*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5*

*УДК 517.5*

# О МЕТОДАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТОЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СУММАМИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**В. Э. Исмаилов**

**Аннотация:** Предлагается эффективный в смысле практического применения способ нахождения точного значения наилучшего приближения функции двух переменных суммами функций одной переменной в специальных многоугольниках со сторонами, параллельными координатным осям.

**Ключевые слова:** наилучшее приближение, молния, максимальная молния.

**1.** Известно, что приближенное представление функций многих переменных простыми комбинациями функций меньшего числа переменных представляет помимо теоретического значительный практический интерес. Как правило, в приложениях требуется заранее определить, является ли тот или иной приближающий аппарат пригодным для практических целей? Поэтому вычисление точного значения погрешности данного приближения (если это удается) или получение оценок этой погрешности весьма важны.

Одной из первых и содержательных задач теории приближения комбинациями функций меньшего числа переменных является задача равномерной аппроксимации функции $f(x,y)$ суммами $\varphi(x)+\psi(y)$.

Пусть $Q$ — компакт в плоскости $\mathbb{R}^2, Q_1$ и $Q_2$ — его проекции на оси координат, $C(Q)$, $C(Q_i)$, $i=1,2,$ — пространства вещественных непрерывных функций на $Q$ и $Q_i$, $i=1,2$, соответственно, снабженные обычной равномерной нормой. Через $D(Q)$ обозначим подпространство в $C(Q)$, состоящее из всех функций вида $\varphi(x)+\psi(y)$, где $\varphi(x)\in C(Q_1)$ и $\psi(y)\in C(Q_2)$. Рассмотрим приближение функции $f(x,y)\in C(Q)$ функциями из $D(Q)$. Наилучшее приближение определяется как расстояние от функции $f$ до многообразия $D(Q)$:

$$E(f)=E(f,Q)=\rho(f,D(Q))=\inf_{\varphi+\psi\in D(Q)}\|f-\varphi-\psi\|_{C(Q)}.$$

Если существует функция $\varphi_0(x)+\psi_0(y)$ из $D(Q)$ такая, что

$$E(f)=\|f-\varphi_0-\psi_0\|_{C(Q)},$$

то будем называть ее *наилучшей приближающей суммой для* $f$.

Конечную последовательность $l:[p_1,p_2,\dots,p_n]$ точек из $Q$ назовем *молнией*, если $p_i\neq p_{i+1}$, каждый из отрезков (звено молнии) $p_ip_{i+1}$ параллелен либо оси $x$, либо оси $y$ и два соседних отрезка $p_ip_{i+1}$ и $p_{i+1}p_{i+2}$ перпендикулярны.

Молния $l:[p_1,p_2,\dots,p_n]$ называется *замкнутой*, если $p_np_1\perp p_1p_2$ (в этом случае обязательно $n$ — четное число). Понятие молнии введено В. И. Арнольдом [1] при решении тринадцатой проблемы Гильберта. Оно применялось (часто под другими названиями) в большинстве работ, связанных с изучаемыми здесь вопросами.

Каждой замкнутой молнии $l : [p_1, p_2, \dots, p_{2n}]$ сопоставим линейный функционал

$$r(f, l) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} f(p_i). \tag{1}$$

В положившей начало многочисленным исследованиям работе [2] предлагается формула

$$E(f, I) = \sup_{h \subset I} \{|r(f, h)|\}, \tag{2}$$

где $I = [0, 1]^2$ — единичный квадрат и точная верхняя грань берется по всем замкнутым молниям. Эта формула была доказана Ю. П. Офманом [3] для прямоугольника $[a, b] \times [c, d]$, Лайтом и Чени [4] для абстрактного случая $X \times Y$, где $X$ и $Y$ — компактные топологические пространства. С. Я. Хавинсон [5] доказал справедливость формулы (2) для более общих множеств, удовлетворяющих условию существования наилучшей приближающей суммы и условию, что любую молнию $l : [p_1, p_2, \dots, p_n]$ можно сделать замкнутой добавлением ограниченного числа точек $p_{n+1}, p_{n+2}, \dots, p_{n+s}$, $s \leq \nu$, $\nu$ не зависит от молнии $l$. Другие варианты этой формулы имеются в работах [6, 7].

Хотя формула (2) справедлива для всех непрерывных функций двух переменных и имеет важное теоретическое значение в вопросах аппроксимации суммами $\varphi(x) + \psi(y)$, она не устанавливает прямого способа вычисления наилучшего приближения. Дело в том, что, за исключением достаточно простых частных случаев (относительно некоторых таких случаев см. [8]), для вычисления наилучшего приближения этим способом следует найти значения приближаемой функции в бесконечном множестве точек.

Некоторыми авторами разработаны практические методы нахождения точного значения наилучшего приближения некоторых классов функций, определенных на прямоугольнике со сторонами, параллельными координатным осям. Например, формула

$$E(f, P) = \frac{1}{4}[f(a_1, a_2) + f(b_1, b_2) - f(a_1, b_2) - f(a_2, b_1)], \tag{3}$$

где $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, получена в [9] для функций $f(x, y)$ с неотрицательной смешанной производной $f_{xy}$, М-Б. А. Бабаевым [10] для функций с неотрицательной смешанной разностью $\Delta_{h_1 h_2} f$. Формулы типа (3) получены автором [11] для некоторых специальным образом построенных классов непрерывных функций. Заметим, что результаты из [9, 10] обобщены соответственно в [12, 13] на случай приближения функции $n$ переменных, определенных на параллелепипеде со сторонами, параллельными координатным осям, суммами функций $n-1$ переменных (см. [14] относительно усилений некоторых результатов работы [13]).

Следует отметить, что в известных методах доказательства формул типа (3) существенно используется тот факт, что прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, есть декартово произведение двух отрезков. Это положение, в свою очередь, затрудняет получение такого рода формул для других областей приближения известными способами.

Цель настоящей работы заключается в разработке новых эффективных в смысле практического применения методов нахождения точного значения наилучшего приближения некоторого класса функций $f(x,y)$, заданных на многоугольниках со сторонами, параллельными координатным осям.

**2.** Пусть $S$ — замкнутый многоугольник, который представляется в виде

$$S = \bigcup_{i=1}^{N-1} P_i, \tag{4}$$

где $N \geq 2$, $P_i = [a_i, a_{i+1}] \times [b_1, b_{N+1-i}]$, $i = \overline{1, N-1}$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_N$, $b_1 < b_2 < \cdots < b_N$. Через $M(S)$ обозначим класс непрерывных на $S$ функций $f(x,y)$, удовлетворяющих условию

$$f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2) - f(x_1,y_2) - f(x_2,y_1) \geq 0$$

для любого прямоугольника $P = [x_1,x_2] \times [y_1,y_2] \subset S$.

Определение 1. Замкнутый $2m$-угольник $F$ со сторонами, параллельными координатным осям, называется *максимальным $2m$-угольником* многоугольника $S$, если $F \subset S$ и не существует другого $2m$-угольника $F'$ такого, что $F \subset F' \subset S$.

Понятно, что если $F$ является максимальным $2m$-угольником многоугольника $S$, то $m \leq N$.

Определение 2. Замкнутая молния, все точки которой различны, называется *максимальной молнией* многоугольника $S$, если точки этой молнии являются вершинами некоторого максимального многоугольника.

Множество всех максимальных молний многоугольника $S$ обозначим через $S^B$.

**Теорема.** *Пусть множество $S$ представляется в виде (4). Тогда наилучшее приближение функции $f(x,y)$ из класса $M(S)$ может быть вычислено по формуле*

$$E(f,S) = \max\{|r(f,h)|,\ h \in S^B\}. \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что если $S$ представляется в виде (4), то количество максимальных молний многоугольника $S$ в точности равно $2^{N-1} - 1$ и всякая максимальная молния содержит точку $(a_1, b_1)$. Поэтому для того чтобы вычислить точное значение наилучшего приближения функции $f(x,y) \in M(S)$ по формуле (5), достаточно найти наибольшее из чисел $|r(f,h_i)|$, где $h_i \in S^B$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{N-1} - 1$.

Замечание 1. В частном случае, когда $S$ является прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям, вышеуказанная теорема равносильна известному результату М-Б. А. Бабаева из [10].

**Следствие.** *Пусть функция $f(x,y)$ имеет неотрицательную непрерывную смешанную производную на множестве $S$ вида (4): $f_{xy} \geq 0$, $(x,y) \in S$. Тогда для наилучшего приближения функции $f(x,y)$ справедлива формула (5).*

Замечание 2. В частном случае, когда $S$ является прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям, следствие равносильно известному результату Ривлина и Сибнера из [9].

Пусть дана произвольная замкнутая молния $l : [p_1, p_2, \ldots, p_{2n}]$. Точки $p_1, p_3, \ldots, p_{2n-1}$ назовем «+»-*точками*, а точки $p_2, p_4, \ldots, p_{2n}$ «−»-*точками* молнии $l$. Понятно, что значение $f(p_k)$ входит в выражение (1) со знаком $+$, если $p_k$ является «+»-точкой, и со знаком $-$, если $p_k$ является «−»-точкой молнии $l$.

Нам понадобится следующая вспомогательная

**Лемма.** *Пусть* $l : [p_1, p_2, \ldots, p_i, p_{i+1}, \ldots, p_{2n}]$ *— замкнутая молния многоугольника* $S$, $f(x, y) \in M(S)$ *и* $r(f, l) \geq 0$. *Кроме того, пусть точки* $p_i$ *и* $p_{i+1}$ *имеют одну и ту же абсциссу:* $p_i = (x_i, y_i)$, $p_{i+1} = (x_i, y_{i+1})$. *Тогда*

1. *Если* $p_i$ *является «+»-точкой («−»-точкой) молнии* $l$, $y_i < y_{i+1}$ *и существует такое* $h > 0$, *что точки* $p'_i = (x_i - h, y_i)$, $p'_{i+1} = (x_i - h, y_{i+1})$ *(точки* $p'_i = (x_i + h, y_i)$, $p'_{i+1} = (x_i + h, y_{i+1})$*) принадлежат многоугольнику* $S$, *то для упорядоченного множества точек* $l' : [p_1, p_2, \ldots, p'_i, p'_{i+1}, \ldots, p_{2n}]$ *справедливо неравенство*

$$r(f, l) \leq r(f, l').$$

2. *Если* $p_i$ *является «+»-точкой («−»-точкой) молнии* $l$, $y_i > y_{i+1}$ *и существует такое* $h > 0$, *что точки* $p''_i = (x_i + h, y_i)$, $p''_{i+1} = (x_i + h, y_{i+1})$ *(точки* $p''_i = (x_i - h, y_i)$, $p''_{i+1} = (x_i - h, y_{i+1})$*) принадлежат многоугольнику* $S$, *то для упорядоченного множества точек* $l'' : [p_1, p_2, \ldots, p''_i, p''_{i+1}, \ldots, p_{2n}]$ *справедливо неравенство*

$$r(f, l) \leq r(f, l'').$$

Замечание 3. Ввиду того, что в лемме могут иметь место равенства $p'_i = p_{i-1}$ или $p'_{i+1} = p_{i+2}$ ($p''_i = p_{i-1}$ или $p''_{i+1} = p_{i+2}$), мы говорили не о замкнутой молнии, а об упорядоченном множестве точек $l'$ ($l''$). Функционал $r(f, l')$ ($r(f, l'')$) для такого множества точек определяется точно так же, как в (1).

Доказательство. Пусть сначала $p_i$ — «+»-точка и $y_i < y_{i+1}$. Согласно определению класса $M(S)$

$$f(x_i, y_i) - f(x_i, y_{i+1}) \leq f(x_i - h, y_i) - f(x_i - h, y_{i+1})$$

или

$$f(p_i) - f(p_{i+1}) \leq f(p'_i) - f(p'_{i+1}).$$

Тогда понятно, что

$$r(f, l) \leq r(f, l').$$

Пусть теперь $p_i$ — «+»-точка и $y_i > y_{i+1}$. Согласно определению класса $M(S)$

$$f(x_i, y_i) - f(x_i, y_{i+1}) \leq f(x_i + h, y_i) - f(x_i + h, y_{i+1})$$

или $f(p_i) - f(p_{i+1}) \leq f(p''_i) - f(p''_{i+1})$. Из последнего неравенства легко выводим, что

$$r(f, l) \leq r(f, l'').$$

Аналогично доказываются случаи, когда $p_i$ является «−»-точкой.

Замечание 4. Нетрудно заметить, что если в лемме точки $p_i$ и $p_{i+1}$ имеют одну и ту же ординату, то аналогичная лемма остается справедливой.

Доказательство теоремы. Пусть $l : [p_1, p_2, \ldots, p_{2n}]$, $p_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1, 2n}$, — произвольная замкнутая молния многоугольника $S$. Сначала предположим, что $r(f, l) \geq 0$. К этой молнии применим следующий алгоритм, который в дальнейшем будем называть *процессом максимизации молнии* $l$. Этот процесс включает в себя два этапа.

**Этап I.** Последовательно рассмотрим все звенья $p_i p_{i+1}$ ($i = \overline{1, 2n}$, $p_{2n+1} = p_1$) молнии $l$, вершины $p_i$ и $p_{i+1}$ которых имеют равные абсциссы: $x_i = x_{i+1}$. Для каждого такого звена возможен один из следующих случаев.

1. $p_i$ — «+»-точка и $y_i < y_{i+1}$. В этом случае заменяем звено $p_i p_{i+1}$ новым звеном $q_i q_{i+1}$ с вершинами $q_i = (a_1, y_i)$, $q_{i+1} = (a_1, y_{i+1})$.

2. $p_i$ — «$+$»-точка и $y_{i+1} < y_i < b_k$, $2 \le k \le N$. В этом случае заменяем звено $p_i p_{i+1}$ новым звеном $q_i q_{i+1}$ с вершинами $q_i = (a_{N-k+2}, y_i)$, $q_{i+1} = (a_{N-k+2}, y_{i+1})$.

3. $p_i$ — «$-$»-точка и $y_{i+1} < y_i$. В этом случае заменяем звено $p_i p_{i+1}$ новым звеном $q_i q_{i+1}$ с вершинами $q_i = (a_1, y_i)$, $q_{i+1} = (a_1, y_{i+1})$.

4. $p_i$ — «$-$»-точка и $y_i < y_{i+1} < b_k$, $2 \le k \le N$. В этом случае заменяем звено $p_i p_{i+1}$ новым звеном $q_i q_{i+1}$ с вершинами $q_i = (a_{N-k+2}, y_i)$, $q_{i+1} = (a_{N-k+2}, y_{i+1})$.

Очевидно, что после этапа I процесса максимизации вся молния $l$ заменится упорядоченным множеством точек $l_1 = \{q_1, q_2, \dots, q_{2n}\}$, среди которых могут быть равные и следующие друг за другом точки, т. е. такие $q_i$, что $q_i = q_{i+1}$ (это, например, может случиться, если к звеньям $p_{i-1}p_i$ и $p_{i+1}p_{i+2}$ применяется 1-й случай). Согласно лемме

$$r(f, l) \le r(f, l_1). \tag{6}$$

Исключим последовательные и одновременно равные точки из $l_1$. Тогда получим замкнутую молнию, которую обозначим через $l_1' : \{q_1', q_2', \dots, q_{2m}'\}$, $q_i' = (x_i', y_i')$, $i = \overline{1, 2m}$. Так как $m \le n$, то

$$r(f, l_1) \le r(f, l_1').$$

Последнее неравенство вместе с (6) дает

$$r(f, l) \le r(f, l_1'). \tag{7}$$

**Этап II.** Последовательно рассмотрим все звенья $q_i' q_{i+1}'$ ($i = \overline{1, 2m}$, $q_{2m+1}' = q_1'$) молнии $l_1'$, вершины $q_i'$ и $q_{i+1}'$ которых имеют равные ординаты: $y_i' = y_{i+1}'$. Для каждого такого звена возможен один из следующих случаев.

1. $q_i'$ — «$+$»-точка и $x_i' < x_{i+1}'$. В этом случае заменяем звено $q_i' q_{i+1}'$ новым звеном $t_i t_{i+1}$ с вершинами $t_i = (x_i', b_1)$, $t_{i+1} = (x_{i+1}', b_1)$.

2. $q_i'$ — «$+$»-точка и $x_{i+1}' < x_i' < a_k$, $2 \le k \le N$. В этом случае заменяем звено $q_i' q_{i+1}'$ новым звеном $t_i t_{i+1}$ с вершинами $t_i = (x_i', b_{N-k+2})$, $t_{i+1} = (x_{i+1}', b_{N-k+2})$.

3. $q_i'$ — «$-$»-точка и $x_{i+1}' < x_i'$. В этом случае заменяем звено $q_i' q_{i+1}'$ новым звеном $t_i t_{i+1}$ с вершинами $t_i = (x_i', b_1)$, $t_{i+1} = (x_{i+1}', b_1)$.

4. $q_i'$ — «$-$»-точка и $x_i' < x_{i+1}' < a_k$, $2 \le k \le N$. В этом случае заменяем звено $q_i' q_{i+1}'$ новым звеном $t_i t_{i+1}$ с вершинами $t_i = (x_i', b_{N-k+2})$, $t_{i+1} = (x_{i+1}', b_{N-k+2})$.

Очевидно, что после этапа II процесса максимизации молния $l_1'$ заменяется замкнутой молнией $l_2 : [t_1, t_2, \dots, t_{2m}]$. Согласно лемме (см. замечание 4)

$$r(f, l_1') \le r(f, l_2). \tag{8}$$

Учитывая (8) в (7), имеем

$$r(f, l) \le r(f, l_2). \tag{9}$$

Нетрудно заметить, что молния $l_2$ является подмножеством множества вершин всех максимальных многоугольников многоугольника $S$, причем множество «$+$»-точек молнии $l_2$ является подмножеством множества $\{(a_1, b_1), (a_2, b_N), (a_3, b_{N-1}), \dots, (a_N, b_2)\}$, а множество «$-$»-точек молнии $l_2$ — подмножеством множества

$$\{(a_1, b_2), (a_1, b_3), \dots, (a_1, b_N), (a_2, b_1), (a_2, b_2), \\ \dots, (a_2, b_{N-1}), \dots, (a_i, b_1), (a_i, b_2), \dots, (a_i, b_{N-i+1}), \dots, (a_N, b_1)\}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что первая точка $t_1$ молнии $l_2$ совпадает с вершиной $(a_1, b_1)$. Тогда молнию $l_2$ можно разбить на $k$ ($k \geq 1$) групп точек

$$h_1 : [t_1, t_2, \dots, t_{d_1}], h_2 : [t_{d_1+1}, t_{d_1+2}, \dots, t_{d_2}],$$
$$\dots, h_i : [t_{d_{i-1}+1}, t_{d_{i-1}+2}, \dots, t_{d_i}], \dots, h_k : [t_{d_{k-1}+1}, t_{d_{k-1}+2}, \dots, t_{d_k}],$$

где $1 < d_1 < d_2 < \dots < d_k = 2m$ и каждая группа $h_i$ представляет собой максимальную молнию, первая точка которой есть вершина $(a_1, b_1)$. Следовательно,

$$r(f, l_2) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{k} (d_i - d_{i-1}) r(f, h_i) \leq \max_{1 \leq i \leq k} r(f, h_i) \leq \max_{h \in S^B} \{|r(f, h)|\}.$$

Из последнего в силу (9) имеем

$$r(f, l) \leq \max_{h \in S^B} \{|r(f, h)|\}. \tag{10}$$

В начале доказательства $l$ была выбрана так, что $r(f, l) \geq 0$. Пусть теперь $l : [p_1, p_2, \dots, p_{2n}]$ — произвольная замкнутая молния с условием $r(f, l) \leq 0$. Тогда для замкнутой молнии $l' : [p_2, p_3, \dots, p_{2n}, p_1]$ можно написать

$$r(f, l') = -r(f, l) \geq 0.$$

Поэтому для молнии $l'$ справедливо неравенство (10). Следовательно,

$$-r(f, l) \leq \max_{h \in S^B} \{|r(f, h)|\}. \tag{11}$$

На основании (10) и (11) для произвольной замкнутой молнии $l$ имеем

$$|r(f, l)| \leq \max_{h \in S^B} \{|r(f, h)|\}.$$

Из последнего неравенства получаем

$$\sup_{l \subset S} \{|r(f, l)|\} \leq \max_{h \in S^B} \{|r(f, h)|\}, \tag{12}$$

где sup берется по всем замкнутым молниям множества $S$. Так как максимальная молния замкнута, то в (12) на самом деле имеет место равенство

$$\sup_{l \subset S} \{|r(f, l)|\} = \max_{h \in S^B} \{|r(f, h)|\}. \tag{13}$$

Множество $S$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3 из [15] о существовании наилучшей приближающей суммы $\varphi_0(x) + \psi_0(y)$. В силу одного результата С. Я. Хавинсона из [5]

$$E(f, S) = \sup_{l \subset S} \{|r(f, l)|\}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) окончательно получаем

$$E(f, S) = \max_{h \in S^B} \{|r(f, h)|\}.$$

Теорема доказана.

Доказательство следствия. Так как $f_{xy}$ непрерывна и неотрицательна на множестве $S$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{xy} \, dx dy \geq 0$$

для произвольного прямоугольника $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset S$. Из последнего неравенства легко получаются включение $f \in M(S)$ и, следовательно, справедливость формулы (5).

Замечание 5. Как видно из доказательства теоремы, мы существенно используем понятие молнии и связанные с ним результаты. Значительно труднее вопрос, когда рассматривается приближение функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ суммами $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i)$. При попытке обобщить понятие молнии на этот случай резко возрастают комбинаторно-геометрические трудности. Имеющиеся в работах [2] и [8] обобщения содержат некоторые пробелы (см. [6] и [16] относительно этих пробелов). Этот интересный вопрос по существу открыт.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Арнольд В. И.* О функциях трех переменных // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 4. С. 679–681.
2. *Diliberto S. P., Straus E. G.* On the approximation of a function of several variables by the sum of functions of fewer variables // Pacific J. Math. 1951. V. 1, N 2. P. 195–210.
3. *Офман Ю. П.* О наилучшем приближении функции двух переменных функциями вида $\varphi(x) + \psi(y)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25, № 2. С. 239–252.
4. *Light W. A., Cheney E. W.* On the approximation of a bivariate function by the sum of univariate functions // J. Approx. Theory. 1980. V. 29, N 4. P. 305–323.
5. *Хавинсон С. Я.* Чебышевская теорема для приближения функции двух переменных суммами $\varphi(x) + \psi(y)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 3. С. 650–666.
6. *Marshall D. E., O'Farrell A. G.* Approximation by a sum of two algebras. The lightning bolt principle // J. Funct. Anal. 1983. V. 52, N 3. P. 353–368.
7. *Хавинсон С. Я.* Представление функций двух переменных суммами $\varphi(x) + \psi(y)$ // Изв. вузов. Математика. 1985. Т. 2, № 173. С. 66–73.
8. *Golomb M.* Approximation by functions of fewer variables // On numerical approximation: Proc. Symp. Madison, 1959. Edited by R. E. Langer. Madison: Univ. Wisconsin Press, 1959. P. 275–327.
9. *Rivlin T. J., Sibner R. J.* The degree of approximation of certain functions of two variables by a sum of functions of one variable // Amer. Math. Monthly. 1965. V. 72, N 10. P. 1101–1103.
10. *Бабаев М-Б. А.* О точных оценках приближения функций многих переменных суммами функций меньшего числа переменных // Мат. заметки. 1972. Т. 12, № 1. С. 105–114.
11. *Ismailov V. E.* On some classes of bivariate functions characterized by formulas for the best approximation // Radovi Matematicki. 2004. V. 13, N 1. P. 53–62.
12. *Flatto L.* The approximation of certain functions of several variables by sums of functions of fewer variables // Amer. Math. Monthly. 1966. V. 73, N 4. P. 131–132.
13. *Бабаев М-Б. А.* Экстремальные свойства и двусторонние оценки в приближении суммами функций меньшего числа переменных // Мат. заметки. 1984. Т. 36, № 5. С. 647–659.
14. *Babaev M-B. A., Ismailov V. E.* Two-sided estimates for the best approximation in domains different from the parallelepiped // Funct. Approx. 1997. V. 25. P. 121–128.
15. *Гаркави А. А., Медведев В. А., Хавинсон С. Я.* О существовании наилучшего равномерного приближения функций двух переменных суммами $\varphi(x) + \psi(y)$ // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 4. С. 819–827.
16. *Медведев В. А.* Опровержение одной теоремы Дилиберто и Страуса // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 4. С. 78–80.


*Статья поступила 14 февраля 2005 г.*

*Исмаилов Вугар Эльман оглы*
*Институт математики и механики НАН Азербайджана,*
*ул. Ф. Агаева, 9, Баку Az-1141, Азербайджан*
vugaris@mail.ru