Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 517.51

ОЦЕНКИ ПЕРЕСТАНОВОК ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В. С. Гулиев, Ш. А. Назирова

Аннотация: Изучается ограниченность в $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \ldots \times L_{p_k}$ обобщенных полилинейных дробных интегралов. Доказана оценка типа О'Нейла для k-линейных интегральных операторов. С ее использованием получена поточечная оценка перестановок обобщенных полилинейных дробных интегралов. В качестве приложения доказана теорема типа Соболева для таких интегралов.

Ключевые слова: лебегово пространство, неравенство типа О'Нейла, оценка перестановки, обобщенный полилинейный дробный интеграл.

Классический потенциал Рисса является важным инструментом в гармоническом анализе, вещественном анализе и дифференциальных уравнениях с частными производными. Многие исследователи обращались к изучению полилинейных максимальных операторов, полилинейных дробных интегральных операторов и смежным вопросам, см. [1–6] и др. Цель настоящей работы состоит в получении ограниченности в $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \cdots \times L_{p_k}$ обобщенных полилинейных операторов, а также полисублинейных дробных максимальных функций и полилинейных дробных интегралов.

1. Перестановки функций

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство. Для векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ в $\mathbb{R}^n$ будем использовать обозначения $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$, $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Пусть $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, — пространство измеримых функций g в $\mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Обозначим через $L_p(S^{n-1})$ пространство измеримых функций $g(x)$, $x \in S^{n-1}$, с конечной нормой

$$\|g\|_{L_p(S^{n-1})} = \left(\int\limits_{S^{n-1}} |g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Пусть g — измеримая функция на $\mathbb{R}^n$. Функция распределения функции g определяется равенством $\lambda_g(t) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > t\}|$, $t \ge 0$. Обозначим через

Vagif Guliyev's research partially supported by the grant of INTAS (project 05–1000008–8157).

$L_0(\mathbb{R}^n)$ класс всех измеримых функций g на $\mathbb{R}^n$, почти всюду конечных и таких, что $\lambda_g(t) < \infty$ для всех $t > 0$ (см. [7]). Если функция g принадлежит $L_0(\mathbb{R}^n)$, то ее *неубывающая перестановка* — это функция g^*, неубывающая на $]0, \infty[$ и равноизмеримая с $|g(x)|$, т. е.

$$|\{t > 0 : g^*(t) > s\}| = \lambda_g(s) \quad \text{для любого } s \geq 0.$$

Пусть

$$g^{**}(t) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t g^*(s)\, ds.$$

Согласно теореме Харди — Литтлвуда (см, [8, с. 44]) для любых $f_1, f_2 \in L_0(\mathbb{R}^n)$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_1(x) f_2(x)|\, dx \leq \int\limits_0^\infty f_1^*(t) f_2^*(t)\, dt.$$

Если $1 \leq p < \infty$, то слабое L_p-пространство $WL_p(\mathbb{R}^n)$ представляет собой множество локально интегрируемых функций g на $\mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$\|g\|_{WL_p} = \sup_{t>0} t \lambda_g(t)^{1/p} = \sup_{t>0} t^{1/p} g^*(t).$$

Равноизмеримые перестановки функций играют важную роль в разных разделах математики. Отметим некоторые свойства перестановок (см., например, [8]):

1) если $0 < t < t + s$, то $(g + h)^*(t + s) \leq g^*(t) + h^*(s)$,

2) если $0 < p < \infty$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p\, dx = \int\limits_0^\infty (g^*(t))^p dt,$$

3) для любого $t > 0$

$$\sup_{|E|=t} \int\limits_E |g(x)|\, dx = \int\limits_0^t g^*(s)\, ds.$$

Лемма 1. *Пусть $f_1, f_2, \dots, f_k \in L_0(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_1(x) f_2(x) \dots f_k(x)|\, dx \leq \int\limits_0^\infty f_1^*(t) f_2^*(t) \dots f_k^*(t)\, dt. \tag{1}$$

Доказательство. По теореме Фубини имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_1(x) f_2(x) \dots f_k(x)|\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_0^{|f_1(x)|} du_1 \cdots \int\limits_0^{|f_k(x)|} du_k$$

$$= \int\limits_0^\infty \cdots \int\limits_0^\infty |\{x : |f_1(x)| > u_1, \dots, |f_k(x)| > u_k\}|\, du_1 \dots du_k$$

$$\leq \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \min\{\lambda_{f_1}(u_1), \dots, \lambda_{f_k}(u_k)\}\, du_1 \dots du_k$$

$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty |\{t > 0 : f_1^*(t) > u_1, \dots, f_k^*(t) > u_k\}|\, du_1 \dots du_k$$

$$= \int_0^\infty dt \int_0^{f_1^*(t)} du_1 \cdots \int_0^{f_k^*(t)} du_k = \int_0^\infty f_1^*(t) f_2^*(t) \dots f_k^*(t)\, dt.$$

Отметим, что метод доказательства изложен в [7].

Пусть $k \geq 2$ — целое и θ_j $(j = 1, 2, \dots, k)$ — фиксированные различные ненулевые вещественные числа.

Лемма 2. *Пусть $f_1, f_2, \dots, f_k \in L_0(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x - \theta_1 y) f_2(x - \theta_2 y) \dots f_k(x - \theta_k y)|\, dy \leq C_\theta \int_0^\infty f_1^*(t) f_2^*(t) \dots f_k^*(t)\, dt,$$

где $C_\theta = |\theta_1 \dots \theta_k|^{-n}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

2. Неравенства типа О'Нейла для обобщенных полилинейных интегральных операторов

В этом пункте мы докажем аналог неравенства типа О'Нейла для k-линейных интегральных операторов. Обозначим $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ и определим

$$\mathbf{f}^*(t) = f_1^*(t) \dots f_k^*(t), \quad \mathbf{f}^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f_1^*(s) \dots f_k^*(s)\, ds, \quad t > 0.$$

Пусть $k \geq 2$ — целое и θ_j $(j = 1, 2, \dots, k)$ — фиксированные различные ненулевые вещественные числа. Тогда для k-линейного интегрального оператора

$$(\mathbf{f}, g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f_1(x - \theta_1 y) \dots f_k(x - \theta_k y)\, dy$$

имеет место аналог неравенства О'Нейла (см. [9]).

Лемма 3. *Пусть $f_1, f_2, \dots, f_k, g \in L_0(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого $0 < t < \infty$ выполнено неравенство*

$$(\mathbf{f}, g)^{**}(t) \leq C_\theta \left(t\mathbf{f}^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^\infty \mathbf{f}^*(s) g^*(s)\, ds \right). \tag{2}$$

Доказательство. Фиксируем $t > 0$. Возьмем измеримое множество E_t такое, что $\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > g^*(t)\} \subset E_t \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| \geq g^*(t)\}$. Пусть $g_1(x) = (g(x) - g^*(t))\chi_{E_t}(x)$, $g_2(x) = g(x) - g_1(x)$. Для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ с мерой $|A| = t$ имеем

$$\int_A (\mathbf{f}, g_1)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g_1(y)\, dy \int_A f_1(x - \theta_1 y) \dots f_k(x - \theta_k y)\, dx.$$

Отсюда ввиду леммы 2 вытекает, что

$$\int\limits_A (\mathbf{f}, g_1)(x)\,dx \le C_\theta \int\limits_0^t f_1^*(u)\ldots f_k^*(u)\,du \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_1(y)\,dy$$
$$= C_\theta \int\limits_0^t f_1^*(u)\ldots f_k^*(u)\,du \int\limits_0^t \left[g^*(u) - g^*(t)\right]\,du.$$

Поэтому

$$(\mathbf{f}, g_1)^{**}(t) = \frac{1}{t}\sup_{|A|=t}\int\limits_A (\mathbf{f}, g_1)(x)\,dx \le C_\theta t\mathbf{f}^{**}(t)[g^{**}(t) - g^*(t)].$$

Оценивая $(\mathbf{f}, g_2)^{**}(t)$, получим

$$(\mathbf{f}, g_2)^{**}(t) = \frac{1}{t}\sup_{|A|=t}\int\limits_A |(\mathbf{f}, g_2)(x)|\,dx.$$

Из леммы 2 имеем

$$|(\mathbf{f}, g_2)(x)| \le C_\theta \int\limits_0^\infty g_2^*(u) f_1^*(u) f_2^*(u)\ldots f_k^*(u)\,du$$
$$= C_\theta \left(g^*(t)\int\limits_0^t f_1^*(u) f_2^*(u)\ldots f_k^*(u)\,du + \int\limits_t^\infty g^*(u) f_1^*(u) f_2^*(u)\ldots f_k^*(u)\,du \right).$$

Тогда

$$(\mathbf{f}, g_2)^{**}(t) \le C_\theta \left(t\mathbf{f}^{**}(t) g^*(t) + \int\limits_t^\infty \mathbf{f}^*(u) g^*(u)\,du \right).$$

Оценка (2) доказана. □

Лемма 4. *Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k, g \in L_0(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого $t > 0$*

$$(\mathbf{f}, g)^{**}(t) \le C_\theta \int\limits_t^\infty \mathbf{f}^{**}(t) g^{**}(t)\,dt. \tag{3}$$

Доказательство. Можно предполагать интеграл в правой части (3) конечным и тем самым заключить, что

$$\lim_{t\to\infty} t\mathbf{f}^{**}(t) g^{**}(t) = 0. \tag{4}$$

В силу леммы 3 и неравенства $\mathbf{f}^*(t) \le \mathbf{f}^{**}(t)$ имеем

$$(\mathbf{f}, g)^{**}(t) \le C_\theta t\mathbf{f}^{**}(t) g^{**}(t) + C_\theta \int\limits_t^\infty \mathbf{f}^*(u) g^*(u)\,du$$
$$\le C_\theta t\mathbf{f}^{**}(t) g^{**}(t) + C_\theta \int\limits_t^\infty \mathbf{f}^{**}(u) g^*(u)\,du. \tag{5}$$

Так как $\mathbf{f}^* = f_1^* f_2^* \dots f_k^*$ и g^* неубывающая,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{f}^{**}(t) = \frac{1}{t}[\mathbf{f}^*(t) - \mathbf{f}^{**}(t)] \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} t g^{**}(t) = g^*(t)$$

для почти всех t. Поскольку $\mathbf{f}^{**}$ и g^{**} абсолютно непрерывны, мы можем применить интегрирование по частям и тогда с использованием (4) и (5) получить

$$(\mathbf{f}, g)^{**}(t) \le C_\theta t \mathbf{f}^{**}(t) g^{**}(t) + C_\theta u \mathbf{f}^{**}(u) g^*(u)|_t^\infty + C_\theta \int\limits_t^\infty [\mathbf{f}^{**}(u) - \mathbf{f}^*(u)] g^{**}(u)\, du$$

$$= C_\theta \int\limits_t^\infty [\mathbf{f}^{**}(u) - \mathbf{f}^*(u)] g^{**}(u)\, du \le C_\theta \int\limits_t^\infty \mathbf{f}^{**}(u) g^{**}(u)\, du. \quad \square$$

3. Оценки перестановок для обобщенного полилинейного дробного интеграла

Пусть $\Omega(tx) = \Omega(x)$ для всех $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $s \ge 1$. Определим k-сублинейный дробный максимальный оператор, полагая

$$M_{\Omega,\alpha}(\mathbf{f})(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \int\limits_{|y|<r} |\Omega(y)| |f_1(x - \theta_1 y) \dots f_k(x - \theta_k y)|\, dy,$$

k-линейный дробный интегральный оператор — по формуле

$$I_{\Omega,\alpha}(\mathbf{f})(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^{n-\alpha}} f_1(x - \theta_1 y) \dots f_k(x - \theta_k y)\, dy$$

и обобщенный k-линейный дробный интегральный оператор — равенством

$$(K_\alpha, \mathbf{f})(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(y) f_1(x - \theta_1 y) \dots f_k(x - \theta_k y)\, dy,$$

где $K_\alpha \in WL_{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что если $K_\alpha(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^{n-\alpha}}$, $0 < \alpha < n$, $\Omega(tx) = \Omega(x)$ для любых $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \in L_{n/(n-\alpha)}(S^{n-1})$, то $K_\alpha^*(t) = \left(\frac{A}{nt}\right)^{(n-\alpha)/n}$, $K_\alpha^{**}(t) = \frac{n}{\alpha} K_\alpha^*(t)$, где $A = \|\Omega\|_{L_{n/(n-\alpha)}(S^{n-1})}^{n/(n-\alpha)}$, и тем самым $K_\alpha \in WL_{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)$ и $\|K_\alpha\|_{WL_{n/(n-\alpha)}} = \left(\frac{A}{n}\right)^{(n-\alpha)/n}$.

Лемма 5 [6]. *Пусть* $0 < \alpha < n$, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $s \ge 1$. *Тогда*

$$M_{\Omega,\alpha}\mathbf{f}(x) \le \frac{2^{n-\alpha}}{1 - 2^{\alpha-n}} I_{|\Omega|,\alpha}(|\mathbf{f}|)(x), \quad \text{где } |\mathbf{f}| = (|f_1|, \dots, |f_k|).$$

Для обобщенных полилинейных дробных интегралов $(K_\alpha, \mathbf{f})$ имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* $f_1, f_2, \dots, f_k \in L_0(\mathbb{R}^n)$ *и* $K_\alpha \in WL_{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$. *Тогда*

$$(K_\alpha, \mathbf{f})^*(t) \le (K_\alpha, \mathbf{f})^{**}(t) \le C_1 \left(t^{\frac{\alpha}{n}-1} \int\limits_0^t \mathbf{f}^*(s)\, ds + \int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n}-1} \mathbf{f}^*(s)\, ds \right), \qquad (6)$$

где $C_1 = \frac{n}{\alpha} C_\theta \|K_\alpha\|_{WL_{n/(n-\alpha)}}$.

Доказательство. Пусть $K_\alpha \in WL_{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)$, тогда

$$K_\alpha^*(t) \le \|K_\alpha\|_{WL_{n/(n-\alpha)}} t^{\frac{\alpha}{n}-1}, \quad K_\alpha^{**}(t) \le \frac{n}{\alpha} K_\alpha^*(t).$$

Принимая во внимание неравенство (2), приходим к (6). $\square$

Следствие 1. *Пусть $f_1, f_2, \dots, f_k \in L_0(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что $0 < \alpha < n$, $\Omega(tx) = \Omega(x)$ для любых $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\Omega \in L_{n/(n-\alpha)}(S^{n-1})$. Тогда*

$$(I_{\Omega,\alpha}\mathbf{f})^*(t) \le (I_{\Omega,\alpha}\mathbf{f})^{**}(t) \le C_2 \left(t^{\frac{\alpha}{n}-1} \int\limits_0^t \mathbf{f}^*(s)\,ds + \int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n}-1}\mathbf{f}^*(s)\,ds \right),$$

$$(M_{\Omega,\alpha}\mathbf{f})^*(t) \le (M_{\Omega,\alpha}\mathbf{f})^{**}(t) \le C_2' \left(t^{\frac{\alpha}{n}-1} \int\limits_0^t \mathbf{f}^*(s)\,ds + \int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n}-1}\mathbf{f}^*(y)\,ds \right),$$

где $C_2 = \frac{n}{\alpha} C_\theta \big(\frac{A}{n}\big)^{(n-\alpha)/n}$, $A = \|\Omega\|^{n/(n-\alpha)}_{L_{n/(n-\alpha)}(S^{n-1})}$, $C_2' = \frac{2^{n-\alpha}}{1-2^{\alpha-n}} C_2$.

Аналогично получается

Теорема 2. *Пусть $0 < \alpha < n$, $K_\alpha \in WL_{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)$ и $f_1, f_2, \dots, f_k \in L_0(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$(K_\alpha, \mathbf{f})^*(t) \le (K_\alpha, \mathbf{f})^{**}(t) \le C_1 \int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n}-1}\mathbf{f}^{**}(s)\,ds. \tag{7}$$

Следствие 2. *Пусть $f_1, f_2, \dots, f_k \in L_0(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что $0 < \alpha < n$, $\Omega(tx) = \Omega(x)$ для любых $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\Omega \in L_{n/(n-\alpha)}(S^{n-1})$. Тогда*

$$(I_{\Omega,\alpha}\mathbf{f})^*(t) \le (I_{\Omega,\alpha}\mathbf{f})^{**}(t) \le C_2 \int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n}-1}\mathbf{f}^{**}(s)\,ds,$$

$$(M_{\Omega,\alpha}\mathbf{f})^*(t) \le (M_{\Omega,\alpha}\mathbf{f})^{**}(t) \le C_2' \int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha}{n}-1}\mathbf{f}^{**}(s)\,ds.$$

4. Ограниченность в $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_k}$ обобщенных полилинейных дробных интегральных операторов

Здесь мы докажем теорему типа Соболева для обобщенного полилинейного дробного интеграла $(K_\alpha, \mathbf{f})$, используя неравенство типа О'Нейла для k-линейного интегрального оператора. Отметим, что эти результаты являются новыми также для k-сублинейной дробной максимальной функции $M_{\Omega,\alpha}\mathbf{f}$ и k-линейного дробного интеграла $I_{\Omega,\alpha}\mathbf{f}$.

Нам понадобится следующая лемма, доказанная в [10].

Лемма 6. *Пусть $0 < p \le 1 \le q < \infty$ и k — неотрицательная измеримая функция, u, v — весовые функции на $(0, \infty)$ и*

$$T\varphi(x) = \int\limits_0^\infty k(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Тогда неравенство

$$\left(\int\limits_0^\infty (T\varphi(t))^q\, u(t)dt \right)^{1/q} \le C \left(\int\limits_0^\infty \varphi(t)^p v(t)dt \right)^{1/p}$$

выполнено для любой неотрицательной неубывающей функции φ в том и только в том случае, если

$$C_0 = \sup_{r>0} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^r k(t,\tau) d\tau \right)^q u(t) dt \right)^{1/q} \left(\int_0^r v(t) dt \right)^{-1/p} < \infty.$$

Следствие 3. *Пусть $0 < p \le 1 \le q < \infty$, $0 < \alpha < n$. Тогда неравенство*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \tau^{\frac{\alpha}{n}-1} \varphi(\tau) d\tau \right)^q dt \right)^{1/q} \le C \left(\int_0^\infty \varphi(t)^p dt \right)^{1/p}$$

выполнено для любой неотрицательной неубывающей функции φ в том и только в том случае, если $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$.

Говорят, что p — *гармоническое среднее* для $p_1, p_2, \dots, p_k > 1$, если $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k}$. Если $f_j \in L_{p_j}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \dots, k$, то будем говорить, что $\mathbf{f}$ принадлежит $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_k}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3. *Предположим, что $0 < \alpha < n$, $K_\alpha \in WL_{n/(n-\alpha)}(\mathbb{R}^n)$. Пусть p — гармоническое среднее $p_1, p_2, \dots, p_k > 1$ и q таково, что $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Тогда $(K_\alpha, \mathbf{f})$ — ограниченный оператор из $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_k}(\mathbb{R}^n)$ в $L_q(\mathbb{R}^n)$ для $n/(n+\alpha) \le p < n/\alpha$ (равносильно $1 \le q < \infty$) и*

$$\|(K_\alpha, \mathbf{f})\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \le C \prod_{j=1}^k \|f_j\|_{L_{p_j}(\mathbb{R}^n)},$$

где $C > 0$ не зависит от f.

Доказательство. Случай I. $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ (равносильно $\frac{n}{n-\alpha} < q < \infty$). Докажем сначала результат теоремы 3 в рассматриваемом случае.

Принимая во внимание неравенства (1) и (6), имеем

$$\|(K_\alpha, \mathbf{f})\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} = \|(K_\alpha, \mathbf{f})^*\|_{L_q(0,\infty)}$$
$$\le C_1 \left(\int_0^\infty t^{q(\alpha/n-1)} \left(\int_0^t \mathbf{f}^*(s)\, ds \right)^q dt \right)^{1/q} + C_1 \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty s^{\alpha/n-1} \mathbf{f}^*(s)\, ds \right)^q dt \right)^{1/q}.$$

Применяя неравенство Харди, получим, что для справедливости неравенства

$$\left(\int_0^\infty t^{q(\alpha/n-1)} \left(\int_0^t \mathbf{f}^*(s)\, ds \right)^q dt \right)^{1/q} \le C_3 \left(\int_0^\infty \mathbf{f}^*(s)^p\, ds \right)^{1/p}$$

необходимо и достаточно условие

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty s^{q(\alpha/n-1)}\, ds \right)^{1/q} \left(\int_0^t ds \right)^{1/p'} = C_4 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{n} - (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} < \infty \Leftrightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n},$$

где $p' = \frac{p}{p-1}$.

Для справедливости неравенства

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha-n}{n}} \mathbf{f}^*(s)\,ds\right)^q dt\right)^{1/q} \le C_5 \left(\int\limits_0^\infty \mathbf{f}^*(s)^p\,ds\right)^{1/p}$$

необходимо и достаточно условие

$$\sup_{t>0} \left(\int\limits_0^t ds\right)^{1/q} \left(\int\limits_t^\infty s^{(\alpha/n-1)(1-p')}\,ds\right)^{1/p'} = C_6 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{n}-(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} < \infty \Leftrightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}.$$

Следовательно, применяя (1), получим

$$\begin{aligned}\|(K_\alpha, \mathbf{f})\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} &\le C_1(C_3 + C_5)\,\|\mathbf{f}^*\|_{L_p(0,\infty)} \\ &\le C_1(C_3 + C_5) \prod_{j=1}^k \|f_j^*\|_{L_{p_j}(0,\infty)} = C_1(C_3 + C_5) \prod_{j=1}^k \|f_j\|_{L_{p_j}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Случай II. $\frac{n}{n+\alpha} \le p \le 1$ (равносильно $1 \le q \le \frac{n}{n-\alpha}$). Докажем теорему 3 в этом случае. С учетом (1) и (7) имеем

$$\begin{aligned}\|(K_\alpha, \mathbf{f})\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} &= \|(K_\alpha, \mathbf{f})^*\|_{L_q(0,\infty)} \le \|(K_\alpha, \mathbf{f})^{**}\|_{L_q(0,\infty)} \\ &\le C_1 \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_t^\infty s^{\alpha/n-1} \mathbf{f}^{**}(s)\,ds\right)^q dt\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

В силу следствия 3 неравенство

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha-n}{n}} \mathbf{f}^{**}(s)\,ds\right)^q dt\right)^{1/q} \le C_7 \left(\int\limits_0^\infty \mathbf{f}^{**}(s)^p\,ds\right)^{1/p}$$

справедливо тогда и только тогда, когда $1/p - 1/q = \alpha/n$. Применяя (1), неравенство Харди для монотонных функций и неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned}\|(K_\alpha, \mathbf{f})\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} &= \|(K_\alpha, \mathbf{f})^*\|_{L_q(0,\infty)} \le C_8 \|\mathbf{f}^{**}\|_{L_p(0,\infty)} \\ &\le C_9 \|\mathbf{f}^*\|_{L_p(0,\infty)} \le C_9 \prod_{j=1}^k \|f_j^*\|_{L_{p_j}(0,\infty)} = C_9 \prod_{j=1}^k \|f_j\|_{L_{p_j}(\mathbb{R}^n)}. \qquad \square\end{aligned}$$

Следствие 4. *Пусть $\Omega(tx) = \Omega(x)$ для любых $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\Omega \in L_{n/(n-\alpha)}(S^{n-1})$, $0 < \alpha < n$, p — гармоническое среднее для $p_1, p_2, \dots, p_k > 1$ и q таково, что $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Тогда $I_{\Omega,\alpha}\mathbf{f}$, $M_{\Omega,\alpha}\mathbf{f}$ — ограниченные операторы из $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_k}(\mathbb{R}^n)$ в $L_q(\mathbb{R}^n)$ для $n/(n+\alpha) \le p < n/\alpha$ (равносильно $1 \le q < \infty$) и*

$$\|I_{\Omega,\alpha}\mathbf{f}\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \le C_1 \prod_{j=1}^k \|f_j\|_{L_{p_j}(\mathbb{R}^n)}, \quad \|M_{\Omega,\alpha}\mathbf{f}\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \le C_2 \prod_{j=1}^k \|f_j\|_{L_{p_j}(\mathbb{R}^n)},$$

где $C_1, C_2 > 0$ не зависят от f.

Замечание. Результат следствия 4 об операторе $I_{\Omega,\alpha}$ доказан в [2], если $\Omega \equiv 1$, и в [6], если $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $s > n/(n-\alpha)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Coifman R., Grafakos L.* Hardy space estimates for multilinear operators. I // Rev. Mat. Iberoamericana. 1992. V. 8, N 1. P. 45–68.
2. *Grafakos L.* On multilinear fractional integrals // Studia Math. 1992. V. 102, N 1. P. 49–56.
3. *Grafakos L.* Hardy space estimates for multilinear operators. II // Rev. Mat. Iberoamericana. 1992. V. 8, N 1. P. 69–92.
4. *Grafakos L., Kalton N.* Some remarks on multilinear maps and interpolation // Math. Ann. 2001. V. 319, N 1. P. 49–56.
5. *Kenig C. E., Stein E. M.* Multilinear estimates and fractional integration // Math. Res. Lett. 1999. V. 6, N 1. P. 1–15.
6. *Ding Y., Lu S.* The $\mathbf{f} \in L_{p_1} \times L_{p_2} \times \cdots \times L_{p_k}$ boundedness for some rough operators // J. Math. Anal. Appl. 1996. V. 203, N 1. P. 166–186.
7. *Kolyada V. I.* Rearrangements of functions and embedding of anisotropic spaces of Sobolev type // East J. Approx. 1999. V. 4, N 2. P. 111–119.
8. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. Boston: Acad. Press, 1988.
9. *O'Neil R.* Convolution operators and $L_{p,q}$-spaces // Duke Math. J. 1963. V. 30, N 1. P. 129–142.
10. *Barza S., Persson L. E., Soria J.* Sharp weighted multidimensional integral inequalities for monotone functions // Math. Nachr. 2000. V. 210, N 1. P. 43–58.

Статья поступила 17 октября 2005 г.

Гулиев Вагиф Сабир оглы
Institute of Mathematics and Mechanics
Academy of Sciences of Azerbaijan
F. Agayev St. 9, Baku, AZ 1141, Azerbaijan
vagif@guliyev.com

Назирова Шафагат Аликулу кызы
Khazar University,
11, Mehseti str., Az. 1096, Baku, Azerbaijan