0=E\cdot\Delta(P)-P\cdot\Delta(E)$ для всех $P\in\{X,Y,Z\}$. Таким образом, $(C,\Delta,[\ ,\ ],R)$ является (H,R)-биалгеброй Ли обычной алгебры Ли.

Теорема 3.1. *Пусть (H,R) — коммутативная и кокоммутативная треугольная алгебра Хопфа и $(L,[\ ,\ ],\Delta,R)$ — (H,R)-биалгебра Ли обычной алгебры Ли. Если существует правый коцикл T на H такой, что*

$$\sum[-,x\cdot T_i']\otimes T_i''=\sum[-,x]\cdot T_i'\otimes T_i'' \tag{3.2}$$

для всех $x \in L$, то $(L^T, [\ ,\ ], \Delta_T, R_T)$ является (H, R_T)-биалгеброй Ли обычной алгебры Ли.

Доказательство. По предложению 2.2 (L^T, Δ_T) является (H, R_T)-коалгеброй Ли, поэтому мы должны только показать, что $\Delta_T[x,y] = x \cdot \Delta_T(y) - y \cdot \Delta_T(x)$.

Для всех $x, y \in L^T$ имеем

$$\begin{aligned}\Delta_T[x,y] &= (\Delta[x,y]) \cdot T = (x \cdot \Delta(y) - y \cdot \Delta(x)) \cdot T \\ &= \sum([x,y_i] \otimes y_j + y_i \otimes [x,y_j] - [y,x_i] \otimes x_j - x_i \otimes [y,x_j]) \cdot T \\ &= \sum([x,y_i]\cdot T_i' \otimes y_j \cdot T_i'' + y_i \cdot T_i' \otimes [x,y_j]\cdot T_i'' - [y,x_i]\cdot T_i' \otimes x_j \cdot T_i'' - x_i \cdot T_i' \otimes [y,x_j]\cdot T_i'') \\ &= \sum([x,y_i \cdot T_i'] \otimes y_j \cdot T_i'' + y_i \cdot T_i' \otimes [x,y_j \cdot T_i''] - [y,x_i \cdot T_i'] \otimes x_j \cdot T_i'' - x_i \cdot T_i' \otimes [y,x_j \cdot T_i'']) \\ &= x \cdot \Delta_T(y) - y \cdot \Delta_T(x),\end{aligned}$$

поэтому $(L^T, [\ ,\ ], \Delta_T, R_T)$ является (H, R_T)-биалгеброй Ли обычной алгебры Ли. $\square$

Если в теореме 3.1 $(L, [\ ,\ ], \Delta)$ — обычная биалгебра Ли, т. е. $(H, 1 \otimes 1)$-биалгебра Ли, то легко получаем

Следствие 3.1. *Пусть H — коммутативная и кокоммутативная треугольная алгебра Хопфа и $(L, [\ ,\ ], \Delta)$ — обычная биалгебра Ли. Если существует правый коцикл T на H такой, что для всех $x \in L$ выполняется (3.2), то $(L^T, [\ ,\ ], \Delta_T, R)$ является (H, R)-биалгеброй Ли обычной алгебры Ли, где $R = (1 \otimes 1)_T = \sum T_i''^{-1} t_i' \otimes T_i'^{-1} t_i''$.*

Из теорем 2.1 и 3.1 вытекает

Следствие 3.2. *Пусть (H, R) — коммутативная и кокоммутативная треугольная алгебра Хопфа и T — правый коцикл на H такой, что $R = (\tau T)T^{-1}$. Пусть $\mathscr{L}_{T-\mathrm{inv}}$ — множество всех (H, R)-биалгебр Ли обычной алгебры Ли $(L, [,])$ таких, что для всех $x \in L$ выполнено (3.2). Тогда существует биекция между $\mathscr{L}_{T-\mathrm{inv}}$ и множеством всех обычных биалгебр Ли.*

Данная работа была частично выполнена во время визита автора в университет г. Siudad (Аргентина). Автор хотел бы также поблагодарить профессора Николáс Андрускиевич за его любезное гостеприимство и профессора Динг Нанкин за его поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Michaelis W.* The dual Poincaré–Birkhoff–Witt theorem // Adv. Math. 1985. V. 57, N 1. P. 93–162.
2. *Nichols W. D.* The structure of the dual Lie algebra of the Witt algebra // J. Pure Appl. Algebra. 1990. V. 68, N 3. P. 359–364.
3. *Drinfel'd V. G.* Quantum groups // Proc. Intern. Congress of mathematicians. California: Berkeley, 1987. P. 798–820.
4. *Taft E. J.* Witt and Virasoro algebras as Lie bialgebras // J. Pure Appl. Algebra. 1993. V. 87, N 3. P. 301–312.
5. *Michaelis W.* A class of infinite-dimensional Lie bialgebras containing the Virasoro algebra // Adv. Math. 1994. V. 107, N 3. P. 365–392.
6. *Bahturin Y., Fischman D., Montgomery S.* Bicharacters, twistings, and Scheunert's theorem for Hopf algebras // J. Algebra. 2001. V. 236, N 1. P. 246–276.
7. *Montgomery S.* Hopf algebras and their actions on rings. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. (Regional Conference Series in Mathematics; V. 82).

8. *Michaelis W.* Lie coalgebras // Adv. Math. 1980. V. 38, N 1. P. 1–54.

9. *Gurievich D., Majid S.* Braided groups and Hopf algebras by twisting // Pacific J. Math. 1994. V. 162, N 1. P. 27–43.

10. *Ballesteros A., Celeghini E., Herranz F. J.* Quantum (1+1) extended Galilei algebras: from Lie bialgebras to quantum R-matrices and integrable systems // J. Phys. A. 2000. V. 33, N 17. P. 3431–3444.

Статья поступила 21 марта 2005 г.

Zhang Liang-yun (Чжан Лян-Юнь)
Department of Mathematics, Nanjing Agricultural University,
Nanjing 210095, P.R.China
Department of Mathematics, Nanjing University,
Nanjing 210008, P.R.China
zlyun8@jlonline.com