Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2006. Том 47, № 6

УДК 519.21

О ТОЧНОЙ АСИМПТОТИКЕ МАКСИМУМА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ С ПРИРАЩЕНИЯМИ ИЗ ОДНОГО КЛАССА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ТОНКИМИ ХВОСТАМИ

С. Захари, С. Г. Фосс

Аннотация: Изучается распределение максимума M случайного блуждания, распределение приращений которого имеет отрицательное среднее и при некотором $\gamma > 0$ принадлежит одному подклассу класса $\mathscr{S}_\gamma$, введенному в [1]. Для этого подкласса предлагается вероятностная трактовка асимптотического поведения хвоста распределения M и, в частности, показывается, что большие значения M достигаются, как правило, за счет одного большого приращения случайного блуждания близко к началу его траектории. Также приводятся результаты о локальной по пространству асимптотике распределения M, максимуме остановленного случайного блуждания для различных моментов остановки и некоторые оценки.

Ключевые слова: супремум случайного блуждания, точная асимптотика, класс $S(\gamma)$.

§ 1. Введение

Для любой функции распределения F на вещественной прямой $\mathbb{R}$ зададим функцию $\varphi_F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ равенством

$$\varphi_F(\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x} dF(x) = \mathbf{E}e^{\alpha X},$$

где случайная величина X имеет распределение F. Через $\overline{F}$ будем обозначать хвост распределения F, т. е. $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, и через F^{*n} — n-кратную свертку распределения F с самим собой.

Будем говорить, что функция распределения F на $\mathbb{R}$ *принадлежит классу* $\mathscr{L}_\gamma$, $\gamma \geq 0$, если (и только если)

$$\overline{F}(x) > 0 \quad \text{при всех } x, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-k)}{\overline{F}(x)} = e^{\gamma k} \quad \text{для любого фиксированного } k. \tag{1}$$

Заметим, что $\mathscr{L}_0$ — это класс так называемых распределений с *длинными хвостами.* Как и в этом частном случае, при $F \in \mathscr{L}_\gamma$ сходимость в (1) является с необходимостью равномерной на любом компактном интервале. Далее, если $F \in \mathscr{L}_\gamma$, то γ однозначно определяется равенством $\gamma = \sup\{\alpha : \varphi_F(\alpha) < \infty\}$. При этом мы считаем удобным использовать запись $\widehat{\varphi}_F$ вместо $\varphi_F(\gamma)$, где $\widehat{\varphi}_F$ может быть как конечным числом, так и $+\infty$. Заметим также, что если $F \in \mathscr{L}_\gamma$ и $\widehat{\varphi}_F < \infty$, то

$$\overline{F}(x) = o(e^{-\gamma x}) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{2}$$

Функция распределения F на $\mathbb{R}$ *принадлежит классу* $\mathscr{S}_\gamma$, $\gamma \geq 0$, если (и только если) $F \in \mathscr{L}_\gamma$, $\widehat{\varphi}_F < \infty$ и

$$\overline{F^{*2}}(x) \sim 2\widehat{\varphi}_F \overline{F}(x) \quad \text{при } x \to \infty \tag{3}$$

(где для любых двух положительных функций f_1, f_2 на $\mathbb{R}$ запись «$f_1(x) \sim f_2(x)$ при $x \to \infty$» означает, что $f_1(x)/f_2(x) \to 1$ при $x \to \infty$). Отметим, что некоторыми авторами класс $\mathscr{S}_\gamma$ вводится сначала для распределений F на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$, а затем переносится на распределения на всей вещественной прямой, для которых $F\mathbf{I}_{\mathbb{R}_+} \in \mathscr{S}_\gamma$, где $\mathbf{I}_{\mathbb{R}_+}$ — индикатор множества $\mathbb{R}_+$. Однако условие $F \in \mathscr{L}_\gamma$ позволяет определить класс $\mathscr{S}_\gamma$ «напрямую».

Пусть M — максимум случайного блуждания, приращения которого имеют функцию распределения F с отрицательным средним. Для распределений F, принадлежащих хорошо известному классу $\mathscr{S}_0$ субэкспоненциальных распределений, асимптотика вероятности $\mathbf{P}(M > x)$ при $x \to \infty$ получена Пэйксом [2] и Веравербеке [3], см. также более ранний результат [4] для подкласса распределений с регулярно меняющимися хвостами. В этом случае большие значения M достигаются, вообще говоря, за счет одного большого приращения случайного блуждания, что принято называть «принципом одного большого скачка» (см. также [5]). Далее, в предположении, что $M > x$, условная вероятность того, что скачок имеет место на любом фиксированном конечном интервале времени, стремится к нулю с ростом x.

Для $F \in \mathscr{S}_\gamma$ при $\gamma > 0$ необходимо выделять различные случаи. Если $\widehat{\varphi}_F > 1$ или $\widehat{\varphi}_F = 1$ и $\varphi'_F(\gamma) < \infty$, то асимптотика хвоста распределения M приводится в классической теореме Крамера — Лундберга; в частности, траектории, приводящие к экстремальным значениям M, обычно близки к возрастающей линейной функции (вплоть до момента достижения уровня супремума). Однако в данной работе мы интересуемся прежде всего подклассом распределений $\mathscr{S}_\gamma$, для которых $\widehat{\varphi}_F < 1$. Здесь асимптотика хвоста распределения M найдена А. А. Боровковым в [4, гл. 4] для случая, когда функция $G(x) = e^{\gamma x}\overline{F}(x)$ является регулярно меняющейся (на бесконечности), см. также дальнейшие результаты в [6]. Результат А. А. Боровкова обобщен Веравербеке [3] со случая регулярно меняющихся хвостов на общий случай распределений из класса $\mathscr{S}_\gamma$ с $\widehat{\varphi}_F < 1$. Но Бертуа и Дони [7] показали, что доказательство Веравербеке содержит пробел, и предложили свой вариант. Все эти доказательства основаны на аналитических методах. Целью настоящей работы является нахождение асимптотики вероятности $\mathbf{P}(M > x)$ при $x \to \infty$ с использованием прямого вероятностного подхода. Мы также формулируем ряд следствий и близких результатов, которые, в частности, описывают «типичное» поведение траекторий, приводящих к большим значениям M. Показывается, что в случае $\gamma > 0$, $\widehat{\varphi}_F < 1$ также выполнен принцип одного большого скачка, т. е. экстремальные значения M достигаются, как правило, за счет одного большого приращения случайного блуждания. Однако здесь в отличие от случая $\gamma = 0$ основную роль играют скачки в непосредственной близости от начала траектории случайного блуждания (см. точную формулировку в замечании 4, а также дальнейшие результаты для регулярно меняющегося случая в [6]). Мы также приводим результаты о локальной (по пространству) асимптотике распределения M, асимптотике максимума остановленного случайного блуждания (для различных моментов остановки) и некоторые оценки.

В завершение этого параграфа сформулируем общие свойства классов $\mathscr{S}_\gamma$, $\gamma \geq 0$, которые нам потребуются в дальнейшем.

Для $F \in \mathscr{L}_\gamma$, $\gamma \geq 0$, удовлетворяющей условию $\widehat{\varphi}_F < \infty$, нетрудно показать, что (3) эквивалентно тому, что соотношение

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\overline{F}(x)} \int\limits_{h(x)}^{x-h(x)} dF(y)\overline{F}(x-y) = 0 \tag{4}$$

имеет место для любой функции h такой, что

$$h(x) \leq x/2 \text{ при всех } x, \quad \lim_{x\to\infty} h(x) = \infty. \tag{5}$$

Класс $\mathscr{S}_\gamma$ является естественным обобщением класса $\mathscr{S}_0$ субэкспоненциальных распределений (напомним также, что $\widehat{\varphi}_F = 1$ при $F \in \mathscr{S}_0$). Как и в случае $\gamma = 0$, не так-то просто построить пример распределения $F \in \mathscr{L}_\gamma$ с $\widehat{\varphi}_F < \infty$, не принадлежащего $\mathscr{S}_\gamma$, и все такие примеры более или менее искусственны.

Ясно, что при $\gamma \geq 0$ класс $\mathscr{S}_\gamma$ замкнут относительно эквивалентности по хвостам распределений (т. е. если $F \in \mathscr{S}_\gamma$ и $\overline{F}(x) \sim c\overline{G}(x)$ для некоторой постоянной $c \in (0,\infty)$, то $G \in \mathscr{S}_\gamma$). Справедлив и более общий результат (предложение 1), доказательство которого следует, например, из леммы 5.1 работы [8] и проводится аналогично доказательству леммы 5.2 из той же работы.

Предложение 1. *Допустим, что $F \in \mathscr{S}_\gamma$ при некотором $\gamma \geq 0$. Предположим также, что при $i = 1,\dots,n$ функции распределения F_i удовлетворяют соотношениям $\overline{F_i}(x) \sim c_i\overline{F}(x)$ при $x \to \infty$ для некоторых $c_i \geq 0$ (где в случае $c_i = 0$ эквивалентность понимается в смысле «$\overline{F_i}(x) = o(\overline{F}(x))$ при $x \to \infty$»). Тогда $\widehat{\varphi}_{F_i} < \infty$ при всех $i = 1,\dots,n$ и хвост свертки $F_1 * \dots * F_n$ имеет асимптотику*

$$\overline{F_1 * \dots * F_n}(x) \sim \prod_{i=1}^{n} \widehat{\varphi}_{F_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\widehat{\varphi}_{F_i}} \overline{F}(x) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Далее, если $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i > 0$, то $F_1 * \dots * F_n \in \mathscr{S}_\gamma$.

В частности, справедливо обобщение свойства (3): если $F \in \mathscr{S}_\gamma$, то при всех $n \geq 1$

$$\overline{F^{*n}}(x) \sim n\widehat{\varphi}_F^{\,n-1}\overline{F}(x) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Полезно отметить, что при $\gamma \geq 0$ класс $\mathscr{S}_\gamma$ может быть расширен до класса, включающего и распределения F с носителем на $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, т. е. имеющие положительный атом в $-\infty$. Для таких распределений предложение 1 остается в силе при $\gamma > 0$. Оно имеет место и в случае $\gamma = 0$, но при дополнительном соглашении, что при этом $\widehat{\varphi}_F = \overline{F}(-\infty)$.

§ 2. Случайные блуждания с отрицательным сносом

Пусть $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения F на $\mathbb{R}$. Пусть $S_0 = 0$ и $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ при $n \geq 1$. Пусть также $M_n = \max\limits_{0\leq i\leq n} S_i$ при $n \geq 0$ и $M = \sup\limits_{n\geq 0} S_n$.

Предположим, что $F \in \mathscr{L}_\gamma$ при некотором $\gamma > 0$ и $\widehat{\varphi}_F < 1$. Так как $\varphi_F(0) = 1$ и φ_F выпукла вниз на $[0,\gamma]$, то $\varphi'_F(0) < 0$ и, значит, распределение F имеет отрицательный снос $\mathbf{E}\xi_1$, который, вообще говоря, может принимать и значение $-\infty$. Поэтому, в частности, $\mathbf{P}(M < \infty) = 1$. Мы изучаем асимптотику распределения $\mathbf{P}(M > x)$ при $x \to \infty$.

Приводимая ниже лемма содержит полезный вспомогательный результат.

Лемма 1. *Предположим, что* $F \in \mathscr{L}_\gamma$ *при некотором* $\gamma > 0$ *и* $\widehat{\varphi}_F < 1$. *Тогда*

$$1 \le \mathbf{E}e^{\gamma M} \le \frac{1}{1-\widehat{\varphi}_F} \tag{6}$$

и, в частности,

$$\mathbf{P}(M > x) = o(e^{-\gamma x}) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Доказательство. Заметим, что

$$e^{\gamma M} \le \sum_{n=0}^{\infty} e^{\gamma S_n},$$

и достаточно взять математическое ожидание от обеих частей неравенства и учесть, что $\mathbf{E}e^{\gamma S_n} = \widehat{\varphi}_F^n$. $\square$

Для любого момента остановки $\sigma \le \infty$ определим на событии $\{\sigma < \infty\}$ случайную величину

$$M^\sigma = \sup_{m \ge 0} S_{\sigma+m} - S_\sigma$$

(в частности, $M^n = \sup\limits_{m\ge 0} S_{n+m} - S_n$ при любом конечном n). При любых $x \ge a \ge 0$ и $n \ge 1$ определим событие

$$A_n^{a,x} = \{M_{n-1} \le a, S_n > x\}.$$

Ясно, что для любых таких a и x события $A_n^{a,x}$ несовместны при различных n.

В следующей лемме предлагается нижняя оценка для вероятности $\mathbf{P}(M > x)$.

Лемма 2. *Предположим, что* $F \in \mathscr{L}_\gamma$ *при некотором* $\gamma > 0$ *и* $\widehat{\varphi}_F < 1$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $a > 0$ *такое, что*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}(M > x)}{\overline{F}(x)} \ge \liminf_{x\to\infty} \frac{1}{\overline{F}(x)} \mathbf{P}\Big(M > x, \bigcup_{n\ge 1} A_n^{a,x-a}\Big) \ge (1-\varepsilon)\frac{\mathbf{E}e^{\gamma M}}{1-\widehat{\varphi}_F}.$$

Доказательство. Из определения (1) и монотонности $\overline{F}$ напрямую следует, что для любого $\gamma' \in (0,\gamma)$ найдется x_0 такое, что при всех $x \ge x_0$ и $t \le -1$

$$\overline{F}(x-t) \le \overline{F}(x)e^{\gamma t}e^{(\gamma'-\gamma)t} = \overline{F}(x)e^{\gamma' t}. \tag{7}$$

Поэтому для любых $a \in \mathbb{R}$ и $n \ge 1$

$$\mathbf{P}(S_{n-1} \le a, S_n > x) = \int_{-\infty}^{a} \mathbf{P}(S_{n-1} \in dt)\overline{F}(x-t) \tag{8}$$

$$= (1+o(1))\overline{F}(x) \int_{-\infty}^{a} \mathbf{P}(S_{n-1} \in dt)e^{\gamma t} \tag{9}$$

при $x \to \infty$. Здесь (9) следует из (1) и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, и (7) и (1) используются (с учетом равномерности) для оценивания подынтегральной функции соответственно на интервалах $(-\infty,-1)$ и $[-1,a]$.

Зафиксируем теперь $a > 0$. При $n \ge 1$ для любого $x \ge a$ из (1) и (9) вытекает, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_n^{a,x}) &= \mathbf{P}(S_{n-1} \le a, S_n > x) - \mathbf{P}(M_{n-2} > a, S_{n-1} \le a, S_n > x)\\
&\ge \mathbf{P}(S_{n-1} \le a, S_n > x) - \mathbf{P}(M_{n-2} > a)\overline{F}(x-a)\\
&\ge \mathbf{P}(S_{n-1} \le a, S_n > x) - \mathbf{P}(M > a)\overline{F}(x-a) = (1+o(1))\lambda(n,a)\overline{F}(x)
\end{aligned} \tag{10}$$

при $x \to \infty$, где

$$\lambda(n,a) = \int\limits_{-\infty}^{a} \mathbf{P}(S_{n-1} \in dt)e^{\gamma t} - \mathbf{P}(M > a)e^{\lambda a}. \tag{11}$$

Для любых $n \geq 1$ и $x \geq 2a$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big(M > x, A_n^{a,x-a}\big) &\geq \int\limits_0^a \mathbf{P}\left(A_n^{a,x-t}, M^n \in dt\right) \\
&= \int\limits_0^a \mathbf{P}\left(A_n^{a,x-t}\right)\mathbf{P}(M \in dt) \qquad (12)\\
&\geq (1+o(1))\lambda(n,a)\int\limits_0^a \mathbf{P}(M \in dt)\overline{F}(x-t) \qquad (13)\\
&= (1+o(1))\lambda(n,a)\overline{F}(x)\int\limits_0^a \mathbf{P}(M \in dt)e^{\gamma t}
\end{aligned}$$

при $x \to \infty$, где (12) следует из того, что при каждом t событие $A_n^{a,x-t}$ не зависит от случайной величины M^n, которая совпадает по распределению с M, а (13) — из (10). Так как события $A_n^{a,x-a}$ при разных n не пересекаются, то при любом N

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{1}{\overline{F}(x)}\mathbf{P}\Big(M > x, \bigcup_{n\geq 1} A_n^{a,x-a}\Big) \geq \sum_{n=1}^{N} \lambda(n,a)\int\limits_0^a \mathbf{P}(M \in dt)e^{\gamma t}. \tag{14}$$

Напомним, что $\widehat{\varphi}_F < 1$. Из соотношения (11), определения $\widehat{\varphi}_F$ и леммы 1 следует, что

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{a\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\lambda(n,a) = \sum_{n\geq 1}\widehat{\varphi}_F^{\,n-1} = \frac{1}{1-\widehat{\varphi}_F}. \tag{15}$$

Поскольку $\lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_0^a \mathbf{P}(M \in dt)e^{\gamma t} = \mathbf{E}e^{\gamma M}$, то требуемое утверждение вытекает из (14). $\square$

Получим верхнюю оценку для вероятности $\mathbf{P}(M > x)$, для чего нам понадобится более ограничительное условие $F \in \mathscr{S}_\gamma$.

Лемма 3. *Предположим, что $F \in \mathscr{S}_\gamma$ при некотором $\gamma > 0$ и $\widehat{\varphi}_F < 1$. Тогда*

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\mathbf{P}(M > x)}{\overline{F}(x)} \leq \frac{\mathbf{E}e^{\gamma M}}{1-\widehat{\varphi}_F}.$$

Доказательство. Для последовательности событий $\{E_n\}$ используем соглашение: $\min\{n \geq 1 : \mathbf{I}(E_n) = 1\} = \infty$, если $\mathbf{I}(E_n) = 0$ при всех n. Так как $\widehat{\varphi}_F < 1$, то распределение F имеет отрицательное среднее (которое, как уже отмечалось, может быть и бесконечным). Поэтому найдется $c < 0$ такое, что

$$\limsup_{n\to\infty} S_n/n < c \quad \text{п. н.} \tag{16}$$

При $R > 0$ зададим последовательность случайных величин $0 \equiv \tau_0 < \tau_1 \leq \dots$ равенствами

$$\tau_1 = \min\{n \geq 1 : S_n > R + nc\} \leq \infty,$$

и при $m \geq 2$

$$\tau_m = \infty, \quad \text{если } \tau_{m-1} = \infty,$$

$$\tau_m = \tau_{m-1} + \min\{n \geq 1 : S_{\tau_{m-1}+n} - S_{\tau_{m-1}} > R + nc\}, \quad \text{если } \tau_{m-1} < \infty.$$

Заметим, что при каждом $m \geq 1$ условное относительно события $\tau_{m-1} < \infty$ распределение пары случайных величин $(\tau_m - \tau_{m-1}, S_{\tau_m} - S_{\tau_{m-1}})$ не зависит от $\mathscr{F}_{\tau_{m-1}}$ (где при $n \geq 1$ сигма-алгебра $\mathscr{F}_n$ порождена последовательностью $\{S_k\}_{k \leq n}$) и совпадает с распределением (τ_1, S_{τ_1}). В частности, $\mathbf{P}(\tau_m < \infty) = \delta^m$, где

$$\delta \equiv \mathbf{P}(\tau_1 < \infty) \to 0 \quad \text{при } R \to \infty, \tag{17}$$

в силу (16). Положим $S_\infty = -\infty$.

Так как условия леммы 2 также выполнены, из (9) следует, что при каждом $n \geq 1$ и любом a

$$\mathbf{P}(S_{n-1} \leq a, S_n > x) \leq (1 + o(1))\widehat{\varphi}_F^{n-1}\overline{F}(x) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{18}$$

Зафиксируем $\gamma' \in (0, \gamma)$ и заметим, что в силу (7) и (8) при всех $n \geq 1$ и $a \leq -1$

$$\mathbf{P}(S_{n-1} \leq a, S_n > x) \leq (1 + o(1))\overline{F}(x) \int\limits_{-\infty}^{a} \mathbf{P}(S_{n-1} \in dt)e^{\gamma' t}$$
$$\leq (1 + o(1))e^{\gamma' a}\overline{F}(x) \quad \text{при } x \to \infty \tag{19}$$

равномерно по n и по $a \leq -1$.

Согласно (18) и (19) если N таково, что $R + Nc \leq -1$, то при $x \to \infty$

$$\mathbf{P}(S_{\tau_1} > x) = \sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(\tau_1 = n, S_n > x) \leq \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(S_{n-1} \leq R + (n-1)c, S_n > x)$$
$$\leq (1 + o(1))\overline{F}(x) \left(\sum_{n=1}^{N} \widehat{\varphi}_F^{n-1} + \sum_{n>N} e^{\gamma'(R+(n-1)c)} \right). \tag{20}$$

Так как $c < 0$, то, устремляя N к бесконечности, получаем

$$\mathbf{P}(S_{\tau_1} > x) \leq (1 + o(1))\frac{\overline{F}(x)}{1 - \widehat{\varphi}_F} \quad \text{при } x \to \infty. \tag{21}$$

Теперь покажем, что при достаточно больших R и x сумма $\sum\limits_{m\geq 1} \mathbf{P}(S_{\tau_m} > x)$ эквивалентна первому слагаемому $\mathbf{P}(S_{\tau_1} > x)$. Положим $\Phi_R = \mathbf{E}e^{\gamma S_{\tau_1}}$. Тогда

$$\Phi_R = \sum_{n\geq 1} \mathbf{E}(\mathbf{I}_{\{\tau_1 = n\}} e^{\gamma S_n}) \leq \sum_{n \geq 1} \mathbf{E}(\mathbf{I}_{\{S_n > R + nc\}} e^{\gamma S_n}) \to 0 \quad \text{при } R \to \infty \tag{22}$$

по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, так как $\widehat{\varphi}_F < 1$ и при любом n

$$\mathbf{E}(\mathbf{I}_{\{S_n > R + nc\}} e^{\gamma S_n}) \leq \mathbf{E}e^{\gamma S_n} = \widehat{\varphi}_F^n.$$

При любом $m \geq 1$ распределение случайной величины S_{τ_m} является m-кратной сверткой распределения S_{τ_1} и, значит, принадлежит классу $\mathscr{S}_\gamma$. Поскольку уже отмечалось, что предложение 1 обобщается на случай несобственных распределений из класса $\mathscr{S}_\gamma$ с атомом в $-\infty$, то

$$\mathbf{P}(S_{\tau_m} > x) = (1 + o(1))m\Phi_R^{m-1}\mathbf{P}(S_{\tau_1} > x) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{23}$$

Воспользуемся теоремой Лебега для нахождения асимптотики $\sum_{m\ge1}\mathbf{P}(S_{\tau_m}>x)$. Рассмотрим сначала условные распределения. Условное распределение S_{τ_m} при условии $\tau_m<\infty$ совпадает с m-кратной сверткой условного распределения S_{τ_1} при условии $\tau_1<\infty$. Далее,

$$\mathbf{E}(e^{\gamma S_{\tau_1}}\mid\tau_1<\infty)=\delta^{-1}\Phi_R,$$

где δ определяется в (17). Поэтому из леммы 5.3 работы [8] следует, что при каждом $\varepsilon>0$ существует постоянная K такая, что при всех $m\ge1$ и $x\ge0$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_{\tau_m}>x)&=\delta^m\mathbf{P}(S_{\tau_m}>x\mid\tau_m<\infty)\\&\le\delta^mK\left(\max(1,\delta^{-1}\Phi_R+\varepsilon)\right)^m\mathbf{P}(S_{\tau_1}>x\mid\tau_1<\infty)\\&=\delta^{-1}K\left(\max(\delta,\Phi_R+\delta\varepsilon)\right)^m\mathbf{P}(S_{\tau_1}>x).\end{aligned}$$

Как следует теперь из (22), при достаточно большом R мы можем применить теорему Лебега и, используя (23) и затем (21), получить, что

$$\begin{aligned}\sum_{m\ge1}\mathbf{P}(S_{\tau_m}>x)&=(1+o(1))\mathbf{P}(S_{\tau_1}>x)\sum_{m\ge1}m\Phi_R^{m-1}\quad(\text{при } x\to\infty)\\&\le\frac{(1+o(1))}{1-\widehat{\varphi}_F}\overline{F}(x)\sum_{m\ge1}m\Phi_R^{m-1}\quad(\text{при } x\to\infty).\end{aligned}\tag{24}$$

Так как супремум M случайного блуждания $\{S_n\}_{n\ge0}$ достигается п. н. в конечный момент времени, для каждой такой траектории числа $n=\min\{k:S_k=M\}$ и $m=\max\{i:\tau_i\le n\}$ конечны. Тогда $M=S_{\tau_m}+M^{\tau_m}$ и $M_{\tau_m}<R$. Поэтому при $x\ge0$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M>x)&\le\sum_{m\ge1}\mathbf{P}(S_{\tau_m}+M^{\tau_m}>x,M^{\tau_m}\in[0,R])\\&=\sum_{m\ge1}\int_0^R\mathbf{P}(M^{\tau_m}\in dt,S_{\tau_m}>x-t)\\&=\int_0^R\mathbf{P}(M\in dt)\sum_{m\ge1}\mathbf{P}(S_{\tau_m}>x-t)&(25)\\&\le\frac{(1+o(1))}{1-\widehat{\varphi}_F}\sum_{m\ge1}m\Phi_R^{m-1}\int_0^R\mathbf{P}(M\in dt)\overline{F}(x-t)&(26)\\&=\frac{(1+o(1))}{1-\widehat{\varphi}_F}\overline{F}(x)\sum_{m\ge1}m\Phi_R^{m-1}\int_0^Re^{\gamma t}\mathbf{P}(M\in dt)&(27)\\&\le\frac{(1+o(1))\mathbf{E}e^{\gamma M}}{1-\widehat{\varphi}_F}\overline{F}(x)\sum_{m\ge1}m\Phi_R^{m-1},&(28)\end{aligned}$$

где равенство (25) следует из того, что, условно относительно $\tau_m<\infty$, случайная величина M^{τ_m} не зависит от S_{τ_m} и совпадает по распределению с M, неравенство (26) — из (24), так как интеграл берется по конечному интервалу $[0,R]$, и равенство (27) — из (1). Теперь устремляем $R\to\infty$ в (28), и требуемый результат следует из (22). $\square$

Объединение лемм 2 и 3 приводит к теореме 1, в которой последнее равенство получается при стремлении ε к 0.

Теорема 1. *Пусть $F \in \mathscr{S}_\gamma$ при некотором $\gamma > 0$ и $\widehat{\varphi}_F < 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $a > 0$ такое, что*

$$(1-\varepsilon)\frac{\mathbf{E}e^{\gamma M}}{1-\widehat{\varphi}_F} \le \liminf_{x\to\infty} \frac{1}{\overline{F}(x)}\mathbf{P}\Big(M > x, \bigcup_{n\ge 1} A_n^{a,x-a}\Big) \le \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}(M > x)}{\overline{F}(x)} = \frac{\mathbf{E}e^{\gamma M}}{1-\widehat{\varphi}_F}.$$

Замечание 1. Из теоремы 1, в частности, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $a > 0$ такое, что

$$\liminf_{x\to\infty} \mathbf{P}\Big(\bigcup_{n\ge 1} A_n^{a,x-a} \mid M > x\Big) > 1-\varepsilon,$$

т. е. для всех достаточно больших x при условии $\{M > x\}$ значение S_τ в момент τ первого перескока уровня a последовательностью $\{S_n\}_{n\ge 0}$ превосходит уровень $x-a$ с вероятностью, не меньшей, чем $1-\varepsilon$. Это и есть «принцип одного большого скачка».

Отметим также, что можно предложить и более компактную запись утверждения теоремы 1 с использованием любой функции h, удовлетворяющей условиям (5):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\overline{F}(x)}\mathbf{P}\Big(M > x, \bigcup_{n\ge 1} A_n^{h(x),x-h(x)}\Big) = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}(M > x)}{\overline{F}(x)} = \frac{\mathbf{E}e^{\gamma M}}{1-\widehat{\varphi}_F}. \tag{29}$$

Здесь, как и ранее, события $A_n^{h(x),x-h(x)}$, $n \ge 1$, не пересекаются, поэтому можно заменить в левой части равенства (29) вероятность объединения суммой вероятностей.

Замечание 2. Хотя в теореме 1 и приводится точная асимптотика для вероятности $\mathbf{P}(M > x)$ при $x \to \infty$, однако коэффициент $\mathbf{E}e^{\gamma M}$, присутствующий в формулировке, в явном виде не находится. Поэтому простые оценки (6) могут быть использованы в приложениях.

Ниже приводится результат о «локальной по пространству» асимптотике, который следует непосредственно из теоремы 1 с использованием (1).

Теорема 2. *Пусть $F \in \mathscr{S}_\gamma$ при некотором $\gamma > 0$ и $\widehat{\varphi}_F < 1$. Тогда для любого $t > 0$ и для любой функции h, удовлетворяющей (5),*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\overline{F}(x)}\mathbf{P}\Big(M \in (x, x+t], \bigcup_{n\ge 1} A_n^{h(x),x-h(x)}\Big) = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}(M \in (x, x+t])}{\overline{F}(x)} = \frac{\mathbf{E}e^{\gamma M}}{1-\widehat{\varphi}_F}(1-e^{-\gamma t}),$$

где при любом $t_0 > 0$ сходимость равномерна по $t \in [t_0, \infty]$.

Замечание 3. В случае $\gamma = 0$ для получения результата, аналогичного теореме 2, необходимо (и достаточно) потребовать выполнения более сильного предположения о принадлежности F классу $\mathscr{S}^*$, введенному Клюппельберг в [9], см. также [10, 11]. Однако в случае $\gamma > 0$ условия, сходные условиям, определяющим классы $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}^*$, совпадают (см. также комментарии в работе [12]).

По аналогии с теоремой 1 несложно получить и утверждение об асимптотике распределения максимумов M_N на конечных интервалах времени.

Теорема 3. *Пусть $F \in \mathscr{S}_\gamma$ при некотором $\gamma > 0$ и $\widehat{\varphi}_F < 1$. Тогда для любого $N \geq 1$ и любой функции h, удовлетворяющей (5),*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\overline{F}(x)} \mathbf{P}\Big(M_N > x, \bigcup_{1\leq n\leq N} A_n^{h(x),x-h(x)}\Big) = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}(M_N > x)}{\overline{F}(x)} = \sum_{n=1}^{N} \widehat{\varphi}_F^{\,n-1} \mathbf{E} e^{\gamma M_{N-n}},$$

причем сходимость равномерна по всем $N \leq \infty$.

Доказательство теоремы 3 сводится к проверке того, что доказательства лемм 2 и 3 практически не меняются при переходе к конечному времени (с небольшими элементарными корректировками доказательства леммы 3). Равномерность сходимости по N вытекает их того, что степени $\widehat{\varphi}_F^{\,n-1}$, присутствующие в (15) и (20), стремятся к нулю с ростом n. $\square$

Замечание 4. Так как $\mathbf{E}e^{\gamma M_n} \to \mathbf{E}e^{\gamma M}$ при $n \to \infty$ и $\widehat{\varphi}_F < 1$, из теорем 1 и 3 следует, что найдется такое $N \geq 1$, что

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}(M_N > x \mid M > x) > 1 - \varepsilon,$$

т. е. для всех достаточно больших x при условии, что случайное блуждание превысит уровень x, условная вероятность того, что это произойдет до момента N, не меньше чем $1 - \varepsilon$. Как уже отмечено во введении, в этом существенное отличие от случая $F \in \mathscr{S}_0$ в поведении траекторий случайного блуждания.

Замечание 5. Имеет место и локальный по пространству аналог теоремы 3, сходный с теоремой 2.

Результаты теоремы 3 могут быть обобщены на интервалы времени случайной длины (с равномерной эквивалентностью по всем моментам остановки $\sigma \geq 1$ п. н.). Ниже мы формулируем результат для любого п. н. конечного момента остановки σ такого, что $S_\sigma \leq 0$ п. н. Примерами таких моментов остановки являются $\sigma_1 = \min\{n \geq 1 : S_n < 0\}$ и $\sigma_2 = \min\{n > \sigma_1 : S_n < S_{\sigma_1}\}$. Для такого момента остановки положим $\chi = -S_\sigma \geq 0$ и отметим, что $\mathbf{P}(\chi > 0) > 0$, так как $\mathbf{E}\xi_1 < 0$.

Теорема 4. *Предположим, что $F \in \mathscr{S}_\gamma$ при некотором $\gamma > 0$ и $\widehat{\varphi}_F < 1$. Пусть $\sigma \geq 1$ — п. н. конечный момент остановки такой, что $S_\sigma \leq 0$ п. н. Тогда*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}(M_\sigma > x)}{\overline{F}(x)} = (1 - \mathbf{E}e^{-\gamma\chi}) \frac{\mathbf{E}e^{\gamma M}}{1 - \widehat{\varphi}_F}. \tag{30}$$

Доказательство. Так как σ п. н. конечно и $S_\sigma \leq 0$ п. н., то из [13] следует, что

$$\mathbf{P}(M_\sigma > x) \sim \mathbf{P}(M \in (x, x + \chi')) \quad \text{при } x \to \infty,$$

где χ' — не зависящая от M копия случайной величины χ. Теперь результат (30) следует из теоремы 2 и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. $\square$

Для дальнейшего обобщения на случай произвольных моментов остановки можно воспользоваться подходом, развитым в работе [14]. Как следует из замечания 4, достаточно рассмотреть моменты остановки, которые ограничены п. н. сверху фиксированным целым числом. Возможны и другие обобщения, например, на «локальные по пространству» аналоги приведенных утверждений.

В заключение мы хотим поблагодарить А. А. Боровкова и Д. А. Коршунова за ценные и полезные замечания, а также Ю. Вангу за указание небольшой некорректности в предыдущей версии статьи.

Поздравление от имени С. Г. Фосса. От души поздравляю Александра Алексеевича с юбилеем, поражаюсь и завидую его творческому долголетию и желаю крепкого здоровья и дальнейших успехов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chover J., Ney P., Wainger S.* Functions of probability measures // J. Anal. Math. 1973. V. 26, N 2. P. 255–302.
2. *Pakes A.* On the tails of waiting time distributions // J. Appl. Probab. 1975. V. 7, N 5. P. 745–789.
3. *Veraverbeke N.* Asymptotic behavior of Wiener–Hopf factors of a random walk // Stochastic Process. Appl. 1977. V. 5, N 1. P. 27–37.
4. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
5. *Zachary, S.* A note on Veraverbeke's theorem // Queueing Systems. 2004. V. 46, N 1. P. 9–14.
6. *Боровков А. А., Боровков К. А.* О вероятностях больших уклонений для случайных блужданий. II. Регулярно экспоненциальное убывание хвостов распределений // Теория вероятностей и ее применения. 2004. Т. 49, № 2. С. 189–206.
7. *Bertoin J., Doney R. A.* Some asymptotic results for transient random walks // Adv. Appl. Prob. 1996. V. 28, N 2. P. 207–226.
8. *Pakes A.* Convolution equivalence and infinite divisibility // J. Appl. Probab. 2004. V. 41, N 2. P. 407–424.
9. *Klüppelberg C.* Subexponential distributions and integrated tails // J. Appl. Probab. 1988. V. 35, N 2. P. 325–347.
10. *Asmussen S., Kalashnikov V., Konstantinides D., Klüppelberg C., Tsitiashvili G.* A local limit theorem for random walk maxima with heavy tails // Statist. Probab. Lett. 2002. V. 56, N 4. P. 399–404.
11. *Foss S., Zachary S.* The maximum on a random time interval of a random walk with long-tailed increments and negative drift // Ann. Appl. Probab. 2003. V. 13, N 1. P. 37–53.
12. *Рогозин Б. А., Сгибнев М. С.* Сильно субэкспоненциальные распределения и банаховы алгебры мер // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 5. С. 1137–1146.
13. *Denisov D.* A note on the asymptotics for the maximum on a random time interval of a random walk // Markov. Proc. Related Fields. 2005. V. 11, N 1. P. 165–169.
14. *Foss S., Palmowski Z., Zachary S.* The probability of exceeding a high boundary on a random time interval for a heavy-tailed random walk // Ann. Appl. Probab. 2005. V. 15, N 3. P. 1936–1957.

Статья поступила 15 марта 2006 г.

Stan Zachary (Захари Стан)
Heriot-Watt University
Edinburgh, United Kingdom
Фосс Сергей Георгиевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
Current address:
Heriot-Watt University
Edinburgh, United Kingdom
S.Foss@ma.hw.ac.uk