Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 517.9

НЕТРИВИАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НУЛЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ПРОСТЫХ ДРОБЕЙ

В. Б. Шерстюков

Аннотация: Предложена модификация известной ранее абстрактной схемы, сводящей задачу о возможности разложения элементов локально выпуклого пространства в ряды по системе собственных векторов некоторого линейного оператора к вопросу о наличии нетривиального разложения нулевого элемента этого пространства. Реализация этой общей схемы проводится для пространств функций, аналитических в областях расширенной комплексной плоскости, и систем простых дробей — собственных функций оператора Поммье.

Ключевые слова: абсолютно представляющая система, нетривиальное разложение нуля, обобщенное преобразование Лапласа, оператор представления и свертки, оператор Поммье, ряд Вольфа — Данжуа.

§ 1. Введение

Фундаментальные результаты А. Ф. Леонтьева по представлению аналитических функций рядами экспонент, собранные им в монографии [1], привели к созданию в работах Ю. Ф. Коробейника и его учеников теории абсолютно представляющих систем (АПС). Система $X = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \neq 0$, $k = 1, 2 \dots,$ элементов локально выпуклого пространства (ЛВП) E называется *абсолютно представляющей* в E (см., например, [2]), если каждый элемент $x \in E$ допускает разложение в абсолютно сходящийся в E ряд $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k$. Всюду ниже будем говорить, следуя [2], что в E имеется *нетривиальное разложение нуля* (НРН) по системе X, если существует сходящийся в E к нулю ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k x_k$, не все коэффициенты b_k которого равны нулю. Основной вопрос, изучаемый в настоящей работе, хорошо известен и восходит к [1]: каким условиям должны удовлетворять пространство E, его подпространство F и система X, чтобы из существования абсолютно сходящегося в E НРН по системе X следовало, что X — АПС в F (с индуцированной из E топологией)? В [1, 2] эта задача детально изучена для $E = \mathscr{A}(G)$, $F = \mathscr{A}(\overline{G})$, $X = \{\exp \lambda_k z\}_{k=1}^{\infty}$. Здесь G — выпуклая ограниченная область в $\mathbb{C}$; $\mathscr{A}(G)$ — пространство аналитических в G функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах G; $\mathscr{A}(\overline{G})$ — подпространство $\mathscr{A}(G)$, состоящее из функций, локально аналитических на $\overline{G}$; λ_k — нули некоторой целой функции со специальными свойствами.

К настоящему моменту имеется большое количество как конкретных, так и абстрактных результатов подобного рода, полученных для различных пространств и систем элементов в них Ю. Ф. Коробейником, А. В. Абаниным, С. Н. Мелиховым, В. П. Громовым [3–6] и др. Так, в [5] указанная задача исследовалась в довольно общей ситуации, когда E — полное ЛВП, F можно наделить топологией бочечного или борнологического ЛВП [7] так, что $F \hookrightarrow E$ ($\hookrightarrow$ — символ непрерывного вложения), а X — последовательность, выбранная из множества $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ собственных элементов некоторого линейного оператора D, действующего непрерывно в E и в F. Однако сделанные в статье [5] дополнительные предположения (в частности, о структуре сопряженных пространств) ограничивают область применимости полученных в ней результатов. Например, их нельзя использовать при описании АПС вида $\left\{\frac{1}{z-\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ в терминах НРН и получить как следствия утверждения, аналогичные некоторым результатам работ [8–10]. В то же время этот вопрос очень интересен и имеет богатую историю (см. [11–14; 15, гл. 5, § 6]; список можно продолжить).

В настоящей статье предлагается обобщение схематизации, проведенной в [5]. В качестве приложений установлен ряд новых результатов о разложении функций, аналитических в областях расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, в ряды Вольфа — Данжуа $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{z-\lambda_k}$.

§ 2. Нетривиальные разложения нуля со специальными коэффициентами

Пусть E и F — ЛВП с топологически сопряженными к ним пространствами E' и F' соответственно; $P(E)$ — набор преднорм, задающих топологию в E; $F \hookrightarrow E$; D — линейный оператор, действующий непрерывно и в F, и в $\widehat{E}$ (пополнение E); Q — область в $\mathbb{C}$. Предположим, что для любого $\lambda \in Q$ найдутся такие $\nu = \nu(\lambda) \in \mathbb{C}$, $e_\lambda \in F \setminus \{0\}$, что $De_\lambda = \nu(\lambda)e_\lambda$. Считаем далее, что из равенства $Dx = \nu(\mu)x$, $x \in \widehat{E}$, $\mu \in Q$, следует $x = d(\mu)e_\mu$; $\nu(\lambda)$ — аналитическая функция в области Q, при этом найдутся не имеющие в Q нулей функции $\omega_i \in \mathscr{A}(Q)$, $i = 1, 2$, такие, что $\omega(\lambda, t) = \omega_1(\lambda)\omega_2(t)$ для любых $\lambda, t \in Q$, где

$$\omega(\lambda, t) := \begin{cases} \frac{\nu(\lambda)-\nu(t)}{\lambda-t}, & \lambda, t \in Q,\ \lambda \neq t, \\ \nu'(\lambda), & \lambda = t \in Q. \end{cases}$$

Предполагаем еще, что система $\mathscr{E} := \{e_\lambda\}_{\lambda\in Q}$ полна в каждом из пространств F и E. Оператор Лапласа $T : \varphi \in F' \to (T\varphi)(\lambda) := \varphi(e_\lambda)$, $\lambda \in Q$, устанавливает алгебраический изоморфизм векторных пространств F' и $\widetilde{F} := T(F')$, E' и $\widetilde{E} := T(E')$ соответственно. Очевидно, что для любых $\lambda \in Q$, $\varphi \in F'$ будет $\widetilde{\varphi}(\lambda) := (T\varphi)(\lambda) = \widetilde{\langle e_\lambda, \widetilde{\varphi}\rangle}_F$, где $\widetilde{\langle\cdot,\cdot\rangle}_F := \langle\cdot, T^{-1}(\cdot)\rangle_F$, а $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ — естественная билинейная форма, устанавливающая двойственность между F и F'. Будем считать выполненными вложения $\widetilde{E}, \widetilde{F} \subseteq \mathscr{A}(Q)$. Векторное пространство $H \subseteq \mathscr{A}(Q)$ называем *инвариантным относительно деления на многочлены*, если справедлива импликация $f(\lambda) \in H$, $f(\mu) = 0$ в точке $\mu \in Q \Longrightarrow \frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu} \in H$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность простых нулей в Q некоторой функции $\mathscr{L} \in \widetilde{F} \setminus \{0\}$. Будем использовать следующий класс последовательностей: $R_\Lambda = \{r = (r_k)_{k\in\mathbb{N}} : 0 < r_k \leq \rho(\lambda_k, \partial Q),\ k = 1, 2, \dots,\ Q \setminus U_{(r)} \neq \varnothing\}$, где $U_k = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_k| < r_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, $U_{(r)} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$. Введем множество мультипликаторов $M(\widetilde{E}, \widetilde{F}) = \{d : Q \to \mathbb{C} : d(\lambda) \cdot f(\lambda) \in \widetilde{F}\ \forall f \in \widetilde{E}\}$. Для последовательности $r \in R_\Lambda$ положим

$$M_{\mathscr{L},r}(\widetilde{E},\widetilde{F}) = \left\{ d \in M(\widetilde{E},\widetilde{F}) : \sup_{p\in P(E)} \sup_{\lambda \in Q\setminus U_{(r)}} \frac{|d(\lambda)|p(e_\lambda)}{|\mathscr{L}(\lambda)|} < +\infty \right\}.$$

Представление элемента $x \in E$ в виде сходящегося в E ряда $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k e_{\lambda_k}$ будем называть *разложением из класса* $\tilde{\ell}_E\{\gamma_k\}$, если

$$\sup_{p\in P(E)} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k\gamma_k| p(e_{\lambda_k}) < +\infty.$$

Следующая теорема обобщает основной результат [5, § 3] и доказывается тем же методом. Поэтому мы не приводим ее доказательства, а ограничимся лишь некоторыми важными замечаниями. Требование, чтобы всякое множество единственности для $\widetilde{E}$ являлось множеством единственности и для $M(\widetilde{E},\widetilde{F})$ (см. ниже условие (a)), к сожалению, было пропущено в формулировке теоремы 1 из [5]. Эта неточность была позднее исправлена в докторской диссертации С. Н. Мелихова [16]. Следует еще отметить, что близкий теореме 1 из [5] результат (применительно к так называемым Q-представляющим последовательностям), также полученный в терминах биортогональных систем, содержится в диссертации А. В. Братищева [17, предложение 1.7]. Условие (b) в формулировке приводимой ниже теоремы 1 является новым. Его наличие продиктовано спецификой рассматриваемой в приложении (§ 4, пример II) ситуации, когда условие (a) заведомо не выполняется.

Теорема 1. *Пусть* ЛВП F *бочечно или борнологично;* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Q$ *— простые нули функции* $\mathscr{L} \in \widetilde{F} \setminus \{0\}$ $(\subseteq \mathscr{A}(Q))$, $\widetilde{\varphi}_k(\lambda) := \frac{\mathscr{L}(\lambda)}{\omega_2(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)} \in \widetilde{F}$, $k = 1, 2, \dots$. *Пусть также множество* $\{\widetilde{\varphi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *ограничено в сильном сопряженном к* F *пространстве* $\widetilde{F}_\beta$. *Пусть, наконец, выполняется условие*

(a) $\widetilde{E}$ *инвариантно относительно деления на многочлены, и всякое множество единственности для* $\widetilde{E}$ *является множеством единственности для* $M(\widetilde{E},\widetilde{F})$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

1) $0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_2(\lambda_k)}{\mathscr{L}'(\lambda_k)} e_{\lambda_k}$ *(ряд сходится абсолютно в* E*);*

2) *существует* $\mu \in Q$, $\mathscr{L}(\mu) \neq 0$, *такое, что*

$$e_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathscr{L}(\mu)}{\mathscr{L}'(\lambda_k)(\mu-\lambda_k)} e_{\lambda_k}$$

(ряд сходится абсолютно в E*);*

3) *для любого* $x \in F$ *имеет место равенство*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_2(\lambda_k)}{\mathscr{L}'(\lambda_k)} \langle x, \varphi_k \rangle_F e_{\lambda_k}$$

(ряд сходится абсолютно в E*), где* $T\varphi_k = \widetilde{\varphi}_k$, $k = 1, 2, \dots$.

Далее, если вместо (a) *требовать выполнения условия*

(b) $d(\lambda) \equiv 1 \in M_{\mathscr{L},r}(\widetilde{E},\widetilde{F})$ *и* Λ *— множество единственности для* $M_{\mathscr{L},r}(\widetilde{E},\widetilde{F})$, *то равносильность утверждений 1–3 остается в силе при условии, что речь в них идет о разложениях из класса* $\tilde{\ell}_E\{\frac{1}{w_2(\lambda_k)r_k}\}$.

Замечание 1. Ключевыми моментами доказательства теоремы 1 в [5] (именно импликации 1) $\Rightarrow$ 3)) являются введение оператора представления L и обоснование того, что сопряженный к нему оператор $(\widetilde{L}v)(\lambda) = d(\lambda)\cdot v(\lambda)$, $v \in \widetilde{E}$, $\lambda \in Q$, умножения на функцию $d(\lambda)$ будет оператором тождественного вложения F в E (в нашей ситуации $\widehat{E}$). При этом нужно установить справедливость импликации $d\mid_\Lambda \equiv 1$, $d \in M(\widetilde{E}, \widetilde{F}) \Longrightarrow d(\lambda) \equiv 1$, $\lambda \in Q$. Пусть в условиях теоремы 1 выполнено дополнительное требование (a). Из того, что $\widetilde{E}$ инвариантно относительно деления на многочлены, следует (см. лемму 2 в [5]), что Λ — множество единственности для $\widetilde{E}$, и необходимая импликация, очевидно, имеет место. Если же вместо (a) выполняется ограничение (b), то из разложения

$$Le_\lambda = d(\lambda)e_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathscr{L}(\lambda)}{\mathscr{L}'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)} e_{\lambda_k}$$

класса $\tilde{\ell}_E\{\frac{1}{w_2(\lambda_k)r_k}\}$ ($\lambda \in Q$) сразу вытекает (см. подробности в § 5) принадлежность $d(\lambda)$ множеству $M_{\mathscr{L},r}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$. Остается лишь использовать, что тождественная единица содержится в множестве $M_{\mathscr{L},r}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$.

§ 3. Нетривиальные разложения нуля с произвольными коэффициентами

Введем некоторые обозначения. Если $x(\lambda), b(\lambda) : Q \to \mathbb{C}$, то положим $(L_b x)(\lambda) := b(\lambda)x(\lambda)$, $\lambda \in Q$. Символ $L(H_1, H_2)$ для ЛВП H_1 и H_2 обозначает совокупность всех линейных операторов, действующих непрерывно из H_1 в H_2 (при $H_1 = H_2$ пишем $L(H_1)$), σ — слабую топологию. Положим

$$M_\sigma(\widetilde{E}, \widetilde{F}) := \{b : Q \to \mathbb{C} : L_b \in L(\widetilde{E}, \sigma(\widetilde{E}, E); \widetilde{F}, \sigma(\widetilde{F}, F))\}.$$

Считаем дополнительно, что топология в $\widetilde{F}_\beta$ задается набором преднорм $q_\alpha(x) := \sup\limits_{\lambda\in Q_\alpha} \frac{|x(\lambda)|}{a_\alpha(\lambda)}$, где Q_α — подмножества $Q, a_\alpha : Q_\alpha \to (0, +\infty)$, $\alpha \in \Omega$ (Ω — некоторое множество индексов). Определим еще множество

$$\mathscr{M}(\widetilde{E}, \widetilde{F}) := \left\{ b \in M_\sigma(\widetilde{E}, \widetilde{F}) : \forall p \in P(E)\ \forall \alpha \in \Omega \sup_{\lambda \in Q_\alpha} \frac{|b(\lambda)| p(e_\lambda)}{a_\alpha(\lambda)} < \infty \right\}.$$

Если $b \in M_\sigma(\widetilde{E}, \widetilde{F})$, то символ $b(D)$ обозначает линейный слабо непрерывный оператор из F в E, сопряженный к L_b (оператор свертки с характеристической функцией $b(\lambda)$). Легко видеть, что для любого $\lambda \in Q$ будет $b(D)e_\lambda = b(\lambda)e_\lambda$. Приведенная ниже теорема также является распространением на рассматриваемый в этом параграфе более общий случай результата С. Н. Мелихова [5, теорема 2]. Сохранен (с определенными изменениями) и метод ее доказательства, которое мы опускаем.

Теорема 2. *Пусть F — бочечное или борнологическое* ЛВП *и $b(D)F \supseteq F$ для любой $b \in \mathscr{M}(\widetilde{E}, \widetilde{F}) \setminus \{0\}$. Пусть также $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — нули (не обязательно простые и все) функции $\mathscr{L}(\lambda) \in \widetilde{F} \setminus \{0\}$, лежащие в Q, и $\{\frac{\mathscr{L}(\lambda)}{\omega_2(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}\}_{k=1}^\infty$ — ограниченное в $\widetilde{F_\beta}$ множество.*

Равносильны следующие утверждения:

1) *существует* НРН *в* E, *т. е.* $0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k e_{\lambda_k}$ (*ряд сходится абсолютно в* E);

2) *существует* $b \in \mathscr{M}(\widetilde{E}, \widetilde{F}) \setminus \{0\}$ *такая, что* $b_k \mathscr{L}'(\lambda_k) = b(\lambda_k)\omega_2(\lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots$, *и для любых* $x \in F$, $y \in F$ $(x = b(D)y)$ *выполняется равенство*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \langle y, \varphi_k \rangle_F e_{\lambda_k},$$

где $T\varphi_k = \frac{\mathscr{L}(\lambda)}{\omega_2(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}$, $k = 1, 2, \dots$ (*ряд сходится абсолютно в* E).

§ 4. Некоторые следствия теорем 1 и 2

I. Сохраняя полноту изложения, мы приведем здесь один пример, имеющийся в [5] и демонстрирующий общность установленных выше теорем 1 и 2. Пусть G — ограниченная ρ-выпуклая область в $\mathbb{C}$ с ρ-опорной функцией $h(-\theta)$ $(\rho > 0)$, $0 \in G$; $E = \mathscr{A}(G)$, $F = \mathscr{A}(\overline{G})$. Как обычно, $\mathscr{A}(G)$ наделяется топологией компактной сходимости, а $\mathscr{A}(\overline{G})$ — естественной индуктивной топологией [5, § 6, пример I]. Известно, что $\mathscr{A}(\overline{G})$ бочечно и непрерывно вложено в $\mathscr{A}(G)$. Пусть $Q = \mathbb{C}$, $e_\lambda(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k z^k}{\Gamma(1+k/\rho)}$ — функция Миттаг-Леффлера; $D = D_\rho$ — оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда — Леонтьева. Тогда $De_\lambda = \lambda e_\lambda$ и $\nu(\lambda) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Далее, $\omega(\lambda, t) = 1 \neq 0$ для любых $\lambda, t \in \mathbb{C}$; $\mathscr{E} = \{e_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$ полна в $\mathscr{A}(\overline{G})$ и $\mathscr{A}(G)$. Топология пространства $\widetilde{\mathscr{A}(\overline{G})}_\beta$ задается счетным набором норм $q_\alpha(\cdot)$, где $\alpha = n \in \mathbb{N}$; $Q_\alpha = Q_n = \mathbb{C}$, $a_\alpha(\lambda) = a_n(\lambda) = \exp[h(\arg\lambda)|\lambda|^\rho + \varepsilon_n|\lambda|^\rho]$, $\varepsilon_n \downarrow 0$; $\mathscr{M}(\widetilde{E}, \widetilde{F}) = [\rho, 0]$ и $b(D)$ для любого $b \in \mathscr{M}(\widetilde{E}, \widetilde{F}) \setminus \{0\}$ является эпиморфизмом пространства F. Таким образом, привлекая результаты о представительных подпространствах из [18], мы получим из теорем 1 и 2 (что отмечалось в [5]) ряд хорошо известных утверждений о разложении аналитических функций в ряды обобщенных экспонент (см., например, [3]). Теоремы 1 и 2 применимы также к некоторым пространствам целых функций (см. пример II из [5]).

II. В этом пункте мы рассмотрим одну конкретную ситуацию, к которой (в отличие от примера I) неприменимы результаты работы [5]. Пусть G — область в $\overline{\mathbb{C}}$ такая, что $Q := \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ — тоже область; τ_G — топология равномерной сходимости на замкнутых подмножествах G; $\mathscr{A}_0(G)$ $(\mathscr{A}_0(\overline{G}))$ — пространство функций, аналитических (локально аналитических) в G (на $\overline{G}$) и исчезающих на бесконечности, если $\infty \in G$. Положим $E = (\mathscr{A}_0(\overline{G}), \tau_G)$, $F = \mathscr{A}_0(\overline{G})$ (с естественной индуктивной топологией). Тогда $F \hookrightarrow E$, F бочечно, $\widehat{E} = \mathscr{A}_0(G)$. Пусть δ — конечная точка G и $D = D_\delta$ — оператор Поммье:

$$(D_\delta y)(z) = \begin{cases} \frac{y(z)-y(\delta)}{z-\delta}, & z \neq \delta, \\ y'(\delta), & z = \delta, \end{cases} \qquad y \in \mathscr{A}_0(G),\ z \in G.$$

Известно [8], что $D_\delta \in L(\mathscr{A}_0(\overline{G})) \cap L(\mathscr{A}_0(G))$. Положим $e_\lambda(z) := \frac{1}{z-\lambda}$, $\lambda \in Q$; $\{e_\lambda\}_{\lambda \in Q} \subset F$. Имеем

$$\left(D_\delta \frac{1}{t-\lambda}\right)(z) = \frac{1}{\lambda - \delta} \cdot \frac{1}{z - \lambda} \quad \text{для любых } \lambda \in Q,\ z \in G,$$

откуда $\nu(\lambda) = \nu_\delta(\lambda) = \frac{1}{\lambda-\delta}$. Если $D_\delta x = \nu_\delta(\mu)x$, $x \in \mathscr{A}_0(G)$, $\mu \in Q$, то $x(z) = d_\delta(\mu)\cdot\frac{1}{z-\mu}$. Действительно, при $z \neq \delta$ имеем $\frac{x(z)-x(\delta)}{z-\delta} = \frac{x(z)}{\mu-\delta}$, поэтому

$$x(z) = \frac{(\delta-\mu)x(\delta)}{z-\mu}, \quad z \neq \delta.$$

К тому же $\nu_\delta(\mu)x(\delta) = x'(\delta)$. Значит, $x(z) = d_\delta(\mu)\cdot\frac{1}{z-\mu}$ для любого $z \in G$, где $d_\delta(\mu) = (\delta-\mu)x(\delta)$. Для функции $\nu_\delta(\lambda) = \frac{1}{\lambda-\delta}$ будет

$$\omega_\delta(\lambda,t) = \frac{\frac{1}{\lambda-\delta}-\frac{1}{t-\delta}}{\lambda-t} = -\frac{1}{(\lambda-\delta)(t-\delta)} = \omega_{1,\delta}(\lambda)\cdot\omega_{2,\delta}(t),$$

где $\omega_{1,\delta}(\lambda) = \frac{1}{\delta-\lambda}$, $\omega_{2,\delta}(t) = \frac{1}{t-\delta}$. При этом $\omega_\delta(\lambda,t) \neq 0$ для любых $\lambda, t \in Q$. Система $\mathscr{E} := \left\{\frac{1}{z-\lambda}\right\}_{\lambda\in Q}$ полна в $\mathscr{A}_0(\overline{G})$, а оператор Лапласа T является в данном случае преобразованием Коши [19]:

$$\varphi \to g(\lambda) := \varphi\left(\frac{1}{z-\lambda}\right) \in \mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{G})\ (\mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus G)) \quad \forall\varphi \in \mathscr{A}_0(\overline{G})'\ (\mathscr{A}_0(G)').$$

Здесь $\widetilde{F} = \mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{G}) \subset \mathscr{A}(Q)$; $\widetilde{E} = \mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus G) \subset \mathscr{A}(Q)$. Очевидно, что $\frac{\mathscr{L}(\lambda)}{\lambda-\lambda_k} \in \mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{G})$ для любого $k \geq 1$, если $\mathscr{L}(\lambda) \in \mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{G})$, $\lambda_k \notin \overline{G}$ и $\mathscr{L}(\lambda_k) = 0$. Множество $\left\{\mathscr{L}(\lambda)\cdot\frac{\lambda_k-\delta}{\lambda-\lambda_k}\right\}_{k=1}^\infty$ ограничено в пространстве $\widetilde{F}_\beta$, топология которого может быть задана набором норм $q_n(x) = \sup\limits_{z\in\overline{Q}_n}|x(z)|$, где $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ — исчерпывающая область $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{G}$ изнутри последовательность областей. Пусть $W(G)$ — совокупность всевозможных замкнутых множеств, лежащих в G. Тогда для произвольного $K \in W(G)$

$$p_K\left(\frac{1}{z-\lambda}\right) := \sup_{z\in K}\frac{1}{|z-\lambda|} = \frac{1}{\rho(\lambda,K)} \quad \forall\lambda\in Q.$$

Из теоремы 1 получаем следующий результат.

Предложение 1. *Пусть G — область в $\overline{\mathbb{C}}$ такая, что множество $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ связно; δ — конечная произвольно зафиксированная точка области G; $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — простые (все) нули некоторой функции $\mathscr{L}(\lambda) \in \mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{G})$, $\lambda_k \notin \overline{G}$, $k = 1,2,\ldots$. Предположим, что найдется $r = (r_k)_{k\in\mathbb{N}} \in R_\Lambda$, для которой выполнены условия*

(b.1) *существует $C > 0$ такое, что $|\mathscr{L}(\lambda)| \geq \frac{C}{\rho(\lambda,\partial Q)}$ для любого $\lambda \in Q\setminus U_{(r)}$;*

(b.2) *Λ — множество единственности для $M_{\mathscr{L},r}(\mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus G), \mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{G}))$.*

Следующие утверждения равносильны:

1) $0 = \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{(\lambda_k-\delta)\mathscr{L}'(\lambda_k)}\cdot\frac{1}{z-\lambda_k}$ (НРН *принадлежит классу* $\tilde{\ell}_{\mathscr{A}_0(G)}\{\frac{\lambda_k-\delta}{r_k}\}$);

2) *существует $\mu \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}$, $\mathscr{L}(\mu) \neq 0$, такое, что соответствующее ядро Коши допускает следующее разложение из класса $\tilde{\ell}_{\mathscr{A}_0(G)}\{\frac{\lambda_k-\delta}{r_k}\}$:*

$$\frac{1}{z-\mu} = \sum_{k=1}^\infty \frac{\mathscr{L}(\mu)}{\mathscr{L}'(\lambda_k)(\mu-\lambda_k)}\cdot\frac{1}{z-\lambda_k};$$

3) $f(z) = \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{\varphi_k(f)}{\mathscr{L}'(\lambda_k)}\cdot\frac{1}{z-\lambda_k}$ *для любой $f \in \mathscr{A}_0(\overline{G})$ (разложение принадлежит классу $\tilde{\ell}_{\mathscr{A}_0(G)}\{\frac{\lambda_k-\delta}{r_k}\}$), где $\varphi_k \in \mathscr{A}_0(\overline{G})'$ такие, что $\varphi_k\left(\frac{1}{z-\lambda}\right) = \frac{\mathscr{L}(\lambda)}{\lambda-\lambda_k}$, $k = 1,2,\ldots$.*

Для применения теоремы 2 к рассматриваемой ситуации достаточно найти определенное выше множество $\mathscr{M}(\mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus G), \mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{G})) =: \mathscr{M}(Q)$ и показать, что $b(D)$ — эпиморфизм пространства $\mathscr{A}_0(\overline{G})$ для всех $b \in \mathscr{M}(Q) \setminus \{0\}$. Всюду далее будем исследовать случай, когда G — неограниченная область. Тогда $\infty \in G$; $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G} = \mathbb{C} \setminus \overline{G} = Q$; $\widetilde{F} = \mathscr{A}(Q)$. Простые рассуждения показывают, что $M_\sigma(\widetilde{E}, \widetilde{F}) = \mathscr{M}(\widetilde{E}, \widetilde{F}) = \widetilde{F} = \mathscr{A}(Q)$. Образ оператора $L_b : \mathscr{A}(Q) \to \mathscr{A}(Q)$, $b \in \mathscr{A}(Q) \setminus \{0\}$, замкнут (в $\mathscr{A}(Q)$), поэтому [7] $b(D)$ — эпиморфизм пространства $\mathscr{A}_0(\overline{G})$. На основании теоремы 2 имеем следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть G — неограниченная область в $\overline{\mathbb{C}}$ такая, что $Q = \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ — область; $\delta \in G$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \subset Q$ — нули (не обязательно простые и все) функции $\mathscr{L}(\lambda) \in \mathscr{A}(Q) \setminus \{0\}$. Равносильны следующие утверждения:*

1) *существует нетривиальное разложение нуля, т. е. $0 = \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{b_k}{z-\lambda_k}$ (ряд сходится абсолютно по топологии τ_G);*

2) *существует $b(\lambda) \in \mathscr{A}(Q) \setminus \{0\}$ такая, что $b_k \mathscr{L}'(\lambda_k) = \frac{b(\lambda_k)}{\lambda_k - \delta}$, $k = 1, 2, \dots$, и для любых $f \in \mathscr{A}_0(\overline{G})$, $g \in \mathscr{A}_0(\overline{G})$ таких, что $f = b(D)g$, выполняется равенство*

$$f(z) = \sum_{k=1}^\infty b_k(\lambda_k - \delta)\varphi_k(g) \cdot \frac{1}{z - \lambda_k}$$

(ряд сходится абсолютно по топологии τ_G), где $\varphi_k \in \mathscr{A}_0(\overline{G})'$ такие, что

$$\varphi_k\left(\frac{1}{z-\lambda}\right) = \frac{\mathscr{L}(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Замечание 2. Если все нули λ_k простые, то в условиях предложения 2 всякое НРН по системе $\left\{\frac{1}{z-\lambda_k}\right\}_{k=1}^\infty$ (абсолютно сходящееся по топологии τ_G) имеет вид

$$0 = \sum_{k=1}^\infty \frac{a(\lambda_k)}{\mathscr{L}'(\lambda_k)} \cdot \frac{1}{z - \lambda_k}, \quad \text{где } a(\lambda) \in \mathscr{A}(Q) \setminus \{0\}.$$

Результат, аналогичный предложению 2, получен ранее другим методом и в более общей ситуации (G — область в $\overline{\mathbb{C}}$, $\partial G = \partial \overline{G}$, $\overline{G} \neq \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ связно, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — изолированная последовательность точек из $\mathbb{C} \setminus G$, стягивающаяся к ∂G) Ю. Ф. Коробейником [8, теорема 1]. В [8] показана также существенность требования связности множества $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$. Представление функции $f \in \mathscr{A}_0(\overline{G})$ в [8] получено в ином виде ($\delta = 0$), а именно

$$f(z) = \sum_{k=1}^\infty \frac{b_k f_k}{z - \lambda_k}, \quad f_k = \frac{\lambda_k}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{b(\frac{1}{t})(\lambda_k - t)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $b(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{b_k}{1 - \lambda\lambda_k}$, γ — некоторая подходящим образом выбранная кривая.

Особый интерес, однако, представляет до сих пор нерешенная задача об описании полюсов λ_k абсолютно представляющей в $(\mathscr{A}_0(\overline{G}), \tau_G)$ системы дробей $\frac{1}{z-\lambda_k}$ в терминах, связанных с характером расположения последовательности Λ в области $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ (см. по этому поводу заметку [20], в которой упомянутая задача решена для введенных автором абсолютно приближающих систем). Достаточные условия такого рода, содержащие оценки снизу на рост $|\mathscr{L}(\lambda)|$ и $|\mathscr{L}'(\lambda_k)|$, для $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ найдены в [10]. Этой задаче посвящен следующий параграф.

§ 5. Применение теоремы 2. Оценки роста функции $\mathscr{L}(\boldsymbol{\lambda})$

В этом параграфе ЛВП E, $\widetilde{E}$, F, $\widetilde{F}$ удовлетворяют всем исходным предположениям из § 2, 3. Кроме того, дополнительно считаем, что Q — односвязная область в $\mathbb{C}$. Тогда [21, с. 21, следствие] существует исчерпывающая ее изнутри последовательность ограниченных жордановых областей Q_k со спрямляемыми границами $\partial Q_k = \Gamma_k$, $k = 1, 2, \dots$. В этом случае последовательность контуров $\{\Gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ будем называть *подходящей для* Q. Допустим, наконец, что отображение $\lambda \mapsto e_\lambda$ локально голоморфно из Q в F [22].

Теорема 3. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — все нули функции $\mathscr{L} \in \widetilde{F}$, причем каждый из них простой, и $b(D)F \supseteq F$ для всякой функции $b \in \mathscr{M}(\widetilde{E}, \widetilde{F}) \setminus \{0\}$. Пусть, наконец, множество $\bigl\{\frac{\mathscr{L}(\lambda)}{\omega_2(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}\bigr\}_{k=1}^{\infty}$ ограничено в $\widetilde{F}_\beta$. Рассмотрим условия*

1) для некоторой функции $b \in \mathscr{M}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$ с множеством нулей $\upsilon(b), \Lambda \setminus \upsilon(b) \neq \varnothing$, выполняется

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\omega_2(\lambda_k)||b(\lambda_k)|p(e_{\lambda_k})}{|\mathscr{L}'(\lambda_k)|} < \infty \quad \forall p \in P(E) \tag{a}$$

и существует подходящая для Q последовательность контуров $\Gamma_k, \Gamma_k \cap \Lambda = \varnothing$, такая, что

$$x_k := \int\limits_{\Gamma_k} \frac{\omega_2(\lambda)b(\lambda)e_\lambda}{\mathscr{L}(\lambda)} d\lambda \to 0, \quad k \to \infty, \tag{b}$$

слабо в E

2) для любого $x \in F$ имеет место представление

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(\lambda_k)}{\mathscr{L}'(\lambda_k)} \langle y, \varphi_k \rangle_F e_{\lambda_k}$$

(ряд абсолютно сходится в E), где

$$\varphi_k(e_\lambda) = \frac{\mathscr{L}(\lambda)}{\lambda - \lambda_k},\ k = 1, 2, \dots, \quad \text{и} \quad b(D)y = x,\ y \in F.$$

Тогда 1) $\Longleftrightarrow$ 2).

Доказательство. Пусть выполняется условие 1. Покажем, что в E существует НРН, а именно

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_2(\lambda_k)b(\lambda_k)}{\mathscr{L}'(\lambda_k)} e_{\lambda_k}.$$

В силу условия 1(a) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_2(\lambda_k)b(\lambda_k)}{\mathscr{L}'(\lambda_k)} e_{\lambda_k}$$

абсолютно сходится в E к некоторому элементу $x_0 \in \widehat{E}$, причем найдется k_0 такое, что $b(\lambda_{k_0}) \neq 0$. Покажем, что $x_0 = 0$. Элементы x_k определены корректно, так как отображение $\lambda \mapsto e_\lambda$ действует из Q в F локально голоморфно,

$b(D) \in L(F, \widehat{E})$ и, кроме того, $\mathscr{L}(\lambda) \neq 0$ на Γ_k, $k = 1, 2, \ldots$. Далее,

$$\begin{aligned}\langle x_k, \varphi\rangle_E &= \sum_{\lambda_s \in \operatorname{int}\Gamma_k} \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_s} \frac{\widetilde{\varphi}(\lambda)\omega_2(\lambda)b(\lambda)}{\mathscr{L}(\lambda)} \\ &= \sum_{s=1}^{n_k} \frac{\omega_2(\lambda_s)b(\lambda_s)\widetilde{\varphi}(\lambda_s)}{\mathscr{L}'(\lambda_s)} = \sum_{s=1}^{n_k} \frac{\omega_2(\lambda_s)b(\lambda_s)}{\mathscr{L}'(\lambda_s)} \langle e_{\lambda_s}, \varphi\rangle_E \\ &= \left\langle \sum_{s=1}^{n_k} \frac{\omega_2(\lambda_s)b(\lambda_s)e_{\lambda_s}}{\mathscr{L}'(\lambda_s)}, \varphi \right\rangle_E \quad \forall \varphi \in E' = \widehat{E}'.\end{aligned}$$

В силу 1(b) последовательность

$$\left\{ \sum_{s=1}^{n_k} \frac{\omega_2(\lambda_s)b(\lambda_s)}{\mathscr{L}'(\lambda_s)} e_{\lambda_s} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

сходится к нулю слабо в E. Отсюда вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_2(\lambda_k)b(\lambda_k)}{\mathscr{L}'(\lambda_k)} e_{\lambda_k} = 0.$$

По теореме 2 выполняется условие 2.

Обратно, пусть имеет место условие 2. Тогда по той же теореме существует абсолютно сходящееся в E НРН, т. е.

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(\lambda_k)\omega_2(\lambda_k)}{\mathscr{L}'(\lambda_k)} e_{\lambda_k}.$$

Очевидно, выполняется условие 1(a). Далее, из соотношения

$$\langle x_k, \varphi\rangle_E = \left\langle \sum_{s=1}^{n_k} \frac{\omega_2(\lambda_s)b(\lambda_s)}{\mathscr{L}'(\lambda_s)} e_{\lambda_s}, \varphi \right\rangle_E, \quad \varphi \in E',$$

немедленно следует, что $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю слабо в E. Здесь x_k определяются по произвольно выбранной подходящей для Q последовательности контуров $\Gamma_k, \Gamma_k \cap \Lambda = \varnothing$, $k = 1, 2, \ldots$. Теорема доказана.

Замечание 3. Прежде чем сформулировать важное следствие из теоремы 3, введем в рассмотрение следующие условия, совокупность которых будем коротко называть условиями $\mathscr{A}$:

(i) $\hat{p}(e_\lambda) := \sup\limits_{p \in P(E)} p(e_\lambda) < \infty \quad \forall \lambda \in Q$;

(ii) существуют подходящая для Q последовательность контуров Γ_j длины $l(\Gamma_j)$ и последовательность кружков $U_k = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_k| < r_k\}$, лежащих в Q, такие, что $\Gamma_j \cap U_{(r)} = \varnothing$, $j = 1, 2, \ldots$, $U_{(r)} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$, и

$$\lim_{j\to\infty} \left\{ l(\Gamma_j) \sup_{\lambda \in \Gamma_j} \frac{|\omega_2(\lambda)| p(e_\lambda)}{\hat{p}(e_\lambda)} \right\} = 0 \quad \forall p \in P(E).$$

Будем называть равенство $0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k e_{\lambda_k}$, где есть k_0 такое, что $b_{k_0} \neq 0$, *нетривиальным разложением нуля из класса* $\ell_E\{\gamma_k\}$, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k \gamma_k|\, p(e_{\lambda_k}) < \infty$

для любой $p \in P(E)$. Если имеет место свойство (i) и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k\gamma_k|\hat{p}(e_{\lambda_k}) < \infty$, то будем говорить о НРН из класса $\hat{\ell}_E\{\gamma_k\}$. Аналогичным образом введем понятия АПС в F из классов $\ell_E\{\gamma_k\}$ и (в случае выполнения ограничения (i)) $\hat{\ell}_E\{\gamma_k\}$. Всякое разложение элемента из класса $\hat{\ell}_E\{\gamma_k\}$ будет разложением из класса $\widetilde{\ell}_E\{\gamma_k\}$ и тем более из класса $\ell_E\{\gamma_k\}$.

Укажем один близкий к [5, с. 60] способ оценивать функцию $\mathscr{L}(\lambda)$ снизу. Оценки подобного рода восходят к работам А. Ф. Леонтьева (см., например, [1]) и играют ключевую роль в вопросах представления функций рядами Дирихле. Пусть в предположениях теоремы 2 $0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k e_{\lambda_k}$ — абсолютно сходящееся в E НРН из класса $\hat{\ell}_E\{\frac{1}{\omega_2(\lambda_k) r_k}\}$, где r_k, $k = 1, 2, \dots$, выбраны из условия (ii). Как установлено в ходе доказательства теоремы 2, найдется $b \in \mathscr{M}(\widetilde{E}, \widetilde{F}) \setminus \{0\}$ такая, что

$$b(\lambda)e_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\omega_2(\lambda_k)} \cdot \frac{\mathscr{L}(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} e_{\lambda_k} \quad \text{для любой } \lambda \in Q.$$

Возьмем $\lambda \in Q \setminus U_{(r)}$ ($U_{(r)}$ — объединение кружков, участвующих в условии (ii)). Тогда

$$|b(\lambda)|p(e_\lambda) \le |\mathscr{L}(\lambda)| \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{b_k}{\omega_2(\lambda_k)} \right| \cdot \frac{p(e_{\lambda_k})}{r_k} \le C|\mathscr{L}(\lambda)|$$

для любой $p \in P(E)$, где

$$C := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{|\omega_2(\lambda_k)| r_k} \hat{p}(e_{\lambda_k}) < \infty.$$

Отсюда

$$\frac{|b(\lambda)|}{|\mathscr{L}(\lambda)|} \le \frac{C}{\hat{p}(e_\lambda)} \quad \text{при всех } \lambda \in Q \setminus U_{(r)}.$$

Используя еще свойство контуров Γ_j из условия (ii), получаем окончательно, что

$$\lim_{j \to \infty} \left\{ l(\Gamma_j) \sup_{\lambda \in \Gamma_j} \frac{|\omega_2(\lambda)||b(\lambda)|p(e_\lambda)}{|\mathscr{L}(\lambda)|} \right\} \le C \lim_{j \to \infty} \left\{ l(\Gamma_j) \sup_{\lambda \in \Gamma_j} \frac{|\omega_2(\lambda)|p(e_\lambda)}{\hat{p}(e_\lambda)} \right\} = 0 \quad \forall p \in P(E).$$

Отметим, что в ситуации работы [5] $Q = \mathbb{C}$, $\nu(\lambda) = \lambda$, $\omega_2(\lambda) \equiv 1$. Если Λ имеет конечный показатель сходимости, то, положив $r_k = \frac{1}{|\lambda_k|^{n_0}}$ ($n_0 \in \mathbb{N}$), $k = 1, 2, \dots$, и использовав непрерывность в E оператора D^{n_0}, получим, что всякое НРН $0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k e_k$, абсолютно сходящееся в E, будет НРН из класса $\ell_E\{\frac{1}{r_k}\}$. Отсюда сразу выводим (вне $U_{(r)}$) оценку

$$|\mathscr{L}(\lambda)| \ge \frac{1}{A_p} |b(\lambda)|p(e_\lambda) \ \forall p \in P(E), \quad A_p := \sum_{k=1}^{\infty} |b_k||\lambda_k|^{n_0} p(e_{\lambda_k}) < \infty,$$

установленную в [5].

Следствие. *Пусть область Q, функция $\mathscr{L}$, система $\mathscr{E}_\Lambda = \{e_{\lambda_k}\}_{k=1}^\infty$, пространства $E, \widetilde{E}, F, \widetilde{F}$ и множество $\left\{\frac{\mathscr{L}(\lambda)}{\omega_2(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}\right\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяют всем предположениям теоремы 3; $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ — некоторая последовательность положительных чисел, $\inf\limits_{k\ge 1}\gamma_k > 0$. Для того чтобы $\mathscr{E}_\Lambda$ была* АПС *в F из класса $\ell_E\{\gamma_k\}$, достаточно, чтобы для некоторой подходящей для Q последовательности контуров $\{\Gamma_j\}_{j=1}^\infty$ с $\Gamma_j \cap \Lambda = \varnothing$, $j = 1, 2, \dots$, и какой-либо функции $b \in \mathscr{M}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$ с $\Lambda \setminus \upsilon(b) \ne \varnothing$ выполнялись условия*

1) $\sum\limits_{j=1}^\infty \left|\frac{\omega_2(\lambda_j) b(\lambda_j)}{\mathscr{L}'(\lambda_j)}\right| \gamma_j p(e_{\lambda_j}) < \infty \quad \forall p \in P(E)$;

2) $\lim\limits_{j\to\infty} \left\{ l(\Gamma_j) \sup\limits_{\lambda\in\Gamma_j} \frac{|\omega_2(\lambda)||b(\lambda)|p(e_\lambda)}{|\mathscr{L}(\lambda)|} \right\} = 0 \quad \forall p \in P(E)$.

Далее, если имеют место условия $\mathscr{A}$ и найдется $p_0 \in P(E)$ такая, что

$$\sup_{k\ge 1} \frac{\hat{p}(e_{\lambda_k})}{\gamma_k |\omega_2(\lambda_k)| r_k p_0(e_{\lambda_k})} < \infty,$$

то условия 1, 2 *необходимы для того, чтобы $\mathscr{E}_\Lambda$ была* АПС *в F из класса $\ell_E\{\gamma_k\}$.*

Доказательство. Первая часть следствия вытекает непосредственно из теоремы 3. Докажем его вторую часть. Пусть $\mathscr{E}_\Lambda$ — АПС в F из класса $\ell_E\{\gamma_k\}$. Разложим элемент $e_\lambda (\lambda \in Q \setminus \Lambda)$ в ряд:

$$e_\lambda = \sum_{k=1}^\infty c_k e_{\lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^\infty |c_k| \gamma_k p(e_{\lambda_k}) < \infty \quad \forall p \in P(E).$$

Отсюда получим НРН в E:

$$0 = \sum_{k=1}^\infty c_k (\nu(\lambda) - \nu(\lambda_k)) e_{\lambda_k},$$

причем

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^\infty \frac{|c_k||\nu(\lambda) - \nu(\lambda_k)|}{|\omega_2(\lambda_k)| r_k} \hat{p}(e_{\lambda_k}) \\
&\qquad \le |\nu(\lambda)| \sum_{k=1}^\infty \frac{|c_k|}{|\omega_2(\lambda_k)| r_k} \hat{p}(e_{\lambda_k}) + \sum_{k=1}^\infty \frac{|c_k||\nu(\lambda_k)|}{|\omega_2(\lambda_k)| r_k} \hat{p}(e_{\lambda_k}) \\
&\qquad \le |\nu(\lambda)| \sum_{k=1}^\infty \frac{|c_k| p_0(e_{\lambda_k}) \hat{p}(e_{\lambda_k})}{|\omega_2(\lambda_k)| r_k p_0(e_{\lambda_k})} + C_{p_0} \sum_{k=1}^\infty \frac{|c_k| q_0(e_{\lambda_k}) \hat{p}(e_{\lambda_k})}{|\omega_2(\lambda_k)| r_k p_0(e_{\lambda_k})} < \infty,
\end{aligned}$$

где $q_0 \in P(E)$ и $C_{p_0} < \infty$ подобраны так, что $p_0(Dx) \le C_{p_0} q_0(x)$ для любого $x \in \widehat{E}$. Поэтому в E имеется НРН из класса $\hat{\ell}_E\left\{\frac{1}{\omega_2(\lambda_k) r_k}\right\}$. Как показано в замечании 3, выполняется условие 2. Коэффициенты b_k найденного НРН вычисляются согласно теореме 2 по формуле $b_k = \frac{b(\lambda_k)\omega_2(\lambda_k)}{\mathscr{L}'(\lambda_k)}$, $k = 1, 2, \dots$ (для некоторой функции $b \in \mathscr{M}(\widetilde{E}, \widetilde{F}) \setminus \{0\}$). Отсюда для любой $p \in P(E)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^\infty \frac{|\omega_2(\lambda_k)||b(\lambda_k)|}{|\mathscr{L}'(\lambda_k)|} \gamma_k p(e_{\lambda_k}) &= \sum_{k=1}^\infty |b_k| \gamma_k p(e_{\lambda_k}) \\
&\le |\nu(\lambda)| \sum_{k=1}^\infty |c_k| \gamma_k p(e_{\lambda_k}) + C_p \sum_{k=1}^\infty |c_k| \gamma_k q(e_{\lambda_k}) < \infty,
\end{aligned}$$

т. е. выполняется условие 1. Следствие доказано.

Отметим, что первая часть доказанного следствия содержит теорему 5 из [5]. Наша ближайшая цель — применить теорему 3 и ее следствие к ситуации п. II § 4. Пусть G — неограниченная область в $\overline{\mathbb{C}}$ такая, что множество $Q = \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ — односвязная область в $\mathbb{C}$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность точек из Q и $r \in R_\Lambda$. Ясно, что множество $U_{(r)} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$, $U_k = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_k| < r_k\}$, лежит в Q. Назовем последовательность $r = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ *согласующейся с парой* (Λ, Q), если можно подобрать подходящую для Q последовательность контуров Γ_j так, что $\Gamma_j \cap U_{(r)} = \varnothing$, $j = 1, 2, \dots$, и $\lim\limits_{j\to\infty} \{l(\Gamma_j) \sup\limits_{\lambda\in\Gamma_j} \rho(\lambda, \partial Q)\} = 0$. Пусть δ — некоторая конечная точка G. В нашем случае легко установить, что

$$\hat{p}\left(\frac{1}{z-\lambda}\right) := \sup_{K\in W(G)} p_K\left(\frac{1}{z-\lambda}\right) = \frac{1}{\rho(\lambda, \partial Q)} < \infty \quad \forall \lambda \in Q.$$

Кроме того, для любых $K \in W(G)$, $\lambda \in Q$

$$\frac{|\omega_{2,\delta}(\lambda)| p_K(\frac{1}{z-\lambda})}{\hat{p}(\frac{1}{z-\lambda})} = \frac{1}{|\lambda-\delta|} \cdot \frac{1}{\rho(\lambda, K)} \cdot \rho(\lambda, \partial Q) \le \frac{1}{\rho(\delta, \partial Q)\rho(K, \partial Q)} \cdot \rho(\lambda, \partial Q).$$

Таким образом, если последовательность $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ согласуется с парой (Λ, Q), то выполняются условия $\mathscr{A}$.

Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *универсально-представляющей* (УПП) в области G [8], если $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{z-\lambda_k}$ для любой $f \in \mathscr{A}_0(\overline{G})$ (ряд сходится к f абсолютно в топологии τ_G). Если к тому же этот ряд можно выбрать так, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k \gamma_k| < \infty$, то Λ называется УПП в G *из класса* $\ell\{\gamma_k\}$.

Теорема 3 и ее следствие приводят к таким утверждениям.

Предложение 3. *Пусть G — неограниченная область в $\overline{\mathbb{C}}$, для которой $Q = \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ является односвязной областью; $\delta \in G$; $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Q$ — последовательность всех нулей некоторой функции $\mathscr{L}(\lambda) \in \mathscr{A}(Q)$ (каждый из них простой).*

Следующие утверждения равносильны:

1) *существуют функция $b(\lambda) \in \mathscr{A}(Q)$ $(\Lambda \setminus \upsilon(b) \neq \varnothing)$ и подходящая для Q последовательность контуров Γ_k $(\Gamma_k \cap \Lambda = \varnothing$, $k = 1, 2, \dots)$ такие, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b(\lambda_k)|}{|\lambda_k - \delta||\mathscr{L}'(\lambda_k)|} \cdot \frac{1}{\rho(\lambda_k, K)} < \infty \quad \forall K \in W(G),$$

$$\int\limits_{\Gamma_k} \frac{b(\lambda)h(\lambda)}{(\lambda-\delta)\mathscr{L}(\lambda)} d\lambda \to 0, \quad k \to \infty, \quad \forall h \in \mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus G);$$

2) *всякая функция $f \in \mathscr{A}_0(\overline{G})$ разлагается в абсолютно сходящийся по топологии τ_G ряд*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(\lambda_k)}{\mathscr{L}'(\lambda_k)} \varphi_k(g) \frac{1}{z-\lambda_k},$$

где $\varphi_k \in \mathscr{A}_0(\overline{G})'$ таковы, что

$$\varphi_k\left(\frac{1}{z-\lambda}\right) = \frac{\mathscr{L}(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}, \ k = 1, 2, \dots, \quad \text{и} \quad b(D)g = f, \ g \in \mathscr{A}_0(\overline{G}).$$

Следствие 1. *Пусть область G, последовательность Λ и функция $\mathscr{L}$ те же, что в предложении 3; $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел $(\inf\limits_{k\geq 1}\gamma_k > 0)$. Для того чтобы Λ была УПП в G из класса $l\{\gamma_k\}$, достаточно, чтобы для некоторой функции $b(\lambda)\in\mathscr{A}(Q)$ $(\Lambda\setminus\upsilon(b)\neq\varnothing)$ и какой-либо подходящей для Q последовательности контуров Γ_j $(\Gamma_j\cap\Lambda=\varnothing,\ j=1,2,\dots)$ выполнялись условия*

1) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\bigl|\frac{b(\lambda_j)}{\mathscr{L}'(\lambda_j)}\bigr|\gamma_j<\infty$;

2) $\lim\limits_{j\to\infty}\bigl\{l(\Gamma_j)\sup\limits_{\lambda\in\Gamma_j}\bigl|\frac{b(\lambda)}{\mathscr{L}(\lambda)}\bigr|\bigr\}=0$.

Эти же условия будут необходимы для того, чтобы Λ была УПП в G из класса $l\{\gamma_k\}$, если последовательность Λ ограничена и можно подобрать согласующуюся с (Λ,Q) последовательность $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, что $\inf\limits_{k\geq 1}\{\gamma_k\rho(\lambda_k,\partial Q)r_k\}>0$.

Следствие 2. *Пусть $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}; \mathscr{L}\in\mathscr{A}(U); \Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}=\upsilon(\mathscr{L})$, все нули λ_k простые и лежат в U.*

I. *Для того чтобы последовательность $\{\frac{1}{z-\lambda_k}\}_{k=1}^{\infty}$ была АПС в пространстве $(\mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus U),\ \tau_{\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{U}})$, достаточно, чтобы выполнялись условия*

1) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|\mathscr{L}'(\lambda_j)|}<\infty$;

2) *существует $R_k\uparrow 1$ такая, что $\inf\limits_{|\lambda|=R_k}|\mathscr{L}(\lambda)|\to\infty$, $k\to\infty$.*

II. *Условия 1, 2 также достаточны для того, чтобы система $\bigl\{\frac{1}{1-\lambda_k z}\bigr\}_{k=1}^{\infty}$ была абсолютно представляющей в пространстве $(\mathscr{A}(\overline{U}),\tau_U)$.*

Доказательство. Утверждение I вытекает из следствия 1. Докажем справедливость утверждения II. Пусть $g\in\mathscr{A}(\overline{U})$. Тогда

$$f(w):=\frac{1}{w}g\left(\frac{1}{w}\right)\in\mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}}\setminus U).$$

Согласно первой части следствия 2 условия 1 и 2 влекут возможность представления функции f в виде

$$f(w)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{w-\lambda_k},\quad \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|<\infty,\quad |w|>1.$$

Положив $z=\frac{1}{w}$, получим

$$zg(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\frac{1}{z}-\lambda_k},$$

или

$$g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{1-\lambda_k z},\quad |z|<1.$$

При этом

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\max_{z\in K}\frac{1}{|1-\lambda_k z|}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k|}{|\lambda_k|\rho(\frac{1}{\lambda_k},K)}\leq C_K\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|<\infty\quad \forall K\in W(U).$$

Следствие доказано.

Замечание 4. Утверждение II было получено ранее (другим методом) Т. А. Леонтьевой [10, теорема 3], причем, как показано в [10], коэффициенты c_k разложения функции $g \in \mathscr{A}(\overline{U})$ в ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{1-\lambda_k z}$ могут быть найдены по формуле

$$c_k = \frac{1}{\mathscr{L}'(\lambda_k)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g(\xi)\mathscr{L}(\frac{1}{\xi})}{1-\lambda_k \xi}\, d\xi$$

(контур γ охватывает $\overline{U}$ так, что g аналитична на γ и внутри γ). Числа c_k являются также коэффициентами разложения функции $f(w) = \frac{1}{w} g\left(\frac{1}{w}\right) \in \mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus U)$ в ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{w-\lambda_k}, \quad |w| > 1.$$

Воспользовавшись общим видом линейного непрерывного в $\mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus U)$ функционала, можно записать

$$c_k = \frac{1}{\mathscr{L}'(\lambda_k)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\frac{1}{\xi^2} f(\frac{1}{\xi})\mathscr{L}(\frac{1}{\xi})}{\frac{1}{\xi}-\lambda_k} d\xi = \frac{1}{\mathscr{L}'(\lambda_k)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^-} \frac{f(w)\mathscr{L}(w)}{w-\lambda_k} dw = \frac{1}{\mathscr{L}'(\lambda_k)} \varphi_k(f),$$

где $\Gamma = \left\{w = \frac{1}{\xi} : \xi \in \gamma\right\}$, $\varphi_k \in \mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus U)'$ такие, что $\varphi_k\left(\frac{1}{z-w}\right) = \frac{\mathscr{L}(w)}{w-\lambda_k}, k = 1, 2, \ldots$. Таким образом, мы имеем дело с тем же представлением функции $f \in \mathscr{A}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus U)$, что и в утверждении 3 предложения 1 при $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{U}$.

Замечание 5. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию следствия 2 предложения 3. Так как множество Λ' предельных точек последовательности Λ лежит на окружности $|z| = 1$, то $\mathscr{L} \notin \mathscr{A}(\overline{U})$. Если дополнительно известно, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|) = \infty$, то из теорем единственности следует, что функция $\mathscr{L}$ не ограничена в U. Мы покажем, что некоторую информацию о росте функции $\mathscr{L}$ можно получить также в случае, когда последовательность $\{|\mathscr{L}'(\lambda_k)|\}_{k=1}^{\infty}$ достаточно быстро стремится к бесконечности. Воспользуемся для этого основным результатом работы [23, с. 171].

Теорема Р. В. Сибилева. *Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, $\varepsilon_k \downarrow 0$. Для того чтобы из условий*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z-\lambda_k} \equiv 0, \quad |z| > 1, \quad |A_k| \le \mathrm{const} \cdot \varepsilon_k$$

следовало $A_k = 0$, $k \ge 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln \varepsilon_k}{k^2} = -\infty.$$

Предложение 4. *Пусть $\mathscr{L} \in \mathscr{A}(U)$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — все нули $\mathscr{L}$, каждый из них простой и лежит в U. Если $|\mathscr{L}'(\lambda_k)| \uparrow +\infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln|\mathscr{L}'(\lambda_k)|}{k^2} = +\infty$, то $\varlimsup\limits_{R\to 1} \min\limits_{|\lambda|=R} |\mathscr{L}(\lambda)| < +\infty$.*

Доказательство. Предположив противное, найдем последовательность $R_k \uparrow 1$ такую, что выполняется условие 2 следствия 2 из предложения 3. Положим

$$b_k = \ln|\mathscr{L}'(\lambda_k)|, \quad a_k = \frac{1}{|\mathscr{L}'(\lambda_k)|} = e^{-b_k}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

По условию

$$b_k \uparrow \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k^2} = \infty.$$

В силу известных теорем типа Абеля — Дини получаем, что

$$S_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k = Ce^{-B_n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$B_n \uparrow \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k^2} = \infty.$$

Следовательно, $S_n \to 0$, $n \to \infty$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\mathscr{L}'(\lambda_k)|}$ сходится. Таким образом, имеют место условия 1 и 2 следствия 2. Но тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathscr{L}'(\lambda_k)} \cdot \frac{1}{z - \lambda_k} \equiv 0, \quad |z| > 1.$$

Поскольку $\frac{1}{|\mathscr{L}'(\lambda_k)|} \downarrow 0$, то по теореме Р. В. Сибилева условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln|\mathscr{L}'(\lambda_k)|}{k^2} = +\infty$$

влечет

$$\frac{1}{\mathscr{L}'(\lambda_k)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

что невозможно.

В заключение укажем простой пример согласующейся с (Λ, U) последовательности $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. Выпишем последовательность $\{|\lambda_k|\}_{k=1}^{\infty}$ в порядке неубывания:

$$|\lambda_1| = \dots = |\lambda_{s_1}| < |\lambda_{s_1+1}| = \dots = |\lambda_{s_2}| < \dots < |\lambda_{s_{j-1}+1}| = \dots = |\lambda_{s_j}| < \dots.$$

Положим

$$r_1 = \frac{1}{2}(|\lambda_{s_2}| - |\lambda_{s_1}|), \quad r_k = \min\left\{r_{k-1}, \frac{1}{2}(|\lambda_{s_{k+1}}| - |\lambda_{s_k}|)\right\}, \ k = 2, 3, \dots;$$

$$R_k = |\lambda_{s_k}| + r_k, \quad \Gamma_k = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = R_k\}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Тогда $R_k \uparrow 1$ и $U_{(r)} \cap \Gamma_k = \varnothing$, $k = 1, 2, \dots$, где $U_{(r)} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_k| < r_k\}$. При этом

$$\lim_{k\to\infty} \{l(\Gamma_k) \sup_{\lambda \in \Gamma_k} \rho(\lambda, \partial U)\} = 2\pi \lim_{k\to\infty} \{R_k(1 - R_k)\} = 0.$$

Автор благодарен рецензенту, чьи конструктивные замечания несомненно улучшили первоначальный вариант статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.

2. *Коробейник Ю. Ф.* Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44, № 5. С. 1066–1114.

3. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 1. С. 73–126.

4. *Абанин А. В.* Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы // Мат. заметки. 1995. Т. 57, № 4. С. 483–497.

5. *Мелихов С. Н.* Нетривиальные разложения нуля и представительные подпространства // Изв. вузов. Математика. 1990. № 8. С. 53–65.

6. *Громов В. П.* Нетривиальные разложения нуля и представляющие системы собственных векторов линейного оператора // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 4. С. 801–805.

7. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.

8. *Коробейник Ю. Ф.* К вопросу о разложении аналитических функций в ряды по рациональным функциям // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 5. С. 723–737.

9. *Леонтьева Т. А.* Представление функций, аналитических в замкнутой области, рядами рациональных функций // Мат. заметки. 1968. Т. 4, № 2. С. 191–200.

10. *Леонтьева Т. А.* Об условиях представимости аналитических функций рядами рациональных функций // Мат. заметки. 1974. Т. 15, № 2. С. 197–203.

11. *Wolff J.* Sur les séries $\sum_{1}^{\infty} \frac{A_k}{z-\alpha_k}$ // C. R. Acad. Sci. 1921. V. 173. P. 1327–1328.

12. *Denjoy A.* Sur les séries de fractions rationnelles // Bull. Soc. Math. France. 1924. V. 52. P. 418–434.

13. *Brown L., Shields A., Zeller K.* On absolutely convergent exponential sums // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 96, N 1. P. 162–183.

14. *Гончар А. А.* О примерах неединственности аналитических функций // Вестн. МГУ. 1964. № 1. С. 37–43.

15. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.

16. *Мелихов С. Н.* Правые обратные к операторам представления рядами экспонент и свертки: Дис. … д.ф.-м.н. Ростов-на-Дону, 2002.

17. *Братищев А. В.* Базисы Кёте, целые функции и их приложения: Дис. … д.ф.-м.н. Ростов-на-Дону, 1997.

18. *Мелихов С. Н.* О разложении аналитических функций в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, № 5. С. 991–1004.

19. *Köthe G.* Topological vector spaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1969.

20. *Шерстюков В. Б.* О приближении аналитических функций линейными комбинациями простых дробей // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2001. № 1. С. 22–24.

21. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

22. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.

23. *Сибилев Р. В.* Теорема единственности для рядов Вольфа — Данжуа // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 1. С. 170–199.

Статья поступила 13 октября 2005 г.

Шерстюков Владимир Борисович
Московский инженерно-физический институт (гос. университет),
кафедра высшей математики,
Каширское шоссе, 31, Москва 115409
shervb@nm.ru