Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 512.54+510.5

О КОНСТРУКТИВНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ

Н. Г. Хисамиев

Аннотация: Доказаны следующие утверждения: 1) двухступенно нильпотентная группа без кручения конструктивизируема тогда и только тогда, когда она изоморфна расширению конструктивной абелевой группы, содержащейся в центре группы, посредством конструктивной абелевой группы без кручения и некоторой рекурсивной системы факторов; 2) конструктивизируемая двухступенно нильпотентная группа без кручения, коммутант которой имеет конечный ранг, упорядоченно конструктивизируема.

Ключевые слова: конструктивная группа, нильпотентная группа, вычислимая подгруппа, центр, система факторов.

Изучение конструктивных групп начато в [1], где А. И. Мальцев поставил общую задачу: «определить, какие конструктивные нумерации допускают те или иные абстрактно заданные группы». Конструктивные абелевы группы изучались в работах А. И. Мальцева, Ю. Л. Ершова, С. С. Гончарова, В. П. Добрицы, Н. Г. Хисамиева и других авторов. Конструктивные нильпотентные группы исследованы мало. Ю. Л. Ершов [2] доказал, что конструктивизация локально нильпотентной группы без кручения продолжается единственным образом до ее пополнения. В работе С. С. Гончарова, А. В. Молокова, Н. С. Романовского [3] построена нильпотентная группа, алгоритмическая размерность которой конечна. В работе В. А. Романькова, Н. Г. Хисамиева [4] доказано, что матричные группы $GL_n(K)$, $SL_n(K)$, $UT_n(V)$, $n \geq 3$, над коммутативным ассоциативным кольцом K с единицей конструктивизируемы тогда и только тогда, когда кольцо K конструктивизируемо. И. В. Латкин [5] построил пример позитивно нумерованной нильпотентной группы без кручения, которая неконструктивизируема.

В данной работе получен критерий конструктивизируемости двухступенно нильпотентной группы без кручения. Доказано, что конструктивизируемая двухступенно нильпотентная группа без кручения, коммутант которой имеет конечный ранг, упорядоченно конструктивизируема. Дано необходимое условие конструктивизируемости нильпотентной группы без кручения.

Все используемые, но не определенные понятия можно найти по теории конструктивных моделей в [6], а по теории групп — в [7].

Предложение 1. *Пусть (G,ν) — конструктивная группа, а B — ее вычислимо перечислимая подгруппа, содержащаяся в центре $Z(G)$ группы G, такая, что фактор-группа $Z(G)/B$ абелева без кручения и имеет конечный ранг. Тогда подгруппы B и $Z(G)$ вычислимы, а следовательно, подгруппы $B, Z(G)$ и*

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда науки МОН РК (грант № 1.7.1–2).

фактор-группы G/B, $G/Z(G)$ с естественными нумерациями, определяемыми по ν, конструктивны.

Доказательство. Пусть $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{n-1}$ — максимальная линейно независимая система элементов группы $Z(G)/B$. Из эквивалентности $\nu m \in Z(G) \Leftrightarrow \exists b \in B \exists m_0 \dots m_{n-1} \in Z\big(\nu m = a_0^{m_0} \dots a_{n-1}^{m_{n-1}} b\big)$ следует, что центр $Z(G)$ вычислимо перечислим в (G, ν), а следовательно, вычислим. Если в правой части этой эквивалентности дополнительно потребовать условие $\sum |m_i| \neq 0$, то $\nu m \in Z(G) \setminus B$. Отсюда получаем вычислимость подгруппы B.

Следствие 1. *Пусть (G, ν) — конструктивная группа и изолятор коммутанта $I(G')$ содержится в центре $Z(G)$ группы G. Если ранг фактор-группы $Z(G)/I(G')$ конечен, то подгруппы $I(G')$ и $Z(G)$ вычислимы, а следовательно, подгруппы $I(G')$, $Z(G)$ и фактор-группы $G/I(G')$, $G/Z(G)$ с нумерациями, индуцированными нумерацией ν, конструктивны.*

Действительно, подгруппа $I(G')$ вычислима в (G, ν), а фактор-группа $Z(G)/I(G')$ абелева без кручения. Отсюда и из предложения 1 получаем требуемое.

Следствие 2. *Пусть (G, ν) — конструктивная двухступенно нильпотентная группа без кручения, $I(G')$ — изолятор коммутанта, $Z(G)$ — центр группы и ранг фактор-группы $Z(G)/I(G')$ конечен. Тогда подгруппы $I(G')$, $Z(G)$ вычислимы, а следовательно, подгруппы $I(G')$, $Z(G)$ и фактор-группы $G/I(G')$, $G/Z(G)$ с естественными нумерациями, определяемыми по ν, конструктивны.*

Действительно, в этом случае $I(G') \subseteq Z$ и $Z(G)/I(G')$ — абелева без кручения, т. е. справедливы все условия предложения 1.

Теорема 1. *Пусть (G, ν) — конструктивная группа и B ее вычислимо перечислимая подгруппа, содержащаяся в центре $Z(G)$ группы G, такая, что фактор-группа G/B абелева без кручения. Тогда существует нумерация μ группы G, для которой справедливы следующие свойства:*

1) группа (G, μ) конструктивна;

2) подгруппа B вычислима в (G, μ);

3) существует такая вычислимо перечислимая система элементов $\{c_i \mid i \in I\}$ в (G, μ), что смежные классы $\{c_i B\}$ образуют базис фактор-группы G/B.

Доказательство. Пусть группа (G, ν) и подгруппа B удовлетворяют условиям теоремы. По предложению 1 можно считать, что ранг фактор-группы $Z(G)/B$ бесконечен.

Пусть $\{B^t \mid t \in \omega\}$ — сильно вычислимая последовательность конечных множеств такая, что выполнены условия:

(1) $\bigcup B^t = B$,

(2) $\{x^\alpha \cdot y^\beta \mid x, y \in B^t,\ |\alpha|, |\beta| \leq t\} \subseteq B^{t+1}$.

Пусть $\bar{c} = \{c_i \mid i < n\}$ — система элементов группы G. *t-Оболочкой системы* $\bar{c}$ назовем множество $[\bar{c}]_t = \{x \mid x^\alpha = \prod c_i^{\alpha_i} b,\ b \in B^t,\ |\alpha|,\ |\alpha_i| \leq t,\ \alpha \neq 0\}$.

Введем множества $\overline{B_t} = B^t \cup \{[x, y] \mid x, y \in [\bar{c}]_t\} \cup \{x \mid x^\alpha \in B^t, \alpha < t, \nu^{-1} x \leq t\}$, $B_t = \{x_1 \dots x_t \mid x_i \in \overline{B_t}\}$.

Систему $\bar{c}$ назовем *t-независимой*, если из

$$\prod_{i<n} c_i^{\alpha_i} b = e,$$

где $b \in B_t$, $|\alpha_i| \leq t$, следует $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

Пусть G_0, G_1 — конечные подмодели группы G. Отображение $\varphi : G_0 \to G_1$ назовем *t-сильным изоморфизмом*, если φ — изоморфизм и для любого числа s, $0 < s \leq t$, и элемента $a \in G_0$ выполнено условие

$$\sqrt[s]{a} \in G_0 \Leftrightarrow \sqrt[s]{\varphi a} \in G_1.$$

Следующие две леммы известны.

Лемма 1. *Пусть G — двухступенно нильпотентная группа и даны элементы $c_i \in G$, $i < t$, $\alpha_i, \beta_i \in Z$. Тогда справедливо равенство*

$$\prod_i c_i^{\alpha_i} \cdot \prod_i c_i^{\beta_i} = \prod_i c_i^{\alpha_i+\beta_i} \prod_{i>j} [c_i, c_j]^{\alpha_i \beta_j}.$$

Лемма 2. *Пусть G — двухступенно нильпотентная группа и даны элемент $x = \prod c_i^{\alpha_i} b$ и число $\beta \in Z$, где $b \in Z(G)$, $\alpha_i \in Z$. Тогда справедливо равенство*

$$x^\beta = \prod c_i^{\alpha_i \beta} \prod_{i>j} [c_i, c_j]^{\frac{\beta^2 - |\beta|}{2} \alpha_i \alpha_j} b^\beta.$$

Лемма 3. *Пусть элементы c_i, a_i, $i < n$, таковы, что для любой системы чисел $\{k_i\}$, $0 < k_i \leq [t!]^2$, системы элементов $\bar{c} = \{c_i\}$, $\bar{d} = \{c_i, a_i^{k_i}\}$ являются $9t^6$-независимыми и $[a_i, c_j] = e$, $[a_i, a_j] = e$, $i, j < n$. Тогда существует t-сильный изоморфизм $\varphi : [\bar{c}]_t \to [\bar{c}']_t$ такой, что $\varphi c_i = c_i'$, $\varphi \restriction B_t = \mathrm{id}$, где $\bar{c}' = \{c_i'\}$, $c_i' = c_i \cdot a_i^{[t!]^2}$.*

Доказательство. Пусть $x \in [\bar{c}]_t$. Тогда существуют числа α, α_i и элемент $b \in B^t$ такие, что $|\alpha|, |\alpha_i| \leq t$, $\alpha \neq 0$, и

$$x^\alpha = \prod c_i^{\alpha_i} b. \tag{1}$$

Положим

$$\varphi x \leftrightharpoons x' \leftrightharpoons x \cdot \prod a_i^{\frac{\alpha_i l}{\alpha}}, \tag{2}$$

где $l = [t!]^2$. Из (1), (2) следует, что $x' \in [\bar{c}']_t$. Покажем, что φ определено корректно. Пусть

$$x^{\alpha'} = \prod c_i^{\alpha_i'} b', \tag{3}$$

где $|\alpha'|, |\alpha_i'| \leq t$, $\alpha' \neq 0$, $b' \in B^t$. Тогда

$$\varphi x \leftrightharpoons \tilde{x}' = x \prod a_i^{\frac{\alpha_i' l}{\alpha}}. \tag{4}$$

Покажем, что $x' = \tilde{x}'$. Для этого возведем (1) в степень α', а (3) в α и найдем выражение элемента $x^{\alpha\alpha'} x^{-\alpha\alpha'} = e$. По лемме 2

$$x^{\alpha\alpha'} = \Big(\prod c_i^{\alpha_i} b\Big)^{\alpha'} = \prod_i c_i^{\alpha_i \alpha'} \prod_{i>j} [c_i, c_j]^{\frac{\alpha'^2 - |\alpha'|}{2} \alpha_i \alpha_j} b^{\alpha'},$$

$$x^{-\alpha\alpha'} = \Big(\prod c_i^{\alpha_i'} b\Big)^{-\alpha} = \prod c_i^{-\alpha_i' \alpha} \prod_{i>j} [c_i, c_j]^{\frac{\alpha^2 - |\alpha|}{2} \alpha_i' \alpha_j'} b'^{-\alpha}.$$

Если положить $\beta_{ij} = \frac{\alpha'^2-|\alpha'|}{2}\alpha_i\alpha_j + \frac{\alpha^2-|\alpha|}{2}\alpha'_i\alpha'_j$, то по лемме 1 имеем

$$e = x^{\alpha\alpha'}x^{-\alpha\alpha'} = \prod c_i^{\alpha_i\alpha'} \prod c_i^{-\alpha'_i\alpha} \prod [c_i, c_j]^{\beta_{ij}} b^{\alpha'} \cdot b'^{\alpha}$$
$$= \prod c^{\alpha_i\alpha'-\alpha'_i\alpha} \prod_{i>j} [c_i, c_j]^{-\alpha_i\alpha'\alpha'_j\alpha+\beta_{ij}} b^{\alpha'} b'^{\alpha}.$$

Так как справедливо неравенство $-\alpha_i\alpha'\alpha'_j\alpha + \beta + \alpha' + \alpha \le 5t^4 < 9t^6$, то из $9t^6$-независимости $\{c_i\}$ и последнего равенства получим $\alpha_i\alpha' - \alpha'_i\alpha = 0$, т. е. $\frac{\alpha_i}{\alpha} = \frac{\alpha'_i}{\alpha'}$.

Отсюда и из (2), (4) следует, что $x' = \tilde{x}'$. Стало быть, отображение φ определено корректно.

Покажем, что если $x' = e$, то и $x = e$. Действительно, пусть

$$x' = x \cdot \prod a_i^{\frac{\alpha_i l}{\alpha}} = e. \tag{5}$$

Отсюда и из (1) имеем

$$(x')^{\alpha} = \prod c_i^{\alpha_i} b \prod a_i^{\alpha_i l} = \prod \big(c_i a_i^l\big)^{\alpha_i} b = e.$$

Так как элементы $c_i a_i^l$ являются $9t^6$-независимыми и $\alpha_i < t$, то $\alpha_i = 0$, $b = e$. Отсюда и из (5) имеем $x = e$.

Покажем теперь, что φ является t-изоморфизмом. Пусть

$$y^{\beta} = \prod c_i^{\beta_i} b', \tag{6}$$

$$(xy)^{\gamma} = \prod c_i^{\gamma_i} b'', \tag{7}$$

где $b', b'' \in B^t$, $|\beta|, |\gamma|, |\beta_i|, |\gamma_i| \le t$, $|\beta|, |\gamma| \ne 0$. Тогда

$$y' = y \cdot \prod a_i^{\frac{b_i l}{\beta}}, \tag{8}$$

$$(xy)' = xy \cdot \prod a_i^{\frac{\gamma_i l}{\gamma}}. \tag{9}$$

Из (2) и (8) получим

$$x'y' = xy \prod a_i^{(\frac{\alpha_i}{\alpha} + \frac{\beta_i}{\beta})l}. \tag{10}$$

Нам нужно показать, что $x'y' = (xy)'$. Для этого возведем равенство (1) в $\gamma\beta$, равенство (6) в $\gamma\alpha$, а равенство (7) в $\alpha\beta$ и найдем элемент

$$z = x^{\alpha\gamma\beta} y^{\alpha\gamma\beta} (xy)^{-\alpha\beta\gamma} = [x, y] \frac{(\alpha\gamma\beta - 1)^2 - |\alpha\gamma\beta - 1|}{2}. \tag{11}$$

По лемме 2

$$x^{\alpha\gamma\beta} = \Big(\prod_i c_i^{\alpha_i} b\Big)^{\gamma\beta} = \prod_i c_i^{\alpha_i\gamma\beta} \prod_{i>j} [c_i, c_j]^{\frac{(\gamma\beta)^2-|\gamma\beta|}{2}\alpha_i\alpha_j} b^{\gamma\beta},$$

$$y^{\alpha\gamma\beta} = \Big(\prod c_i^{\beta_i} b'\Big)^{\alpha\gamma} = \prod_i c_i^{\beta_i\alpha\gamma} \prod_{i>j} [c_i, c_j]^{\frac{(\alpha\gamma)^2-|\alpha\gamma|}{2}\beta_i\beta_j} b'^{\alpha\gamma},$$

$$(xy)^{-\alpha\gamma\beta} = \Big(\prod c_i^{\gamma_i} b''\Big)^{-\alpha\beta} = \prod_i c_i^{-\gamma_i\alpha\beta} \prod_{i>j} [c_i, c_j]^{\frac{(\alpha\beta)^2-|\alpha\beta|}{2}\gamma_i\gamma_j} b''^{-\alpha\beta}.$$

Если положить

$$\varepsilon_{ij}=\frac{(\gamma\beta)^2-|\gamma\beta|}{2}\alpha_i\alpha_j+\frac{(\alpha\gamma)^2-|\alpha\gamma|}{2}\beta_i\beta_j+\frac{(\alpha\beta)^2-|\alpha\beta|}{2}\gamma_i\gamma_j,$$

$$b_0=b^{\gamma\beta}\cdot b'^{\alpha\gamma}\cdot b''^{-\alpha\beta},$$

то из (11) и последних трех равенств следует, что

$$z=\prod_i c_i^{\alpha_i\gamma\beta}\prod_i c_i^{\beta_i\alpha\gamma}\cdot\prod_i c_i^{-\gamma_i\alpha\beta}\prod_{i>j}[c_i,c_j]^{\varepsilon_{ij}}b_0 \tag{12}$$

Если положить

$$\delta_{ij}=\alpha_i\gamma\beta\cdot\beta_j\alpha\gamma-(\alpha_i\gamma\alpha+\beta_i\alpha\gamma)\gamma_j\alpha\beta,$$

то из (12) по лемме 1 имеем

$$e=\prod c_i^{\alpha_i\gamma\beta+\beta_i\alpha\gamma-\gamma_i\alpha\beta}\cdot\prod_{i>j}[c_i,c_j]^{\delta_{ij}}\prod_{i>j}[c_i,c_j]^{\varepsilon_{ij}}b_0\cdot z^{-1}. \tag{13}$$

Справедливо неравенство

$$\delta_{ij}+\varepsilon_{ij}+\gamma\beta+\gamma\beta+\alpha\gamma-\alpha\beta-\frac{(\alpha\gamma\beta-1)^2+|\alpha\gamma\beta-1|}{2}\le 3t^6+\frac{3}{2}t^6+3t^2<9t^6.$$

Отсюда и из $9t^6$-независимости системы $\{c_i\}$ и последнего равенства имеем $\frac{\alpha_i}{\alpha}+\frac{\beta_i}{\beta}=\frac{\gamma_i}{\gamma}$. Из последнего и из (9), (10) вытекает $(xy)'=x'y'$, т. е. φ является изоморфизмом.

Легко проверить, что φ является t-сильным изоморфизмом и $\varphi c_i=c_i'$, $\varphi b=b$, где $b\in B_t$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любых чисел m,n,t и системы элементов $\{c_i\mid i\le n\}$ можно эффективно найти такую систему элементов $\{a_i\}$, что $[a_i,c_j]=e$, $[a_i,a_j]=e$ $i,j\le n$, и для любой системы чисел $\{k_i\}$, $0\le k_i\le[t!]^2$, система элементов $\{d_i\}$, где $d_i=c_ia_i^{k_i}$, будет m-независимой.*

Доказательство проведем индукцией по n. Пусть для $n<s$ лемма доказана и даны система элементов $\{c_i\mid i\le s\}$ и числа m,t. По индукционному предположению можно найти такую систему элементов $\{a_j\mid j<s\}$, что для любой системы чисел $\{k_j\}$ система элементов $\{d_j\}$ будет m-независимой. Рассмотрим следующие возможности.

Если для любой системы чисел $\{k_i\}$ система элементов $\{d_j\}$, c_s является m-независимой, то положим $a_s=e$.

В противном случае, так как фактор-группа $Z(G)/B$ бесконечного ранга, существует такой элемент $a\in G$, что $[a,c_i]=e$, $i\le s$, $[a_i,a]=e$, $i<s$, и для любой системы чисел $\{k_i\}$ система элементов $\{d_j\}$, a^{k_s} будет m-независимой. В качестве элемента a_s выберем такой элемент a с наименьшим ν-номером. Тогда система элементов $\{d_i\}$ будет искомой. Лемма доказана.

Сформулируем некоторые свойства системы элементов, необходимые в дальнейшем. Они непосредственно следуют из доказательства леммы 4.

Замечание 1. Если для любого числа $s>0$ система элементов $\{c_j\mid j\le k\}$, $k\le n$, является s-независимой, то для любых чисел m,t имеем $a_j=e$.

Замечание 2. Пусть k — наименьшее число такое, что $a_k\ne e$. Тогда система элементов $\{c_j\mid j\le k\}$, c_k является m-зависимой. В этом случае a_k

выбирается следующим образом. Он имеет наименьший ν-номер среди таких элементов x, что $[c_i, x] = 1$, $i < n$, и система элементов $\{c_j\}$, x является m-независимой.

Замечание 3. Если для некоторого числа $s > 0$ система $\{c_j \mid j \leq k\}$ является s-зависимой, то существует такое j, что для некоторых чисел m, t будет $a_j \neq 0$.

Приступим теперь к построению требуемой нумерации μ. Пусть R, S — вычислимые множества натуральных чисел такие, что $S \subset \overline{R}$, $|R| = |B|$, $\overline{R} \backslash S$ бесконечно. Далее, пусть $S = \{s_i \mid i \in \omega\}$, $s_i < s_j$ для $i < j$. Нумерацию μ построим по шагам t. Пусть сделаны t шагов, определена система элементов $\overline{c}^t = \{c_i^t \mid i \leq t-1\}$ и построена нумерация μ^t некоторого конечного множества G^t. При этом выполнены следующие условия:

$$(B^t \cup \{x \mid \nu^{-1}x \leq t, x \in [\overline{c}^t]_t\} \subseteq G^t \subseteq [\overline{c}^t]_t).$$

Шаг $t+1$. По лемме 4 для системы $\left\{c_i^t\right\}$ и чисел $m = 9t^6$, t эффективно найдем систему элементов $\left\{a_i^{t+1}\right\}$ и положим $c_i' = c_i^t \cdot a_i^{[t!]^2}$. Затем выберем такой элемент a с наименьшим ν-номером, что система $\{c_i'\}$, a является m-независимой. Тогда полагаем $c_i^{t+1} \leftrightharpoons c_i^t$, $c_t^{t+1} \leftrightharpoons a$, $\overline{c}^{t+1} = \left\{\{c_i'\}, c_t^{t+1}\right\}$.

По лемме 3 существует t-сильный изоморфизм $\varphi_t : [\overline{c}^t]_t \to [\{c_i'\}]_t$. Теперь полагаем $G^{t+1} \leftrightharpoons B^{t+1} \cup \varphi_t G^t \cup \{x \mid \nu^{-1}x \leq t+1,\, x \in [\overline{c}^{t+1}]_{t+1}\}$.

Определим нумерацию μ^{t+1} множества G^{t+1} следующим образом.

1. Если $x \in \varphi_t G^t$, $\varphi_t y = x$, $\mu^t n = y$, то полагаем $\mu^{t+1} n = x$ и элемент y освобождаем от номера.

2. $\mu^{t+1} s_t = c_t^{t+1}$.

Пусть элемент $x \in G^{t+1}$ имеет наименьший ν-номер среди таких элементов G^{t+1}, что они еще не имеют μ^{t+1}-нумерации и $x^\alpha = \prod \left(c_i^{t+1}\right)^{\alpha_i} \cdot b$, где $b \in B^{t+1}$, $|\alpha|, |\alpha_i| \leq t+1$. Тогда элементу x присваиваем μ^{t+1}-номер следующим образом.

3а. Если $\sum |\alpha_i| = 0$, то полагаем $\mu^{t+1} r = x$, где r — наименьшее неиспользованное число из множества R, т. е. r еще не является μ^{t+1}-номером никакого элемента.

3б. Если $\sum |\alpha_i| \neq 0$, то полагаем $\mu^{t+1} n = x$, где n — наименьшее неиспользованное число из множества $\overline{R} \backslash S$.

Аналогично присваиваем μ^{t+1}-номера следующему элементу из G^{t+1}.

Шаг $t+1$ закончен. Переходим к следующему шагу.

Положим

$$\mu n = \lim_t \mu^t n.$$

Покажем, что построенная нумерация требуемая. Для этого докажем следующие леммы.

Лемма 5. *Для любого i существует шаг t_i такой, что $\forall t \geq t_i$ $\left(c_i^t = c_i^{t_i}\right)$.*

Доказательство проведем индукцией по i. Пусть для $i < m$ лемма доказана и $i = m$. Положим $c_j = c_j^{t_j}$, $j < m$, и $q = \max\{t_j\}$. Из замечания 3 следует, что для любого t система $\{c_j\}$ является t-независимой. Допустим, что элементы c_m^t, $t \geq q$, бесконечно часто меняются. Выберем такой элемент a с наименьшим ν-номером, что для любого s система $\{c_j\}, a$ является s-независимой и элемент a принадлежит центру группы G. Тогда из замечаний 2, 3 следует, что $c_m^{l+1} = c_m^l \cdot a^{[l!]^2} \cdot a$ на некотором шаге $l+1$. Отсюда для любого $t \geq l+1$ система $\{c_j\}$, c_m^{l+1} будет t-независимой. По замечанию 1 имеем $\forall t > l$ $\left(c_m^t = c_m^{t+1}\right)$. Получили противоречие, что и доказывает лемму.

Для дальнейшего положим $c_i \leftrightharpoons c_i^{t_i}$.

Лемма 6. *Для любых чисел k и t система $\left\{c_i^t \mid i < k\right\}$ зависит от системы $\left\{c_i^{t+1} \mid i < k\right\}$.*

Лемма 7. *Смежные классы $\{c_i B \mid i \in \omega\}$ образуют базис фактор-группы G/B.*

Доказательство. Допустим противное, и пусть элемент a с наименьшим ν-номером такой, что система $\{c_i B\}, aB$ линейно независима. Тогда найдутся число m и шаг t' такие, что все элементы множества $\{x \mid \nu^{-1}x < \nu^{-1}a\}$ будут t'-зависимы от системы $\{c_j \mid j < m\}$. Можно считать, что $t' \geq \max\{t_j\}$. Пусть s — наибольшее число k такое, что $k < t'$ и элементы $c_0^{t'}, \ldots, c_k^{t'}$ не меняются в дальнейшем. Очевидно, что $s \geq m$. Если $s = t' - 1$, то по построению $c_{t'}^{t'+1} = a$. Отсюда по замечанию 1 $c_{t'} = a$; противоречие.

Поэтому $s < t' - 1$. Тогда на некотором шаге $l + 1 \geq t' + 1$ элемент c_{s+1}^l меняется. Пусть l – наименьший такой шаг. Рассмотрим возможные следующие случаи.

1. $c_{s+1}^{l+1} = c_{s+1}^l a$. Тогда по построению c_{s+1}^l зависит от $\bar{c} \rightleftharpoons \{c_0, \ldots, c_s\}$. Отсюда и из предположения следует, что c_{s+1}^{l+1} не зависит от $\bar{c}$. По замечанию 1 имеем $c_{s+1} = c_{s+1}^l a$. Отсюда a зависит от $\{c_0, \ldots, c_{s+1}\}$; противоречие.

2. Случай 1 не выполняется. Тогда из построения вытекает, что для некоторого $i < s$ верно $[c_i, a] \neq e$. Поэтому по построению $c_l^{l+1} = a$ и для любых чисел k, $s < k < l$, и шага $t \geq l + 1$ верно $c_k^{t+1} \neq c_k^t a$. Покажем, что для любого шага $t \geq l+1$ элемент a не зависит от системы $\bar{c}^t \rightleftharpoons \left\{c_0^t, \ldots, c_{l-1}^t\right\}$. Действительно, допустим противное: t — наименьшее такое число, что a зависит от $\bar{c}^t$. Тогда по лемме 6 элемент a зависит от $c_0, \ldots, c_{l-1}$; противоречие. Следовательно, a не зависит от $\bar{c}^t$. Поэтому $c_l = a$, что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 8. *Нумерация μ является нумерацией группы A.*

Доказательство. Покажем, что для любого элемента x существуют шаг e и число m такие, что $\forall t \geq e$ $(\mu^t m = \mu^e m = x)$. По лемме 6 для элемента x найдутся числа $s, \alpha, \alpha_i, i < s$, и элемент $b \in B$ такие, что

$$x^\alpha = \prod_{i<s} c_i^{\alpha_i} b.$$

Пусть шаг $e + 1$ такой, что $e \geq \max\{t_i\}$, $b \in B^e$ и $|\alpha|, |\alpha_i| \leq e$, $\nu^{-1}x \leq e$. Тогда $x \in G^{e+1}$. Отсюда для некоторого числа m имеем $\mu^{e+1}m = x$. Так как для любого $t \geq e + 1$ верно $\varphi_t c_i = c_i$, $\varphi_t b = b$, из построения нумерации μ^t следует, что $\mu^t m = \mu^{e+1} m = x$. Аналогично доказывается, что для любого числа n существует $\lim\limits_t \mu^t n$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Справедливо $\mu^{-1}B = R$.*

Доказательство. Пусть $b \in B$. Докажем, что тогда для некоторого числа r из R верно $\mu r = b$. По лемме 7 существуют такие числа e и r, что $\forall t \geq e$ $(\mu^t r = \mu^e r = b)$. Пусть e — наименьшее такое число. Можно считать, что $e \geq 2$. Рассмотрим отдельно случаи из определения нумерации μ^{t+1} на шаге $t + 1$ при $t = e - 1$ и $x = b$.

Пусть имеет место случай 1:

$$b \in \varphi_{e-1} G^{e-1}, \quad \varphi_{e-1} y = b, \quad y \in G^{e-1}.$$

Тогда существуют числа α, α_i, $i \le e-2$, и элемент $b' \in B^{e-1}$ такие, что $|\alpha|, |\alpha_i| \le e-1$, $|\alpha| \ne 0$ и $y^\alpha = \prod c_i^{(e-1)^{\alpha_i}} b'$. Отсюда

$$(\varphi_{e-1} y)^\alpha = \prod (c_i^e)^{\alpha_i} b'. \tag{14}$$

Если $\sum |\alpha_i| = 0$, то $b \in B^{e-1}$. Тогда из определений φ_e и μ_e получим, что $\forall t \ge e$ $(\mu^t \cdot r = \mu^{e-1} r = b)$. Это противоречит минимальности e.

Поэтому $\sum |\alpha_i| \ne 0$. Отсюда и из (14) следует, что на некотором шаге s, $s > e$, обнаружится $9s^6$-зависимость элементов $\{c_i^e\}$. Тогда по замечанию 3 имеем $\varphi_{s+1} b \ne b$. Поэтому на шаге $s+1$ номер элемента b изменится; противоречие. Тем самым случай 1 невозможен. Аналогично показывается, что невозможны случаи 2 и 3б. Пусть имеет место случай 3а. Тогда по построению нумерации μ^e имеем $r \in R$. Лемма доказана.

Лемма 10. *(G, μ) — конструктивная группа.*

Доказательство. Через D_t, D обозначим соответственно диаграммы моделей $\langle G^t_{\mu^t}, \cdot, e \rangle$, $\langle G_\mu, \cdot, e \rangle$. Из построения нумерации μ^t следует, что для любого числа m верно $\mu^{t+1} m = \varphi_t \mu^t m$. Отсюда $D_t \subseteq D_{t+1}$. По определению нумерации μ имеем $D = \bigcup D_t$. Так как (G, ν) — конструктивная группа, то $\{D_t\}$ — сильно вычислимая последовательность конечных множеств. Следовательно, множество D вычислимо, т. е. (G, μ) — конструктивная группа. Лемма доказана.

Из лемм 3–10 непосредственно следует, что построенная нумерация требуемая. Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть G — конструктивизируемая двухступенно нильпотентная группа и изолятор коммутанта $I(G')$ содержится в центре группы G. Тогда существует такая конструктивизация μ группы G, что подгруппа $I(G')$ вычислима в (G, μ).*

Действительно, если ν — конструктивная нумерация группы G, то подгруппа $I(G')$ вычислимо перечислима и фактор-группа $G/I(G')$ абелева без кручения, т. е. все условия теоремы 1 выполнены.

Следствие 4. *Пусть G — конструктивизируемая двухступенно нильпотентная группа без кручения. Тогда существует такая конструктивизация μ группы G, что изолятор коммутанта $I(G')$ вычислим в (G, μ).*

Пусть даны абелевы группы A, B, $A \cap B = \{e\}$, и функция $f : A \times A \to B$, удовлетворяющая равенствам

1) $f(a, e) = f(e, a) = e$,
2) $f(a, a^{-1}) = f(a^{-1}, a) = e$,
3) $f(a_i a_j, a_k) \cdot f(a_i, a_j) = f(a_i, a_j a_k) \cdot f(a_j, a_k)$.

Функцию f назовем *системой факторов из A в B*. По ней определим двухступенно нильпотентную группу следующим генетическим кодом: $G = \mathrm{gr}(A, B \| a_0 b_0 = b_0 a_0,\ a_0 b_0 \circ a_1 b_1 = a_0 a_1 f(a_0 a_1) b_0 b_1,\ a_i \in A, b_i \in B)$, которая называется *расширением группы B посредством группы A и системы факторов f*.

Легко проверить, что если (A, ν) и (B, μ) — конструктивные абелевы группы и система факторов вычислима, т. е. является морфизмом нумерованных множеств из $(A, \nu) \times (A, \nu)$ в (B, μ), то естественная нумерация γ группы G, определяемая по ν и μ, будет конструктивной.

Теорема 2. *Пусть G — двухступенно нильпотентная группа и изолятор коммутанта $I(G')$ содержится в центре группы G. Тогда группа G конструктивизируема, если и только если она изоморфна расширению некоторой конструктивной абелевой группы (B,ν), содержащейся в центре $Z(G)$ группы G посредством конструктивной абелевой группой без кручения (A,μ) и вычислимой системы факторов из (A,μ) в (B,ν).*

Доказательство. Необходимость. Пусть (G,ν) — конструктивная группа, удовлетворяющая условию теоремы. Тогда подгруппа $B \leftrightharpoons I(G')$ перечислима и фактор-группа G/B абелева без кручения. По теореме 1 существует конструктивизация μ группы G такая, что подгруппа B вычислима в (G,μ). Введем перечислимое множество A представителей в смежных классах $\{xB \mid x \in G\}$ следующим образом. Представителем единичного класса B считаем элемент e и обозначим его через a_0. Пусть представители $a_0,\dots,a_{n-1}$ уже выбраны и νm_n — элемент с наименьшим ν-номером такой, что для всех $i<n$ верно $\nu m_n \neq a_i (\operatorname{mod} B)$. Если $a_i \cdot (\nu m_n)^{-1} \in B$ для некоторого $i<n$, то полагаем $a_n = a_i^{-1}$. Если же это не так, то $a_n \leftrightharpoons \nu m_n$. На множестве A введем операцию умножения $\circ$, положив

$$a_i \circ a_j = a_k \Leftrightarrow a_i a_j a_k^{-1} \in B.$$

Тогда группа $\langle A, \circ\rangle$ изоморфна G/B и нумерация μ группы A ($\mu n \leftrightharpoons a_n$) будет конструктивной. Пусть ν_0 — нумерация подгруппы B, индуцированная нумерацией ν группы G. Определим функцию $f : A \times A \to B$, положив $f(a_i,a_j) = a_i a_j a_k^{-1}$, где $a_i \circ a_j = a_k$. Легко проверить, что f является морфизмом нумерованных множеств $(A,\mu)\times(A\times\mu) \to (B,\nu_0)$ и удовлетворяет равенствам 1–3 и группа (G,μ) вычислимо изоморфна расширению (B,ν_0) посредством (A,μ) и вычислимой системы факторов f.

Необходимость доказана. Достаточность показана выше.

Следствие 5. *Двухступенно нильпотентная группа G без кручения конструктивизируема тогда и только тогда, когда она изоморфна расширению конструктивной абелевой группы (B,ν), содержащейся в центре группы G, посредством конструктивной абелевой группы без кручения (A,μ) и некоторой рекурсивной системы факторов из (A,μ), в (B,ν).*

Теорема 3. *Конструктивизируемая двухступенно нильпотентная группа G без кручения, коммутант G' которой имеет конечный ранг, упорядоченно конструктивизируема.*

Доказательство. Предположим, что ранг фактор-группы G по изолятору коммутанта $I(G')$ имеет бесконечный ранг. Случай конечного ранга рассматривается аналогично и более прост. По следствию 4 существует такая конструктивизация μ группы G, что изолятор коммутанта $I(G')$ вычислим, а в фактор-группе $G/I(G')$ существует вычислимо перечислимая база $\{\bar{a}_i \mid i \in \omega\}$, т. е. множество $\{\mu^{-1}a_i \mid i \in \omega\}$ вычислимо перечислимо. Пусть $b_0,\dots,b_t$ — база изолятора $I(G')$. Тогда по любому элементу $x \in G$ можно эффективно найти такую последовательность чисел $\langle k, r_0,\dots,r_{n-1}, s_0,\dots,s_{t-1}\rangle$, что

$$x^k = a_0^{r_0}\dots a_{n-1}^{r_{n-1}} b_0^{s_o}\dots b_{t-1}^{s_{t-1}}.$$

Введем порядок на G, положив $x \geq e \Leftrightarrow r_0 = \dots = r_{i-1} = 0$, $r_i > 0 \vee (r_0 = \dots = r_{n-1} = 0$, $s_0 = \dots = s_{j-1} = 0$, $s_j > 0$. Легко проверить, что относительно этого порядка группа $\langle G, \cdot, \leq, \mu\rangle$ будет упорядоченно конструктивной.

Приведем одно необходимое условие конструктивизируемости нильпотентной группы без кручения.

Предложение 2. *Пусть G — конструктивизируемая нильпотентная группа без кручения. Тогда существует такой центральный ряд конструктивизируемых подгрупп*

$$R = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G,$$

что все его секции G_{n+1}/G_n конструктивизируемы.

Доказательство. Пусть (G, ν) — конструктивная нильпотентная группа без кручения ступени n. Через G_i, Z_i обозначим соответственно изолятор i-го централа и i-й гиперцентр. Легко проверить, что подгруппы G_i вычислимо перечислимы в (G, ν) и $G_i \subset Z_{n-(i-1)}$. Поэтому фактор-группа G_i/G_{i+1} — вычислимо перечислимо определенная абелева группа без кручения. Тогда по следствию 3 из [8] она конструктивизируема.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* О рекурсивных абелевых группах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 46, № 5. С. 1009–1012.
2. *Ершов Ю. Л.* Существование конструктивизаций // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 5. С. 1041–1044.
3. *Гончаров С. С., Молоков А. В., Романовский Н. С.* Нильпотентные группы конечной алгоритмической размерности // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 82–88.
4. *Романьков В. А., Хисамиев Н. Г.* О конструктивных матричных и упорядоченных группах // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 353–363.
5. *Латкин И. В.* Арифметическая иерархия нильпотентных групп без кручения // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 3. С. 308–313.
6. *Ершов Ю. Л., Гончаров С. С.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1996.
7. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1996.
8. *Хисамиев Н. Г.* Иерархии абелевых групп без кручения // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 2. С. 205–226.

Статья поступила 28 июня 2005 г., окончательный вариант — 29 мая 2006 г.

Хисамиев Назиф Гарифуллинович
Восточно-Казахстанский гос. технический университет имени Д. Серикбаева, Набережная Красных Орлов, 69, Усть-Каменогорск 070004, Казахстан
center@ektu.kz, hisamiev@mail.ru