Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 517.918.1

О СЕКВЕНЦИАЛЬНОЙ ПОРЯДКОВОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ В $C(K)$–ПРОСТРАНСТВЕ

З. Эржан, С. Ёнал

Аннотация: В [1] доказано, что для любого компактного хаусдорфова пространства K без изолированных точек существует компактное хаусдорфово P'-пространство X, не являющееся F-пространством, такое, что $C(K)$ изометрически и порядково изоморфно векторной подрешетке $C(X)$. Доказательство этого утверждения техническое и сильно зависит от теорем о представлении. В данной статье представлено его простое прямое доказательство без каких-либо предположений об изолированных точках. Указаны некоторые обобщения.

Ключевые слова: F-пространство, P'-пространство, свойство Кантора, секвенциально порядково непрерывная норма, изометрический изоморфизм векторных решеток.

Пусть X — топологическое пространство. Подмножество U в X называют *F_σ-множеством*, если $U = \bigcup\limits_n K_n$ для некоторой последовательности (K_n) замкнутых подмножеств. Подмножество K в X называют *G_δ-множеством*, если $K = \bigcap\limits_n U_n$ для некоторой последовательности (U_n) открытых подмножеств. Компактное хаусдорфово пространство K называют *F-пространством*, если замыкания двух дизъюнктных открытых F_σ-множеств дизъюнктны, и *P'-пространством*, если внутренность всякого непустого G_δ-множества непуста. *Александровская копия* $A(K)$ пространства K — это компактное хаусдорфово пространство $K \times \{0,1\}$ с носителем K, порожденное множествами $M \times \{1\}$, $U \times \{0,1\} - F \times \{1\}$, где $M, U, F \subset K$, U открыто, а F конечно (см. [2]). Мы отсылаем к $[1,3]$ по поводу определений и обозначений.

Говорят, что банахова решетка E имеет *секвенциально порядково непрерывную норму*, если $\|x_n\| \downarrow 0$ при $x_n \downarrow 0$. Пусть $C(K)$ — пространство вещественных непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве K. Известно, что $C(K)$ обладает секвенциально порядково непрерывной нормой тогда и только тогда, когда K — P'-пространство. Говорят, что векторная решетка E обладает *свойством Кантора*, если для любой пары последовательностей $(x_n), (y_n)$ в E существует $z \in E$ такой, что $x_n \leq z \leq y_n$, когда $x_n \leq y_m$ для любых n, m. Известно, что $C(K)$ обладает свойством Кантора тогда и только тогда, когда K — F-пространство.

В [1] доказано, что для каждого компактного хаусдорфова пространства K без изолированных точек существует компактное хаусдорфово пространство X такое, что $C(X)$ имеет секвенциально порядково непрерывную норму, но не обладает свойством Кантора, и $C(K)$ изометрически и решеточно изоморфно векторной подрешетке $C(X)$. Данное в [1] доказательство техническое и опирается на теоремы о представлении. Мы даем прямое простое доказательство этой теоремы без предположения об изолированных точках.

Лемма 1. *Пусть $X = \prod_{\alpha\in\mathbb{R}} [0,1]$ с топологией произведения. Пусть (O_n) — последовательность открытых подмножеств X с непустым пересечением. Тогда мощность множества $M = \bigcap_n O_n$ по крайней мере континуум.*

Доказательство. Пусть $x \in M$. Тогда $x \in O_n$ для любого n. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется семейство открытых подмножеств $F_\alpha^n \subset [0,1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, такое, что

$$x \in \prod_{\alpha\in\mathbb{R}} F_\alpha^n \subset O_n \quad \text{и} \quad F_n = \big\{\alpha : F_\alpha^n \neq [0,1]\big\} \text{ конечно.}$$

Пусть $F = \bigcup_n F_n$ и $y \in X$ такое, что $x_\alpha = y_\alpha$ для любого $\alpha \in F$. Тогда $y \in M$. Это показывает, что кардинальное число M больше, чем кардинальное число $2^{|\mathbb{R}\setminus F|} = 2^c$, где $|\mathbb{R} \setminus F|$ — мощность $\mathbb{R} \setminus F$. Лемма доказана.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству предыдущей, поэтому мы его опускаем.

Лемма 2. *Пусть K — компактное хаусдорфово пространство и $X = K \times (\prod_{\alpha\in\mathbb{R}} [0,1])$ с топологией произведения. Пусть (O_n) — последовательность открытых подмножеств X с непустым пересечением. Тогда кардинальное число множества $F = \cap_n O_n$ по крайней мере континуум.*

Лемма 3. *Пусть K — компактное хаусдорфово пространство такое, что кардинальное число множества $\bigcap_n (O_n)$ по крайней мере континуум и для произвольной последовательности (O_n) открытых подмножеств с непустым пересечением. Тогда александровская копия $A(K)$ представляет собой P'-пространство.*

Доказательство. Докажем, что $A(K)$ — P'-пространство. Пусть (O_n) — последовательность открытых подмножеств $A(K)$ с непустым пересечением. Пусть $O = \bigcap_n O_n$. Возможны два случая. В одном из них $O \cap (K \times \{1\}) \neq \varnothing$. Пусть $(k,1) \in O$. Так как $\{(k,1)\}$ открыто, внутренность O непуста. Второй случай $O \cap (K \times \{1\}) = \varnothing$ не имеет места. В самом деле, допустим, что $O \cap (K \times \{1\}) = \varnothing$. Тогда $O \cap (K \times \{0\}) \neq \varnothing$. Существуют $(k,0) \in O$, последовательность (V_n) открытых множеств в K и последовательность (F_n) конечных подмножеств K такие, что

$$(k,0) \in (V_n \times \{0\}) \cup ((V_n \setminus F_n) \times \{1\}) \subset O_n \quad \text{для каждого } n.$$

Отсюда $\bigcap_n V_n \neq \varnothing$, поэтому $\bigcap_n V_n$ несчетно. Можно выбрать $x \in \bigcap_n V_n \setminus \bigcup_n F_n$ так, что $(x,1) \in O \cap (K \times \{1\})$; противоречие. Тем самым $A(K)$ — P'-пространство.

Лемма 4. *Пусть K — компактное хаусдорфово пространство. Тогда $A(K)$ является F-пространством тогда и только тогда, когда K конечно.*

Доказательство. Если K конечно, то $A(K)$ конечно, поэтому будет F-пространством. Пусть K — бесконечное множество. Тогда существуют счетные дизъюнктные множества A, B и $k \in K$ такие, что k расположено в замыканиях A и B (например, $A = C \setminus \{k\}$ и $B = \{k\}$, где C — счетное множество и k — предельная точка C). Тогда $A \times \{1\}$ и $B \times \{1\}$ открыты, дизъюнктны и являются F_σ-подмножествами в $A(K)$. Легко видеть, что $(k,0)$ лежит в пересечении замыканий $A \times \{1\}$ и $B \times \{1\}$. Следовательно, $A(K)$ не является F-пространством, и лемма доказана.

Докажем основной результат работы.

Теорема 5. *Пусть K — компактное хаусдорфово пространство. Тогда существует компактное хаусдорфово пространство X такое, что $C(X)$ обладает секвенциально порядково непрерывной нормой, но не имеет свойства Кантора, и $C(K)$ изометрически и решеточно изоморфно векторной подрешетке в $C(X)$.*

Доказательство. Возьмем $X = A(K \times (\prod\limits_{\alpha\in\mathbb{R}}[0,1]))$. Согласно леммам 2 и 3 $C(X)$ имеет секвенциально порядково непрерывную норму. Пусть

$$T : C(K) \longrightarrow C(X)$$

определено следующим образом: $T(f)((k,s),r) = f(k)$. Легко проверить, что T и обратный к нему положительны и T является изометрией. Из леммы 4 вытекает, что $C(A(X))$ не обладает свойством Кантора.

Следствие 6. *Пусть E — AM-пространство. Тогда существует компактное хаусдорфово пространство X такое, что $C(X)$ имеет секвенциально порядково непрерывную норму, не обладает свойством Кантора и E изометрически и решеточно изоморфно векторной подрешетке в $C(X)$.*

Доказательство. Второе сопряженное E'' к E изометрически и решеточно изоморфно $C(K)$, где K — некоторое компактное хаусдорфово пространство. Согласно предыдущей теореме X обладает требуемыми свойствами.

Замечание 1. А. И. Векслер доказал, что для каждого компактного хаусдорфова пространства K существует P'-пространство X, также являющееся F-пространством, такое, что $C(K)$ изометрически и решеточно вкладывается в $C(X)$ (см. [1]). Точнее, он доказал, что $X = \beta K \setminus K$, где βK — стоун-чеховская компактификация K относительно дискретной топологии.

Замечание 2. Пусть α — бесконечное кардинальное число. Говорят, что пространство $C(K)$ обладает *α-свойством Кантора*, если для любых $f_i \le g_j$ в $C(K)$, $i,j \in I$, где мощность I меньше, чем α, найдется $h \in C(K)$ такое, что $f_i \le h \le g_i$ для любого $i \in I$. Будем говорить, что $C(K)$ имеет *α-секвенциально порядково непрерывную норму*, если $\|f_\beta\| \downarrow 0$ при $f_\beta \downarrow 0$ для β такого, что кардинальное число β меньше, чем α. Теорему 5 можно обобщить следующим образом: для каждых компактного хаусдорфова пространства K и бесконечного кардинального числа α существует компактное хаусдорфово пространство X такое, что $C(X)$ имеет α-секвенциально порядково непрерывную норму, не обладает α-свойством Кантора и $C(K)$ изометрически и решеточно вложено в $C(X)$. Точнее, можно взять $X = A(K \times (\prod\limits_{\beta}[0,1]))$, где β — кардинальное число такое, что $\alpha < \beta$.

Замечание 3. Пусть K — компактное хаусдорфово пространство и E — банахова решетка с секвенциально порядково непрерывной нормой. Пусть $X = A(K \times (\prod\limits_{\alpha\in\mathbb{R}}[0,1]))$. Тогда $C(X,E)$ обладает свойством Кантора и $C(K,E)$ изометрически и решеточно изоморфно векторной подрешетке $C(X,E)$.

Замечание 4. Пусть K — бесконечное квази-стоуновское пространство без изолированных точек. В [1] введено понятие AM-пространства $CD_0(K)$ и показано, что $CD_0(K)$ не обладает свойством Кантора (теорема 4.3). Стандартным образом проверяется, что $CD_0(K)$ может быть отождествлено с $C(A(K))$ как векторная решетка при отображении $\pi(f+d)(k,r) = f(k) + rd(k)$. Заметим, что $C(A(K))$ не обладает свойством Кантора, поскольку $A(K)$ не является F-пространством (согласно предыдущей лемме) для бесконечного компактного хаусдорфова пространства K. Также легко показать, что $C(A(K))$ (o)-полно. Это обобщает теорему 4.3 из [1].

Замечание 5. Можно указать другую конструкцию X следующим образом. Пусть K — компактное хаусдорфово пространство. Стандартным образом можно показать, что на $X = K \times [0,1]$ можно задать топологию компактного хаусдорфова пространства, порожденную подмножествами $V \times ([0,1] \setminus F)$ и $M \subset K \times (0,1]$, где V открыто в K и $F \subset [0,1]$ конечно. Легко проверить, что X является P'-пространством, но не F-пространством, и $C(K)$ изометрически и решеточно изоморфно вложено в $C(X)$. Отметим также, что мощности K и X совпадают, если мощность K не менее чем континуум.

Наконец, представляется резонным поставить следующий

Вопрос. *Пусть K — компактное хаусдорфово пространство. Существует ли компактное хаусдорфово пространство X такое, что*

(i) *X является P'-пространством, но не F-пространством;*

(ii) *$C(K)$ изометрически и решеточно изоморфно подрешетке $C(X)$;*

(iii) *если Y — P'-пространство, не являющееся F-пространством, и $C(K)$ изометрически решеточно изоморфно вложено в $C(Y)$, то $C(X)$ вложено в $C(Y)$ при решеточном изоморфизме?*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Abramovich Y. A., Wickstead A. W.* Remarkable classes of unital AM-spaces // J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 180, N 2. P. 398–411.
2. *Handbook of set-theoretic topology.* Eds. Kunen K., Vaughan J. E. Amsterdam: North-Holland, 1984.
3. *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions. Princeton: Van Nostrand, 1960.

Статья поступила 29 апреля 2005 г.

Zafer Ercan (Эржан Зафер), Suleyman Onal (Ёнал Сулейман)
Middle East Technical University, Department of Mathematics,
06531 Ankara, Turkey
zercan@metu.edu.tr, osul@metu.edu.tr