Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 512.54

СТРОЕНИЕ ГРУППЫ, ПОРЯДКИ ЭЛЕМЕНТОВ КОТОРОЙ НЕ ПРЕВОСХОДЯТ ЧИСЛА 4

Д. В. Лыткина

Аннотация: Доказывается, что группа, порядок каждого элемента которой не превосходит числа 4, либо обладает нетривиальной двуступенно нильпотентной нормальной силовской подгруппой, либо содержит нормальную элементарную абелеву 2-подгруппу, фактор по которой изоморфен неабелевой группе порядка 6.

Ключевые слова: период, Санов, локально-конечная группа.

В знаменитой работе И. Н. Санова [1] о локальной конечности групп периода 4 содержится набросок доказательства того, что группа, порядки элементов которой не превосходят числа 4, локально конечна. Мы следующим образом уточняем этот результат, попутно реконструируя и несколько упрощая доказательство И. Н. Санова.

Теорема 1. *Пусть G — группа, в которой порядок любого элемента не превосходит числа* 4. *Тогда G локально конечна и справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *G — группа периода* 3 *или* 4*;*

2) *в G есть нормальная элементарная абелева* 3*-подгруппа N, и G/N изоморфна подгруппе группы кватернионов порядка* 8*;*

3) *в G есть нормальная элементарная абелева* 2*-подгруппа N, и $G = N \cdot S$, где $S \simeq S_3$;*

4) *в G есть нормальная* 2*-подгруппа N ступени нильпотентности не выше двух, и $|G/N| = 3$.*

1. Обозначения и предварительные результаты

Если H — подгруппа группы G, $x, y \in G$, X, Y — подмножества из G, то $x^y = y^{-1}xy$, $X^y = \{y^{-1}xy \mid x \in X\}$, $[x, y] = x^{-1}x^y$, $x^Y = \{x^y \mid y \in Y\}$, $X^Y = \{x^y \mid x \in X,\ y \in Y\}$, $N_H(X) = \{g \in H \mid X^g = X\}$, $\langle X \rangle$ — подгруппа, порожденная X, $[X, Y] = \langle [x, y] \mid x \in X,\ y \in Y \rangle$, $C_H(X) = \{h \in H \mid [h, x] = 1$ для всех $x \in X\}$, $Z(G) = C_G(G)$. Если X — группа, то $X' = [X, X]$. Если p — простое число, то p' означает множество всех простых чисел, отличных от p. Для множества π простых чисел $O_\pi(G)$ определяется как произведение всех нормальных π-подгрупп из G, $O_{p',p}(G)$ — как полный прообраз в G группы $O_p(G/O_{p'}(G))$. Через $\Phi(G)$ обозначается подгруппа Фраттини, т. е. пересечение всех максимальных подгрупп группы G, A_m и S_m означают знакопеременную и соответственно симметрическую группы степени m.

Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского фонда алгебры и логики.

Группа A действует на нетривиальной группе V *свободно*, если $v^a \neq v$ при всех $a \neq 1 \neq v$. *Конечной группой Фробениуса* называется такое полупрямое произведение конечной нормальной подгруппы V и подгруппы A, что A действует свободно на V. При этом V называется *ядром*, а A — *дополнением*.

Нам понадобятся следующие известные факты, на которые мы будем ссылаться как на предложение с соответствующим номером.

1. *Пусть группа A действует на конечной группе V свободно. Тогда*

(а) *V нильпотентна* [2]. *Если порядок A четен, то A абелева* (см. [3, теорема 10.1.4b]). *Если порядок A делится на 3, то V абелева или двуступенно нильпотентна и $\langle v, v^x\rangle = \langle v\rangle \times \langle v^x\rangle$ для любого $v \in V$ и любого элемента x порядка 3 из A* [4].

(б) *Силовская p-подгруппа из A является циклической или обобщенной группой кватернионов.*

2. *Конечная группа, порядок которой не делится на три различных простых числа, разрешима* (см. [5, теорема 16.8.7]).

3 (замечание Фраттини). *Если N — конечная нормальная подгруппа группы G и S — силовская подгруппа в N, то $G = NN_G(S)$.*

4. *Пусть V — конечная элементарная абелева группа, на которой точно действует группа Фробениуса с абелевым ядром и циклическим дополнением C порядка r. Тогда $|V| = |C_V(C)|^r$* [6, лемма 5]).

5. *Если H — конечная разрешимая группа, то $O_{p',p}(H)/O_{p'}(H)$ содержит свой централизатор в $H/O_{p'}(H)$* (см. [5, теорема 18.4.4]).

6 (теорема Бернсайда о базисе). *Если P — конечная p-группа, то $W = P/\Phi(P)$ — элементарная абелева p-группа, которую можно рассматривать как векторное пространство над полем порядка p.*

(а) *Если $\{w_i = Px_i \mid i = 1,\dots,r\}$ — базис пространства W, то $P = \langle x_1,\dots,x_r\rangle$* [5, теорема 12.2.1].

(b) *Если φ — автоморфизм P, порядок которого взаимно прост с p, и φ индуцирует на W тривиальный автоморфизм, то $\varphi = 1$* (см. [5, теорема 12.2.2]).

2. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1 разобьем на несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть H — конечная подгруппа группы G, $x \in G$, $x^2 \in H$ и порядок любого элемента из Hx не превосходит числа 4. Тогда группа $\langle H, x\rangle$ конечна.*

Доказательство. Поскольку $Hx = x^{-1}(xH)x$, порядок любого элемента из xH также не превосходит числа 4.

Очевидно, любой элемент y из $\langle H, x\rangle$ можно представить в виде

$$y = h_1xh_2xh_3x\dots h_{n-1}xh_n, \tag{1}$$

где $n \geq 1$, $h_1,\dots,h_n \in H$ и все элементы $h_2,\dots,h_{n-1}$ нетривиальны. Для доказательства леммы достаточно показать, что y можно представить в виде (1), где $n \leq 2|H|+4$, а для этого достаточно доказать, что в случае, когда $n = 2|H|+5$, можно найти представление y в виде (1) с меньшим числом сомножителей.

Итак, пусть выполнено (1), где $n = 2|H| + 5$. Заметим, что для любого $h \in H$ либо $(xh)^4 = 1$ и тогда

$$xhx = h^{-1}x^{-1}h^{-1}x^{-1}h^{-1} = h^{-1}x(x^{-2}h^{-1}x^{-2})xh^{-1} = h^{-1}xh'xh^{-1} \tag{2}$$

для некоторого $h' \in H$, либо $(xh)^3 = 1$ и тогда

$$xhx = h^{-1}x^{-1}h^{-1} = h^{-1}x^{-2}xh^{-1} = h'xh^{-1}, \tag{3}$$

где $h' \in H$.

Если $(xh_i)^3 = 1$ для некоторого i, $1 < i < n$, то, заменив по (3) в выражении (1) произведение xh_ix на $h'xh_i^{-1}$, мы уменьшим длину правой части (1). Поэтому можно считать, что $(xh_i)^4 = 1$. Используя (2) для $h = h_i$ и заменяя в (1) xh_ix на $h_i^{-1}xh'xh_i^{-1}$, придем к выражению типа (1) с тем же или меньшим n, где элемент h_{i-1} заменен на $h_{i-1}h_i^{-1}$.

Затем точно так же можно либо уменьшить длину получившегося выражения, либо заменить h_{i-2} на $h_{i-2}\bigl(h_{i-1}h_i^{-1}\bigr)^{-1} = h_{i-2}h_ih_{i-1}^{-1}$. Повторяя этот процесс, мы сможем либо уменьшить длину (1), либо заменить h_r при $r \geq 2$ любым из элементов набора

$$h_rh_{r+1}^{-1},\ h_rh_{r+2}h_{r+1}^{-1}, \ldots, h_rh_{r+2}\ldots h_{r+2s}h_{r+2s-1}^{-1}\ldots h_{r+3}^{-1}h_{r+1}^{-1}, \tag{4}$$

где $r + 2s < n$.

В частности, h_2 можно заменить любым из s элементов

$$h_2h_4h_3^{-1},\ h_2h_4h_6h_5^{-1}h_3^{-1}, \ldots, h_2h_4\ldots h_{2+2s}h_{1+2s}^{-1}\ldots h_5^{-1}h_3^{-1},$$

где $2 + 2s = n - 1$, т. е. $s = |H| + 1$. Поскольку $s > |H|$, среди этих элементов есть одинаковые, т. е. при некоторых натуральных u, v с условием $1 \leq u < v \leq s$ выполняется равенство

$$h_2h_4\ldots h_{2+2u}h_{1+2u}^{-1}\ldots h_5^{-1}h_3^{-1} = h_2h_4\ldots h_{2+2v}h_{1+2v}^{-1}\ldots h_5^{-1}h_3^{-1},$$

откуда

$$h_{4+2u}\ldots h_{2+2v}h_{1+2v}^{-1}\ldots h_{3+2u}^{-1} = 1.$$

Левая часть этого равенства — один из элементов набора (4) при $r = 4+2u$, поэтому h_{4+2u} можно заменить на 1 и тем самым уменьшить длину записи элемента (1). Лемма доказана.

Докажем локальную конечность группы G из теоремы 1. Достаточно показать, что $\langle H, x\rangle$ конечна для произвольной конечной подгруппы H из G и любого $x \in G$. Если $x \in H$, то доказывать нечего. Пусть порядок хотя бы одного из элементов вида $y = h_1xh_2$, где h_1, $h_2 \in H$, не равен 3. Тогда $y^4 = 1$ и $\langle H, x\rangle = \langle H, y\rangle = \langle H_1, y\rangle$, где $H_1 = \langle H, y^2\rangle$. По лемме 1 с y^2 вместо x подгруппа H_1 конечна. По той же лемме с H_1 вместо H и y вместо x подгруппа $\langle H_1, y\rangle$ конечна и $\langle H_1, y\rangle = \langle H, x\rangle$.

Осталось рассмотреть случай, когда порядок любого из элементов h_1xh_2 равен 3. Покажем, что в этом случае

$$\langle H, x\rangle = H\langle x\rangle H \cup R, \tag{5}$$

где $R = H\{x, x^{-1}\}H\{x, x^{-1}\}H$.

Обозначим через M правую часть равенства (5). Достаточно показать, что $Rx \subseteq M$. Пусть $y \in R$. Тогда $y = h_1x^{\varepsilon_1}h_2x^{\varepsilon_2}h_3$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2$.

Если $\varepsilon_2 = 1$, то в силу равенства $(xh_3)^3 = 1$ получаем $yx = h_1 x^{\varepsilon_1} h_2 (xh_3x) = h_1 x^{\varepsilon_1} h_2 h_3^{-1} x^{-1} h_3^{-1} \in M$.

Если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = -1$, то $(h_2x^{-1}) = \left(xh_2^{-1}\right)^{-1}$ и поэтому $(h_2x^{-1})^3 = 1$. Отсюда $yx = h_1x^{-1}h_2x^{-1}h_3x = h_1h_2^{-1}xh_2^{-1}h_3x \in M$. Наконец, если $\varepsilon_1 = 1$, а $\varepsilon_2 = -1$, то $yx = h_1xh_2x^{-1}h_3x = h_1(xh_2x)xh_3x = h_1h_2^{-1}x^{-1}h_2^{-1}xh_3x$ и мы возвращаемся к уже рассмотренному случаю. Итак, G локально конечна.

Предположим, что G не является ни 2-группой, ни 3-группой.

Лемма 2. *Если в G произведение любых двух 2-элементов снова 2-элемент, то выполняется п. 4 теоремы 1.*

Доказательство. Пусть N — подгруппа, порожденная всеми 2-элементами из G. Тогда N — (локально конечная) нормальная в G 2-подгруппа и G/N — локально конечная группа периода 3. Если $|G/N| > 3$, то в G/N найдутся элементы Nx и Ny порядка 3, порождающие различные циклические подгруппы. Пусть t — произвольный нетривиальный элемент из N. Тогда $X = \langle t, x, y\rangle$ — конечная подгруппа, в которой силовская 2-подгруппа $N_0 = X \cap N$ инвариантна и силовская 3-подгруппа R нециклическая. В X нет элементов порядка 6, поэтому X — группа Фробениуса с ядром N_0 и дополнением R. Это противоречит предложению 1(б). Итак, $|G/N| = 3$.

Пусть x порождает G по модулю N, a, b, c — произвольные элементы из N и $X = \langle x, a, b, c\rangle$. Тогда, как и в предыдущем абзаце, X — группа Фробениуса с ядром $X_0 = X \cap N$ и дополнением $\langle x\rangle$. По предложению 1(а) X_0 двуступенно нильпотентна. В частности, $[[a, b], c] = 1$. Поскольку a, b, c — произвольные элементы из N, подгруппа N абелева или двуступенно нильпотентна. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если в G произведение любых двух 3-элементов снова 3-элемент, то выполняется п. 2 теоремы 1.*

Доказательство. Пусть N — подгруппа из G, порожденная всеми 3-элементами. Тогда N — (локально конечная) нормальная в G подгруппа периода 3. Если $\{Nx_1, \ldots, Nx_s\}$ — конечное множество нетривиальных элементов из G/N, а y, z — нетривиальные элементы из N, то, как и раньше, $X = \langle x_1, \ldots, x_s, y, z\rangle$ — конечная группа Фробениуса с ядром $N_0 = X \cap N$ и дополнением C, которое является 2-группой.

По предложению 1(а) N_0 коммутативна, а по предложению 1(б) C — циклическая группа или обобщенная группа кватернионов. Поскольку C периода 4, порядок C не превосходит восьми и C изоморфна подгруппе группы кватернионов порядка 8. Отсюда вытекает, что $[z, y] = 1$, т. е. N — элементарная абелева 3-группа, а G/N — конечная 2-группа, изоморфная подгруппе кватернионов порядка 8. Лемма доказана.

Пусть теперь не выполняются условия ни одной из лемм 2, 3 и x, y — 2-элементы, произведение которых не является 2-элементом, а z, t — 3-элементы, произведение которых не является 3-элементом. Тогда $U = \langle x, y, z, t\rangle$ — конечная группа, в которой ни одна из силовских подгрупп не инвариантна, и этим же свойством обладает любая конечная подгруппа, содержащая U. Опишем более точно строение таких подгрупп.

Лемма 4. *Пусть H — конечная группа, в которой нет нетривиальных нормальных силовских подгрупп. Если порядок любого элемента из H не превосходит числа 4, то $O_2(H)$ — нетривиальная элементарная абелева 2-группа и*

$H = O_2(H) \cdot S$, *где* S *— подгруппа, изоморфная симметрической группе степени* 3.

Доказательство. По предложению 2 H разрешима. Если $O_2(H) = 1$, то $O_3(H) \neq 1$ и силовская 2-подгруппа T группы $O_{3,2}(H)$ действует на $O_3(H)$ свободно. По предложению 1(б) в T существует единственная подгруппа C порядка 2. По замечанию Фраттини $G = O_3(H)N_H(T) = O_3(H)C_H(C)$. По условию в $C_H(C)$ нет элементов порядка 6 и, следовательно, нет элементов порядка 3, поэтому $O_3(H)$ — силовская 3-подгруппа в H, что противоречит условию.

Итак, $O_2(H) \neq 1$. Если R — силовская 3-подгруппа из H, то R действует свободно на $O_2(H)$. По предложению 1(б) R — циклическая группа (порядка 3), поэтому $O_{2,3}(H) = O_2(H)R$. По замечанию Фраттини (предложение 3) $H = O_{2,3}(H)N_N(R) = O_2(H)RN_H(R) = O_2(H)N_H(R)$. По предложению 5 $C_H(R) \leq O_2(H)R$. Поскольку R действует свободно на $O_2(H)$, то $C_H(R) = R$ и поэтому $N_H(R)/R$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов R. В силу того, что порядок группы автоморизмов R равен 2 и силовская 2-подгруппа из H неинвариантна, $|N_H(R)/R| = 2$, т. е. $S = N_H(R) \simeq S_3$. Итак, $H = O_2(H)S$, где $S \simeq S_3$. Осталось показать, что $O_2(H)$ — элементарная абелева группа.

Положим $V = O_2(H)$. Пусть x — элемент порядка 3 из H, а t — элемент порядка 2 из S. Тогда $x^t = x^{-1}$ и $\langle x, t\rangle = S$. Отметим, что x действует при сопряжении в V без неподвижных точек, поэтому ступень нильпотентности V не превосходит двух и $\langle v, v^x\rangle = \langle v\rangle \times \langle v^x\rangle$ для любого элемента v из V (предложение 1(а)).

Наша цель — показать, что в V нет элементов порядка 4. Предположим противное. Пусть H — противоречащий пример наименьшего порядка и v — элемент порядка 4 из V. В силу минимальности $V = \langle v^S\rangle$. Пусть $\bar{v} = \Phi(V)v \in H/\Phi(V) = \overline{H}$. Тогда $\langle \bar{v}^{\overline{R}}\rangle$ — группа порядка 2^2 по предложениям 1(а) и 6(а) и поэтому $V = \langle v^S\rangle$ порождается двумя или четырьмя элементами. В первом случае $V = \langle v, v^x\rangle = \langle v\rangle \times \langle v^x\rangle$ и, следовательно, порядок любого элемента из $V \setminus \Phi(V)$ равен 4. По предложению 6(b) S действует точно на $\overline{V}$, поэтому v можно выбрать так, чтобы $\bar{v}^t \neq \bar{v}$. Тогда $(v^2)^t \neq v^2$ и $(vt)^2 = vv^t \notin \Phi(V)$, откуда vv^t — элемент порядка 4, а vt — элемент порядка 8, что противоречит условию.

Итак, V порождается четырьмя элементами. По предложению 6(а) $|\overline{V}| = 2^4$ и, следовательно, $|C_{\overline{V}}(\bar{t})| \geq 4$. Пусть $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ — нетривиальные неравные элементы из $C_{\overline{V}}(t)$. Так как $\bar{v}_i^{\bar{x}\bar{t}} = \bar{v}_i^{\bar{t}\bar{x}^{-1}} = \bar{v}_i^{x^{-1}} = \bar{v}_i\bar{v}_i^x \in \left\langle \bar{v}_i, \bar{v}_i^x\right\rangle$, то $\overline{V}_i = \langle \bar{v}_i, \bar{v}_i^x\rangle$ инвариантна относительно S для $i = 1, 2$ и $\overline{V} = \overline{V}_1 \times \overline{V}_2$. Пусть V_i — полный прообраз группы $\overline{V}_i$ в V. В силу минимальности H подгруппа V_i элементарна. Пусть w_i — какой-нибудь прообраз $\bar{v}_i^{\bar{x}}$. Поскольку $\bar{v}_i^{\bar{x}\bar{t}}\bar{v}_i^x = \bar{v}_i \neq 1$, элемент $v_i = {w_i}^t w_i$ не лежит в $\Phi(V)$. С другой стороны, ${v_i}^t = {w_i}^{t^2}{w_i}^t = w_i{w_i}^t = v_i$. Положим $a_1 = v_1, a_2 = {v_1}^x, b_1 = v_2, b_2 = {v_2}^x$. По предложению 6(а) $V = \langle a_1, a_2, b_1, b_2\rangle$, при этом $[a_1, a_2] = [b_1, b_2] = 1, {a_2}^t = a_1a_2, {b_2}^t = b_1b_2$. Положим $c_{ij} = [a_i, b_j]$, $i, j = 1, 2$. Тогда

$$c_{11}^x = [a_1^x, b_1^x] = [a_2, b_2] = c_{22},$$

$$c_{12}^x = [a_1^x, b_2^x] = [a_2, b_1b_2] = c_{21}c_{22},$$

$$c_{21}^x = c_{12}c_{22}, c_{22}^x = c_{11}c_{12}c_{21}c_{22}.$$

Очевидно, элементы c_{ij} порождают V'. Поскольку V порождается элементами порядка 2, то $V' = \Phi(V)$.

Непосредственная проверка показывает, что $(c_{12}c_{21})^x = c_{12}c_{21}$ и $(c_{11}c_{12}c_{22})^x = c_{11}c_{12}c_{22}$, поэтому $c_{12}c_{21} = 1$ и $c_{11}c_{12}c_{22} = 1$. Далее, $(a_2b_2t)^2 = a_2b_2a_2^tb_2^t = a_2b_2a_1a_2b_1b_2 = a_1b_1w$, где $w \in V' \subseteq Z(V)$, поэтому $1 = (a_1b_1w)^2 = c_{11}$. Кроме того, $1 = c_{11}^x = c_{22}$. Отсюда $c_{12} = 1 = c_{21}$. Таким образом, $V' = 1$ и V — элементарная абелева вопреки выбору. Лемма доказана.

Покажем теперь, что $c^2 = 1$ для любого элемента из G''. Действительно, c — произведение конечного числа коммутаторов элементов из G', каждый из которых — произведение конечного числа коммутаторов элементов из G, поэтому c лежит во втором коммутанте некоторой конечно порожденной подгруппы H, содержащей U. По лемме 2 H'' — элементарная абелева 2-группа и, следовательно, $c^2 = 1$. Это показывает, что G'' — элементарная абелева 2-группа. Далее, $G = G''S$, где $S \simeq S_3$, и теорема доказана.

Автор выражает благодарность Анатолию Константиновичу Шлепкину за постановку задачи и обсуждение результатов.

Предварительный вариант этой работы опубликован в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Санов И. Н.* Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Уч. зап. Ленингр. гос. ун-та. 1940. № 55. С. 166–170.
2. *Thompson J. G.* Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1959. V. 45. P. 578–581.
3. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper & Row, 1973.
4. *Neumann B. H.* Groups with automorphisms that leave the neutral element fixed // Arch. Math. 1956. V. 7. P. 1–5.
5. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
6. *Заварницин А. В., Мазуров В. Д.* О порядках элементов в накрытиях симметрических и знакопеременных групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 296–315.
7. *Лыткина Д. В.* Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4 // Математические системы. Красноярск: КрасГАУ, 2005. Вып. 4. С. 54–59.

Статья поступила 10 апреля 2006 г.

Дарья Викторовна Лыткина
Сибирский фонд алгебры и логики,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
d_lytkin@mail.ru