Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 517.954+517.984.5

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ИСКРИВЛЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Н. В. Глотко

Аннотация. Описан существенный спектр оператора Лапласа, действующего на k-формах на одном классе искривленных произведений с двумерной базой.

Ключевые слова: оператор Лапласа, дифференциальная форма, искривленное произведение римановых многообразий, существенный спектр самосопряженного оператора.

1. Введение

Одним из наиболее важных глобальных инвариантов полного риманова многообразия является нижняя грань спектра оператора Лапласа. Оператор Лапласа на полном некомпактном многообразии M, заданный на гладких финитных функциях $C_0^\infty(M)$, самосопряжен в существенном и имеет единственное самосопряженное расширение на пространстве измеримых суммируемых с квадратом функций $L_2(M)$. В частности, представляет интерес исследование характера существенного спектра оператора Лапласа, тесно связанного с асимптотическим поведением кривизны и объема многообразия на бесконечности. Проблемой нахождения спектра оператора Лапласа на некомпактных многообразиях занимались многие авторы. В частности, в [1–5] изучался спектр оператора Лапласа — Бельтрами на функциях, в [6–8] — на дифференциальных формах.

В настоящей работе мы исследуем спектр оператора Лапласа — Бельтрами на одном специальном классе римановых субмерсий — искривленных (скрещенных) произведениях римановых многообразий [9–12]. Метрики искривленного произведения часто возникают при решении задач ОТО и теории струн. На многообразиях такого вида «работает» метод разделения переменных, что существенно облегчает задачу исследования спектра.

2. Метод разделения переменных на искривленных произведениях

Пусть M — гладкое n-мерное ориентируемое риманово многообразие, $\Lambda^k T^*M$ — k-я внешняя степень кокасательного расслоения T^*M над M. Сечения расслоения $\Lambda^k T^*M$ — это дифференциальные формы степени k на M.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–8526.2006.1) и при финансовой поддержке проекта INTAS № 03–51–3251 «Simplicial algebra, homology theories, K-theory and homotopy theory».

Риманова метрика многообразия M индуцирует на каждом слое $\Lambda^k T^* M_x$ скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$.

Будем использовать следующие обозначения для некоторых пространств сечений расслоения $\Lambda^k T^*M$: $C^\infty(\Lambda^k T^*M)$ — пространство всех гладких сечений расслоения $\Lambda^k T^*M$, $C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)$ — пространство гладких сечений с компактными носителями, лежащими в $\operatorname{int} M = M \setminus \partial M$, $L^k_{1,\mathrm{loc}}(M)$ — пространство тех дифференциальных форм степени k на M, представления которых в локальных картах многообразия M имеют локально интегрируемые коэффициенты, $L_2^k(M)$ — гильбертово пространство, снабженное скалярным произведением

$$\langle\omega_1,\omega_2\rangle_M = \int\limits_M \langle\omega_1,\omega_2\rangle_x d\mu_M = \int\limits_M \omega_1 \wedge *_M\omega_2,$$

где $*_M$ — оператор Ходжа (действие этого оператора на формах степени k будем обозначать через $*_M^k$), $d\mu_M$ — элемент риманова объема многообразия M; это пространство образовано всеми формами $\omega \in L^k_{1,\mathrm{loc}}(M)$, для которых $\|\omega\|_{L_2^k(M)} = \langle\omega,\omega\rangle_M^{\frac12} = \big(\int\limits_M |\omega|_x^2 d\mu_M\big)^{\frac12} < \infty$, причем

$$|\omega|_x^2 = g^{i_1j_1}\dots g^{i_kj_k}(x)\omega_{i_1\dots i_k}(x)\omega_{j_1\dots j_k}(x).$$

В дальнейшем мы будем иметь дело со следующими дифференциальными операторами, действующими в пространствах дифференциальных форм: $d_M^k : C_0^\infty(\Lambda^k T^*M) \to C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)$ — оператор внешнего дифференцирования, $\delta_M^k : C_0^\infty(\Lambda^k T^*M) \to C_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)$ — оператор кодифференцирования, формально сопряженный к оператору d_M^{k-1}, $\delta_M^k\omega = (-1)^{nk+n+1} *_M d_M^{n-k} *_M$.

При помощи операторов d_M и δ_M определяется оператор Лапласа на гладких формах степени p с компактными носителями:

$$\Delta_M^k\omega = \big(\delta_M^{k+1}d_M^k + d_M^{k-1}\delta_M^k\big)\omega.$$

Операторы d_M^k, δ_M^k и Δ_M^k допускают плотно определенные замкнутые продолжения с $C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)$ на пространства интегрируемых с квадратом форм $L_2^k(M)$. Мы будем обозначать эти продолжения теми же символами: $d_M^k : L_2^k(M) \to L_2^{k+1}(M)$, $\delta_M^k : L_2^k(M) \to L_2^{k-1}(M)$, $\Delta_M^k : L_2^k(M) \to L_2^k(M)$. Если многообразие M полно, то Δ_M^k — расширение по Фридрихсу оператора Лапласа, заданного на гладких формах с компактными носителями.

Нам понадобятся следующие известные факты спектральной теории оператора Лапласа на полных многообразиях [13].

Теорема 1. *Пусть M — связное замкнутое ориентируемое гладкое многообразие. Для любой римановой метрики g на M обозначим через $\Delta_g^k = dd^* + d^*d$ оператор Лапласа — Бельтрами, действующий на k-формах на M. Тогда*

(1) *спектр $\sigma\big(\Delta_g^k\big)$ оператора Δ_g^k состоит из неограниченной последовательности неотрицательных собственных значений*

$$0 < \lambda_{1,k}(g) \le \lambda_{2,k}(g) \dots \le \lambda_{m,k}(g) \to \infty;$$

эта последовательность начинается с нуля тогда и только тогда, когда k-е число Бетти $b_k(M)$ (в смысле гармонических форм) многообразия M отлично от нуля;

(2) *последовательность собственных k-форм оператора Δ_g^k, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_{m,k}(g)\}_{m\in\mathbb{N}}$, образует полный ортонормированный базис в $L_2^k(M)$.*

Теорема 2. *Пусть M — полное некомпактное риманово многообразие. Тогда $\sigma_{\mathrm{ess}}\bigl(\Delta^k_M\bigr) = \sigma_{\mathrm{ess}}\bigl(\bigl(\Delta^k_{M_1}\bigr)^{Fr}\bigr)$ для любого компакта $K \subset M$, где $M_1 = M \backslash \operatorname{int} K$, а $\bigl(\Delta^k_{M_1}\bigr)^{Fr}$ — расширение по Фридрихсу ограничения оператора Лапласа Δ^k_M на пространство гладких финитных k-форм с носителями в $\operatorname{int} M_1$.*

В дальнейшем будем предполагать, что многообразие M является полным искривленным (скрещенным) эйнштейновым произведением над двумерной базой, $M = \mathbb{R}^2 \times_{f^2} F$, где слой F — гладкое замкнутое многообразие, $\dim F = n-2$. Риманова метрика на M имеет вид $g_M = g_B + f^2 g_F$, где g_B — метрика на двумерной базе, f — положительная функция на базе, имеющая нужный порядок гладкости. F снабжено полной метрикой Эйнштейна g_F с $\hat{r}_0 = \hat{\lambda}_0 g_F$. Для таких многообразий существует классификация, а именно полные метрики Эйнштейна на искривленных произведениях с двумерной базой при $n > 3$ сводятся к метрикам следующих пяти типов, см., например, [9] (здесь (u, v) — декартовы, а (t, θ) — полярные координаты на базе $\mathbb{R}^2$):

(a) $g_M = du^2 + dv^2 + g_F$;

(b) $g_M = du^2 + e^{2u} dv^2 + e^{2u} g_F$;

(c) $g_M = du^2 + f'^2(u) dv^2 + f^2(u) g_F$, причем $f(0) = 1$, $f' > 0$, $f'^2 = -1 + f^2 + \frac{2(n-3)^{n-3}}{(n-1)^{n-1}} f^{3-n}$;

(d) $g_M = dt^2 + \frac{4f'^2(t)}{(n-3)^2} d\theta^2 + f^2(t) g_F$, причем $f(0) = 1$, $f' \geq 0$, $f'^2 = 1 - f^{3-n}$;

(e) $g_M = dt^2 + b^2 f'^2(t) d\theta^2 + f^2(t) g_F$, причем $f(0) = a$, $f' \geq 0$, $f'^2 = \frac{\hat{\lambda}_0}{n-3} + f^2 - \bigl(a^{n-1} + \frac{\hat{\lambda}_0}{n-3} a^{n-3}\bigr) f^{3-n}$, $\frac{1}{b} = \frac{n-1}{2} a + \frac{\hat{\lambda}_0}{2a}$, $a > 0$ при $\hat{\lambda}_0 \geq 0$, $a > \sqrt{\frac{-\hat{\lambda}_0}{n-3}}$ при $\hat{\lambda}_0 < 0$.

В настоящей работе мы исследуем характер существенного спектра метрик (a), (d) и (e).

Отметим сразу, что для вычисления непрерывной части спектра эйнштейновость слоя F несущественна, и можно считать в дальнейшем без ограничения общности, что F — просто гладкое замкнутое ориентируемое риманово многообразие. Однако поведение изолированных собственных значений бесконечной кратности зависит от топологии слоя. Мы надеемся исследовать этот вопрос позднее.

Получим сначала общие выражения для операторов d^k_M, δ^k_M, Δ^k_M, $*^k_M$ для метрик вида $g_M = dt^2 + g^2(t) ds^2 + \sigma^2(t) g_F$ на произвольном искривленном произведении $M = \mathbb{R}^2 \times_{(g,\sigma)} F$ с двумерной базой и искривляющими функциями $g(t)$ и $\sigma(t)$. Здесь t, s — координаты в базе.

Каждая дифференциальная форма на M может быть однозначно представлена в виде

$$\omega = \alpha_1 + \alpha_2 \wedge ds + \beta_1 \wedge dt + \beta_2 \wedge ds \wedge dt,$$

где α_1, α_2, β_1, β_2 — формы на M, не содержащие ds и dt. Формы α_1, α_2, β_1, β_2 можно считать формами на F, параметризованными двумя переменными s и t.

Имеем

$$\begin{aligned} d^k_M \omega = d^k_F \alpha_1 &+ \left[d^{k-1}_F \alpha_2 + (-1)^k \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} \right] \wedge ds + \left[d^{k-1}_F \beta_1 + (-1)^k \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \right] \wedge dt \\ &+ \left[d^{k-2}_F \beta_2 + (-1)^k \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + (-1)^{k-1} \frac{\partial \beta_1}{\partial s} \right] \wedge ds \wedge dt, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} *^k_M \omega = \sigma^{n-2k-2} g(*^k_F \alpha_1) \wedge ds \wedge dt &+ (-1)^{n-k-1} \sigma^{n-2k} g^{-1} \bigl(*^{k-1}_F \alpha_2\bigr) \wedge dt \\ &+ (-1)^{n-k} \sigma^{n-2k} g \bigl(*^{k-1}_F \beta_1\bigr) \wedge ds + \sigma^{n-2k+2} g^{-1} \bigl(*^{k-2}_F \beta_2\bigr), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\delta_M^k\omega = \left[\sigma^{-2}\delta_F^k\alpha_1 + \left\{(-1)^k\sigma^{2k-n}g^{-1}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k}g)\right\}\beta_1 \right.$$
$$\left. + (-1)^k\frac{\partial\beta_1}{\partial t} + g^{-2}(-1)^k\frac{\partial\alpha_2}{\partial s}\right] + \sigma^{-2}\delta_F^{k-2}\beta_2\wedge ds\wedge dt$$
$$+ \left[\sigma^{-2}\delta_F^{k-1}\alpha_2 + (-1)^k\left\{\sigma^{2k-n-2}g\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k+2}g^{-1})\right\}\beta_2 \right.$$
$$\left. + (-1)^k\frac{\partial\beta_2}{\partial t}\right]\wedge ds + \left[\sigma^{-2}\delta_F^{k-1}\beta_1 + (-1)^{k-1}g^{-2}\frac{\partial\beta_2}{\partial s}\right]\wedge dt. \quad (3)$$

Здесь $k = \deg\omega$. Тогда действие Δ_M^k на ω будет иметь следующий вид:

$$\Delta_M^k\omega = (\Delta_M\omega)_0 + (\Delta_M\omega)_1\wedge ds + (\Delta_M\omega)_2\wedge dt + (\Delta_M\omega)_3\wedge ds\wedge dt,$$

где

$$(\Delta_M\omega)_0 = \sigma^{-2}\Delta_F^k\alpha_1 - \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial s^2}$$
$$- \sigma^{2k-n+2}g^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k-2}g)\right\}\frac{\partial\alpha_1}{\partial t} + 2(-1)^k\sigma^{-1}\frac{\partial\sigma}{\partial t}d_F^{k-1}\beta_1, \quad (4)$$

$$(\Delta_M\omega)_1 = \sigma^{-2}\Delta_F^{k-1}\alpha_2 - \frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial s^2} - 2g^{-1}\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial\beta_1}{\partial s}$$
$$- \sigma^{2k-n}g\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k}g^{-1})\right\}\frac{\partial\alpha_2}{\partial t} + 2(-1)^k\sigma^{-1}\frac{\partial\sigma}{\partial t}d_F^{k-2}\beta_2, \quad (5)$$

$$(\Delta_M\omega)_2 = \sigma^{-2}\Delta_F^{k-1}\beta_1 - \frac{\partial^2\beta_1}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2\beta_1}{\partial s^2}$$
$$- \sigma^{2k-n}g^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k}g)\right\}\frac{\partial\beta_1}{\partial t} + \left(\frac{2}{g^3}\frac{\partial g}{\partial t}\right)\frac{\partial\alpha_2}{\partial s}$$
$$- \frac{\partial}{\partial t}\left[\sigma^{2k-n}g^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k}g)\right\}\right]\beta_1 + (-1)^{k-1}\frac{\partial(\sigma^{-2})}{\partial t}\delta_F^k\alpha_1, \quad (6)$$

$$(\Delta_M\omega)_3 = \sigma^{-2}\Delta_F^{k-2}\beta_2 - \frac{\partial^2\beta_2}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2\beta_2}{\partial s^2}$$
$$- \sigma^{2k-n-2}g\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k+2}g^{-1})\right\}\frac{\partial\beta_2}{\partial t}$$
$$- \frac{\partial}{\partial t}\left[\sigma^{2k-n-2}g\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k+2}g^{-1})\right\}\right]\beta_2 + (-1)^{k-1}\frac{\partial(\sigma^{-2})}{\partial t}\delta_F^{k-1}\alpha_2. \quad (7)$$

Для дальнейшего анализа нам потребуется следующее

Предложение 1. *Пусть F — гладкое многообразие, $\dim F = n$ и*

$$0 \to C^\infty(F) \xrightarrow{d} C^\infty(\Lambda T^*F) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} C^\infty(\Lambda^n T^*F) \to 0$$

— комплекс де Рама гладких форм на F. Тогда для каждого k, $1 \le k \le n-1$, имеет место следующее разложение:

$$C^\infty(\Lambda^k T^*F) = dC^\infty(\Lambda^{k-1}T^*F) \oplus \delta C^\infty(\Lambda^{k+1}T^*F) \oplus \mathscr{H}^k F;$$

$$L_2^k(F) = \overline{dC^\infty(\Lambda^{k-1}T^*F)} \oplus \overline{\delta C^\infty(\Lambda^{k+1}T^*F)} \oplus \mathscr{H}^k F,$$

где замыкания берутся в норме L_2, $\mathscr{H}^k F$ — пространство гармонических форм на F.

Таким образом, для каждой формы $\omega \in L_2^k(\mathbb{R}^2 \times_{f^2} F)$ можно написать следующее разложение (здесь $0 \le k \le n$):

$$\omega = \alpha_{1\delta} \oplus (\alpha_{1d} + \alpha_{2\delta} \wedge ds + \beta_{1\delta} \wedge dt) \oplus (\alpha_{2d} \wedge ds + \beta_{1d} \wedge dt + \beta_{2\delta} \wedge ds \wedge dt) \oplus \beta_{2d} \wedge ds \wedge dt. \quad (8)$$

Здесь α_{1d}, α_{2d}, β_{1d}, β_{2d} — замкнутые формы на F, параметризованные переменными t, s; $\alpha_{1\delta}$, $\alpha_{2\delta}$, $\beta_{1\delta}$, $\beta_{2\delta}$ — ко-замкнутые формы на F, параметризованные переменными t, s; $\deg \alpha_{1d} = \deg \alpha_{1\delta} = k$, $\deg \alpha_{2d} = \deg \beta_{1d} = \deg \alpha_{2\delta} = \deg \beta_{1\delta} = k-1$, $\deg \beta_{2\delta} = \deg \beta_{2d} = k-2$.

Имеем (ортогональное) разложение пространства $L_2^k(\mathbb{R}^2 \times_{f^2} F)$:

$$L_2^k(\mathbb{R}^2 \times_{f^2} F) = \mathfrak{M}_1^k(\mathbb{R}^2 \times_{f^2} F) \oplus \mathfrak{M}_2^k(\mathbb{R}^2 \times_{f^2} F) \oplus \mathfrak{M}_2^{k*}(\mathbb{R}^2 \times_{f^2} F) \oplus \mathfrak{M}_1^{k*}(\mathbb{R}^2 \times_{f^2} F) \quad (9)$$

в соответствии с разложением (8).

Перестановочные соотношения

$$d_F^k \Delta_F^k = \Delta_F^{k+1} d_F^k; \quad \delta_F^k \Delta_F^k = \Delta_F^{k-1} \delta_F^k; \quad \frac{\partial}{\partial t} d_F^k = d_F^k \frac{\partial}{\partial t};$$

$$\frac{\partial}{\partial s} d_F^k = d_F^k \frac{\partial}{\partial s}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \delta_F^k = \delta_F^k \frac{\partial}{\partial t}; \quad \frac{\partial}{\partial s} \delta_F^k = \delta_F^k \frac{\partial}{\partial s}$$

дают разложение

$$\left(\Delta_M^k\right)^{Fr} = \left(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^k\right)^{Fr} \oplus \left(\Delta_{\mathfrak{M}_2}^k\right)^{Fr} \oplus \left(\Delta_{\mathfrak{M}_2^*}^k\right)^{Fr} \oplus \left(\Delta_{\mathfrak{M}_1^*}^k\right)^{Fr}, \quad (9')$$

где символ Fr означает расширение по Фридрихсу соответствующего оператора с $C_0^\infty(\Lambda^k T^*(\mathbb{R}^2 \times_{f^2} F)) \cap \mathfrak{M}_i$ и с $C_0^\infty(\Lambda^k T^*(\mathbb{R}^2 \times_{f^2} F)) \cap \mathfrak{M}_i^*$ соответственно. Таким образом, разложение (9) приводит оператор Лапласа.

Имеем

$$\left(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^k\right)\alpha_{1\delta} = \sigma^{-2}\Delta_F^k \alpha_{1\delta} - \frac{\partial^2 \alpha_{1\delta}}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2 \alpha_{1\delta}}{\partial s^2} - \sigma^{2k-n+2} g^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k-2} g)\right\}\frac{\partial \alpha_{1\delta}}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
\left(\Delta_{\mathfrak{M}_2}^k\right)(\alpha_{1d} + \alpha_{2\delta} \wedge ds + \beta_{1\delta} \wedge dt) = \Bigg[\sigma^{-2}\Delta_F^k \alpha_{1d} - \frac{\partial^2 \alpha_{1d}}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2 \alpha_{1d}}{\partial s^2} \\
- \sigma^{2k-n+2} g^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k-2} g)\right\}\frac{\partial \alpha_{1d}}{\partial t} + 2(-1)^k \sigma^{-1}\frac{\partial \sigma}{\partial t} d_F^{k-1}\beta_{1\delta}\Bigg] \\
+ \Bigg[\sigma^{-2}\Delta_F^{k-1}\alpha_{2\delta} - \frac{\partial^2 \alpha_{2\delta}}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2 \alpha_{2\delta}}{\partial s^2} - 2g^{-1}\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial \beta_{1\delta}}{\partial s} \\
- \sigma^{2k-n} g\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma^{n-2k} g^{-1}\right)\right\}\frac{\partial \alpha_{2\delta}}{\partial t}\Bigg] \wedge ds + \Bigg[\sigma^{-2}\Delta_F^{k-1}\beta_{1\delta} - \frac{\partial^2 \beta_{1\delta}}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2 \beta_{1\delta}}{\partial s^2} \\
- \sigma^{2k-n} g^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma^{n-2k} g\right)\right\}\frac{\partial \beta_{1\delta}}{\partial t} + \left(\frac{2}{g^3}\frac{\partial g}{\partial t}\right)\frac{\partial \alpha_{2\delta}}{\partial s} \\
- \frac{\partial}{\partial t}\left[\sigma^{2k-n} g^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma^{n-2k} g\right)\right\}\right]\beta_{1\delta} + (-1)^{k-1}\frac{\partial(\sigma^{-2})}{\partial t}\delta_F^k \alpha_{1d}\Bigg] \wedge dt. \quad (11)
\end{aligned}$$

Оператор Ходжа $*$ изометрически отображает пространство k-форм $\mathfrak{M}_1$ вида $\alpha_{1\delta}$ на пространство форм $\mathfrak{M}_1^*$ вида $\beta_{2d}\wedge ds\wedge dt$, а пространство форм $\mathfrak{M}_2$ вида $\alpha_{1d}+\alpha_{2\delta}\wedge ds+\beta_{1\delta}\wedge dt$ — на пространство форм $\mathfrak{M}_2^*$ вида $\alpha_{2d}\wedge ds+\beta_{1d}\wedge dt+\beta_{2\delta}\wedge ds\wedge dt$.

Поэтому для вычисления спектра оператора $\left(\Delta_M^k\right)^{Fr}$ достаточно понять, как устроены спектры операторов $\left(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^k\right)^{Fr}$ и $\left(\Delta_{\mathfrak{M}_2}^k\right)^{Fr}$. Учитывая разложение $(9')$, имеем для спектра оператора Лапласа следующее представление:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\left(\left(\Delta_M^k\right)_{Fr}\right)=\bigcup_{i=1}^{2}\sigma_{\mathrm{ess}}\left(\left(\Delta_{\mathfrak{M}_i}^k\right)^{Fr}\right). \tag{11$'$}$$

Поскольку многообразие F замкнуто, спектры операторов Δ_F^k для $0\le k\le n-2$ дискретны и для любого $k\in\overline{0,n-2}$ имеется (полный) ортонормированный базис в $L_2^k(F)$ собственных форм $\{b_{1q}\}$ оператора Δ_F^k, отвечающих собственным значениям $\left\{\lambda_q^k\right\}$ [14, 15], таких, что $\delta_F^k b_{1q}=0$. Мы можем разложить форму $\alpha_{1\delta}$ по этому базису:

$$\alpha_{1\delta}=\bigoplus_q u_q(s,t)b_{1q},\quad u_q(s,t)b_{1q}\in L_2^k(\mathbb{R}^2\times_{f^2}F). \tag{12}$$

Эта сумма ортогональна в пространстве $L_2^k(\mathbb{R}^2\times_{f^2}F)$.

Для каждого q имеем

$$\begin{aligned}\left(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^k\right)(u_q(s,t)b_{1q})=\lambda_q^k\sigma^{-2}u_q(s,t)b_{1q}-\frac{\partial^2u_q(s,t)}{\partial t^2}b_{1q}-g^{-2}\frac{\partial^2u_q(s,t)}{\partial s^2}b_{1q}\\ -\sigma^{2k-n+2}g^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k-2}g)\right\}\frac{\partial u_q(s,t)}{\partial t}b_{1q}.\end{aligned} \tag{13}$$

Для форм ω вида $u_q(s,t)b_{1q}$ L_2-норма имеет вид

$$\|\omega\|^2_{L_2^k(\mathbb{R}^2\times_{f^2}F)}=\iint_{\mathbb{R}^2}g(t)\sigma^{n-2k-2}(t)|u_q(s,t)|^2\,dsdt. \tag{14}$$

Оператор $\left(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^k\right)^{Fr}$ унитарно эквивалентен прямой сумме расширений по Фридрихсу $(\Delta_{0\lambda_q^k})^{Fr}$ операторов

$$\begin{gathered}\Delta_{0\lambda_q^k}:C_0^\infty(\mathbb{R}^2)\to L_2(\mathbb{R}^2,g\sigma^{n-2k-2}),\\ \Delta_{0\lambda_q^k}u=\lambda_q^k\sigma^{-2}u-\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-g^{-2}\frac{\partial^2u}{\partial s^2}-\sigma^{2k-n+2}g^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k-2}g)\right\}\frac{\partial u}{\partial t}.\end{gathered} \tag{15}$$

Рассмотрим следующее унитарное преобразование:

$$U_0:L_2(\mathbb{R}^2,g\sigma^{n-2k-2})\to L_2(\mathbb{R}^2),\quad U_0(u)=g^{\frac12}\sigma^{\frac{n-2k-2}{2}}u.$$

Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}C_0^\infty(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{U_0} & C_0^\infty(\mathbb{R}^2)\\ {\scriptstyle\Delta_{0\lambda_q^k}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle D_{0k}^q}\\ L_2(\mathbb{R}^2,g\sigma^{n-2k-2}) & \xrightarrow[U_0]{} & L_2(\mathbb{R}^2).\end{array}$$

Оператор $\left(D_{0k}^{q}\right)^{Fr}$ унитарно эквивалентен оператору $(\Delta_{0\lambda_q^k})^{Fr}$.

Имеем

$$D_{0k}^{q}u = \left(U_0\Delta_{0\lambda_q^k}U_0^{-1}\right)u = \lambda_q^k\sigma^{-2}u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \left[\frac{1}{2}g^{-1}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right.$$
$$- \frac{(2k-n+2)}{2}\sigma^{-1}\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} + \frac{(n-2k-2)(n-2k-4)}{4}\sigma^{-2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)^2$$
$$\left. - \frac{1}{4}g^{-2}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 - \frac{(2k-n+2)}{2}\sigma^{-1}g^{-1}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t}\right]u. \quad (16)$$

Справедливо включение

$$\bigcup_{q=0}^{\infty}\sigma_{\mathrm{ess}}\left(\left(D_{0k}^{q}\right)^{Fr}\right) \subseteq \sigma_{\mathrm{ess}}\left(\left(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^{k}\right)^{Fr}\right) \quad (16')$$

Аналогично формы вида $\omega = \alpha_{1d} + \alpha_{2\delta}\wedge ds + \beta_{1\delta}\wedge dt$ допускают разложения

$$\omega = \sum_q\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_q^{k-1}}}u_q(s,t)d_F^{k-1}c_{3q} + (-1)^k v_q(s,t)c_{3q}\wedge ds + (-1)^k w_q(s,t)c_{3q}\wedge dt\right),$$

где $\{c_{3q}\}$ — ортонормированный базис собственных для оператора Δ_F^{k-1} козамкнутых форм степени $k-1$, соответствующих собственным значениям $\left\{\lambda_q^{k-1}\right\}$, и, как нетрудно проверить, $\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_q^{k-1}}}d_F^{k-1}c_{3q}\right\}$ — ортонормированный базис замкнутых форм на F, соответствующих собственным значениям $\left\{\lambda_q^{k-1}\right\}$. Для каждого q имеем

$$\Delta_{\mathfrak{M}_2}^{k}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_q^{k-1}}}u_q d_F^{k-1}c_{3q} + (-1)^k v_q c_{3q}\wedge ds + (-1)^k w_q c_{3q}\wedge dt\right)$$
$$= \Delta_{\mathfrak{M}_2,1}^{k}(u_q,v_q,w_q) + \Delta_{\mathfrak{M}_2,2}^{k}(u_q,v_q,w_q)\wedge ds + \Delta_{\mathfrak{M}_2,3}^{k}(u_q,v_q,w_q)\wedge dt,$$

$$\Delta_{\mathfrak{M}_2,1}^{k}(u_q,v_q,w_q) = \left[\sigma^{-2}\lambda_q^{k-1}u_q - \frac{\partial^2 u_q}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2 u_q}{\partial s^2}\right.$$
$$\left. - \sigma^{2k-n+2}g^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k-2}g)\right\}\frac{\partial u_q}{\partial t} + 2\sigma^{-1}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\sqrt{\lambda_q^{k-1}}w_q\right]\frac{1}{\sqrt{\lambda_q^{k-1}}}d_F^{k-1}c_{3q}, \quad (17)$$

$$\Delta_{\mathfrak{M}_2,2}^{k}(u_q,v_q,w_q) = \left[\sigma^{-2}\lambda_q^{k-1}v_q - \frac{\partial^2 v_q}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2 v_q}{\partial s^2}\right.$$
$$\left. -\sigma^{2k-n}g\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k}g^{-1})\right\}\frac{\partial v_q}{\partial t} - 2g^{-1}\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial w_q}{\partial s}\right](-1)^k c_{3q}, \quad (18)$$

$$\Delta_{\mathfrak{M}_2,3}^{k}(u_q,v_q,w_q) = \left[\sigma^{-2}\lambda_q^{k-1}w_q - \frac{\partial^2 w_q}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2 w_q}{\partial s^2}\right.$$
$$- \sigma^{2k-n}g^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k}g)\right\}\frac{\partial w_q}{\partial t} + \left(\frac{2}{g^3}\frac{\partial g}{\partial t}\right)\frac{\partial v_q}{\partial s}$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma^{2k-n}g^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k}g)\right\}\right)w_q - \sqrt{\lambda_q^{k-1}}\frac{\partial(\sigma^{-2})}{\partial t}u_q\right](-1)^k c_{3q}. \quad (19)$$

Как и ранее, для форм вида

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda_q^{k-1}}} u_q d_F^{k-1} c_{3q} + (-1)^k v_q c_{3q} \wedge ds + (-1)^k w_q c_{3q} \wedge dt$$

L_2-норма записывается как

$$\|\omega\|^2_{L_2^k(\mathbb{R}^2 \times_{f^2} F)} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(t)\sigma^{n-2k-2}(t)|u_q(s,t)|^2\, dsdt$$
$$+ \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g^{-1}(t)\sigma^{n-2k}(t)|v_q(s,t)|^2 dsdt + \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(t)\sigma^{n-2k}(t)|w_q(s,t)|^2\, dsdt. \quad (20)$$

Таким образом, оператор $\left(\Delta^k_{\mathfrak{M}_2}\right)^{Fr}$ унитарно эквивалентен прямой сумме расширений по Фридрихсу $\left(\Delta^k_{1\lambda_q^{k-1}}\right)^{Fr}$ операторов

$$\Delta^k_{1\lambda_q^{k-1}} : C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$
$$\to L_2(\mathbb{R}^2, g\sigma^{n-2k-2}) \oplus L_2(\mathbb{R}^2, g^{-1}\sigma^{n-2k}) \oplus L_2(\mathbb{R}^2, g\sigma^{n-2k}),$$

$$\Delta_{1\lambda_q^{k-1}}\{u,v,w\} = \Bigg\{\sigma^{-2}\lambda_q^{k-1}u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$
$$- \sigma^{2k-n+2}g^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k-2}g)\right\}\frac{\partial u}{\partial t} + 2\sigma^{-1}\frac{\partial \sigma}{\partial t}\sqrt{\lambda_q^{k-1}}w,$$
$$\sigma^{-2}\lambda_q^{k-1}v - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \sigma^{2k-n}g\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k}g^{-1})\right\}\frac{\partial v}{\partial t} - 2g^{-1}\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial s}, \quad (21)$$
$$\sigma^{-2}\lambda_q^{k-1}w - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \sigma^{2k-n}g^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k}g)\right\}\frac{\partial w}{\partial t} + \left(\frac{2}{g^3}\frac{\partial g}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial s}$$
$$- \frac{\partial}{\partial t}\left[\sigma^{2k-n}g^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^{n-2k}g)\right\}\right]w - \sqrt{\lambda_q^{k-1}}\frac{\partial(\sigma^{-2})}{\partial t}u\Bigg\}.$$

В данном случае возьмем следующую изометрию:

$$\mathbf{U}_1 : \quad \begin{matrix} L_2(\mathbb{R}^2, g\sigma^{n-2k-2}) \\ \oplus \\ L_2(\mathbb{R}^2, g^{-1}\sigma^{n-2k}) \\ \oplus \\ L_2(\mathbb{R}^2, g\sigma^{n-2k}) \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} L_2(\mathbb{R}^2) \\ \oplus \\ L_2(\mathbb{R}^2) \\ \oplus \\ L_2(\mathbb{R}^2), \end{matrix}$$

$$\mathbf{U}_1(u,v,w) = (g^{\frac{1}{2}}\sigma^{\frac{n-2k-2}{2}}u, g^{-\frac{1}{2}}\sigma^{\frac{n-2k}{2}}v, g^{\frac{1}{2}}\sigma^{\frac{n-2k}{2}}w).$$

Имеем матричный дифференциальный оператор $\mathbf{D}^q_{1k}$, расширение по Фридрихсу которого $\left(\mathbf{D}^q_{1k}\right)^{Fr}$ унитарно эквивалентно оператору $(\Delta_{1\lambda^q_{k-1}})^{Fr}$:

$$\mathbf{D}^q_{1k}\{u,v,w\} = \left(\mathbf{U}_1(\Delta_{1\lambda^q_{k-1}})^{Fr}\mathbf{U}_1^{-1}\right)\{u,v,w\}$$
$$= \left\{\left(D^q_{1k}\right)_1\{u,v,w\}, \left(D^q_{1k}\right)_2\{u,v,w\}, (D^q_{1k})_3\{u,v,w\}\right\},$$

где

$$\left(D^q_{1k}\right)_1\{u,v,w\} = \sigma^{-2}\lambda_q^{k-1}u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \Bigg[\frac{1}{2}g^{-1}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

$$- \frac{(2k-n+2)}{2}\sigma^{-1}\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} - \frac{1}{4}g^{-2}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 - \frac{(2k-n+2)}{2}\sigma^{-1}g^{-1}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)$$

$$+ \frac{(2k-n+2)(2k-n+4)}{4}\sigma^{-2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)^2\Bigg]u + 2\sqrt{\lambda_q^{k-1}}\left(\sigma^{-2}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)w, \quad (22)$$

$$\big(D^q_{1k}\big)_2\{u,v,w\} = \sigma^{-2}\lambda_q^{k-1}v - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \Bigg[\frac{1}{2}g^{-1}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

$$+ \frac{(2k-n)}{2}\sigma^{-1}\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} - \frac{3}{4}g^{-2}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 - \frac{(2k-n)}{2}\sigma^{-1}g^{-1}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)$$

$$- \frac{(2k-n)(2k-n+2)}{4}\sigma^{-2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)^2\Bigg]v - 2g^{-2}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial s}, \quad (23)$$

$$\big(D^q_{1k}\big)_3\{u,v,w\} = \sigma^{-2}\lambda_q^{k-1}w - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - g^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \Bigg[\frac{1}{2}g^{-1}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

$$- \frac{(2k-n)}{2}\sigma^{-1}\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} + \frac{(2k-n)}{2}\sigma^{-1}g^{-1}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)$$

$$- \frac{3}{4}g^{-2}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 - \frac{(2k-n)(2k-n-2)}{4}\sigma^{-2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)^2\Bigg]w$$

$$+ 2g^{-2}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial s} + 2\sqrt{\lambda_q^{k-1}}\left(\sigma^{-2}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)u. \quad (24)$$

Имеем включение

$$\bigcup_{q=0}^{\infty}\sigma_{\mathrm{ess}}\big((\mathbf{D}^q_{1k})^{Fr}\big) \subseteq \sigma_{\mathrm{ess}}\big((\Delta^k_{\mathfrak{M}_2})^{Fr}\big). \quad (24')$$

Таким образом, исследование спектра оператора Лапласа на искривленном произведении с двумерной базой сводится к изучению спектров двух дифференциальных операторов — скалярного оператора D^q_{0k} и матричного оператора $\mathbf{D}^q_{1k}$. Заметим еще, что в силу теоремы 2 $\sigma_{\mathrm{ess}}\big((\Delta^k_M)^{Fr}\big) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\Delta^k_{M_1})$, где $M_1 = B^2 \times_{f^2} F$, $B^2 = \mathbb{R}^2 \setminus B^2(0,R)$ а $\Delta^k_{M_1}$ — расширение по Фридрихсу оператора Лапласа на M_1 с множества гладких финитных форм с носителями в $\operatorname{int} M_1$. Поэтому достаточно ограничиться анализом поведения существенных спектров операторов D^q_{0k} и $\mathbf{D}^q_{1k}$ на $B^2 = S^1 \times [R, +\infty)$ с достаточно большим R.

3. Существенный спектр метрик типов (a) и (d)

Запишем теперь операторы (16) и (22)–(24) в случае интересующих нас метрик.

Для метрики типа (a) ($g \equiv 1, \sigma \equiv 1$) имеем

$$\begin{aligned}
D^q_{0k}u &= \lambda^k_q u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial s^2},\\
\big(D^q_{1k}\big)_1\{u,v,w\} &= D^q_{0k-1}u = \lambda^{k-1}_q u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial s^2},\\
\big(D^q_{1k}\big)_2\{u,v,w\} &= D^q_{0k-1}v = \lambda^{k-1}_q v - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial s^2},\\
\big(D^q_{1k}\big)_3\{u,v,w\} &= D^q_{0k-1}w = \lambda^{k-1}_q w - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}.
\end{aligned} \quad (25)$$

Метрики типа (d) и (e) допускают дальнейшую редукцию уравнений. Разлагая функции $u(t,\theta)$, $v(t,\theta)$ и $w(t,\theta)$ по собственным функциям $e^{il\theta}$ оператора Лапласа на S^1 (здесь мы переобозначили $s=\theta$) и полагая $g(t)=bf'(t)$, $\sigma(t)=f(t)$, получим $\big(\Delta^k_{\mathfrak{M}_1}\big)^{Fr}\sim_u\bigoplus\limits_{q,l=0}^{+\infty}\big(D^{ql}_{0k}\big)^{Fr}$ и $\big(\Delta^k_{\mathfrak{M}_2}\big)^{Fr}\sim_u\bigoplus\limits_{q,l=0}^{+\infty}\big(\mathbf{D}^{ql}_{1k}\big)^{Fr}$, где

$$D^{ql}_{0k}u=\frac{1}{f^2}\lambda^k_q u-\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{l^2}{(bf')^2}u+\bigg[\frac12\frac{f'''}{f'}+(n-2k-2)\frac{f''}{f}\\ -\frac14\left(\frac{f''}{f'}\right)^2+\frac{(n-2k-2)(n-2k-4)}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2\bigg]u,$$

$$\big(D^{ql}_{1k}\big)_1\{u,v,w\}=\frac{1}{f^2}\lambda^{k-1}_q u-\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{l^2}{(bf')^2}u\\ +\bigg[\frac12\frac{f'''}{f'}-\frac14\left(\frac{f''}{f'}\right)^2+\frac{(n-2k-2)(n-2k-4)}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2+(n-2k-2)\frac{f''}{f}\bigg]u\\ +2\sqrt{\lambda^{k-1}_q}\left(\frac{f'}{f^2}\right)w; \tag{26}$$

$$\big(D^{ql}_{1k}\big)_2\{u,v,w\}=\frac{1}{f^2}\lambda^{k-1}_q v-\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{l^2}{(bf')^2}v\\ -\bigg[\frac12\frac{f'''}{f'}-\frac34\left(\frac{f''}{f'}\right)^2-\frac{(n-2k)(n-2k-2)}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2\bigg]v-\frac{2il}{b}\left(\frac{f''}{f'^2}\right)w;$$

$$\big(D^{ql}_{1k}\big)_3\{u,v,w\}=\frac{1}{f^2}\lambda^{k-1}_q w-\frac{d^2w}{dt^2}+\frac{l^2}{(bf')^2}w-\bigg[\frac12\left(\frac{f'''}{f'}\right)-\frac34\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\\ -\frac{(n-2k)(n-2k+2)}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2\bigg]w+\frac{2il}{b}\left(\frac{f''}{f'^2}\right)v+2\sqrt{\lambda^{k-1}_q}\left(\frac{f'}{f^2}\right)u$$

или, в матричном виде,

$$\mathbf{D}^{ql}_{1k}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{D}^{ql}_{0,k} & 0 & 2\big(\frac{f'}{f^2}\big)\sqrt{\lambda^{k-1}_q}\\ 0 & \widehat{D}^{ql}_{0,k} & -\frac{2il}{b}\big(\frac{f''}{f'^2}\big)\\ 2\big(\frac{f'}{f^2}\big)\sqrt{\lambda^{k-1}_q} & \frac{2il}{b}\big(\frac{f''}{f'^2}\big) & \widehat{D}'^{\,ql}_{0,k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}.$$

Приступим к основной задаче — нахождению существенного спектра. Отметим сразу, что в силу (16′) и (24′)

$$\bigcup_{q=0}^{\infty}\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\mathbf{D}^q_{1k}\big)^{Fr}\big)\cup\bigcup_{q=0}^{\infty}\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(D^q_{0k}\big)^{Fr}\big)\subseteq\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\Delta^k_M\big)^{Fr}\big). \tag{27}$$

Предложение 2. *Для метрики вида* (a)

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\Delta^k_M\big)^{Fr}\big)=\big[\min_q\{\lambda^k_q,\lambda^{k-1}_q\},+\infty\big).$$

В частности, если $\mathscr{H}^kF\neq0$ *или* $\mathscr{H}^{k-1}F\neq0$, *то* $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\Delta^k_M\big)^{Fr}\big)=[0,+\infty)$.

Для метрики вида (d) $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\Delta_M^k\big)^{Fr}\big) = [0, +\infty)$ *при любом* $k \in \overline{0, n}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала метрику (d). При $n = 4$ она представляет собой риманов аналог метрики Шварцшильда (в случае, когда $F = S^2$). Во-первых, заметим, что $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\Delta_M^k\big)^{Fr}\big) \subseteq [0, +\infty)$ всегда в силу положительной определенности оператора Лапласа — Бельтрами.

Метрика типа (d) имеет вид

$$g_M = dt^2 + \frac{4f'^2(t)}{(n-3)^2} d\theta^2 + f^2(t) g_F,$$

причем $f(0) = 1$, $f' \geq 0$, $f'^2 = 1 - f^{3-n}$, $f'' = \frac{(n-3)}{2}\frac{1}{f^{n-2}}$, $f''' = -\frac{(n-2)(n-3)}{2}\big(\frac{f'}{f^{n-1}}\big)$. Как нетрудно убедиться, $f' > 0$, если $t \neq 0$, $f'' > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} f' = 1$, $\lim\limits_{t\to\infty}\big(\frac{f'''}{f'}\big) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\big(\frac{f''}{f}\big) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\big(\frac{f''}{f'}\big)^2 = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\big(\frac{f'}{f}\big)^2 = 0$. Оператор D_{0k}^{ql} в данном случае имеет вид $-\frac{d^2}{dt^2} + V_{ql,k}(t)$, где потенциал

$$V_{ql,k}(t) = \frac{(n-3)^2 l^2}{4f'^2(t)} + \frac{1}{f^2}\lambda_q^k + \frac{1}{2}\frac{f'''}{f'} + (n-2k-2)\frac{f''}{f} - \frac{1}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 + \frac{(n-2k-2)(n-2k-4)}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2$$

— непрерывная ограниченная на $[R, +\infty)$ функция, $\lim\limits_{t\to\infty} V_{ql,k}(t) = 0$.

Как известно из общей теории операторов Шредингера [16, 17],

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(D_{0k}^{q0}\big)^{Fr}\big) = [0, +\infty).$$

В силу (27) имеем $[0, +\infty) = \sigma_{\mathrm{ess}}\big(D_{0k}^{q0}\big)^{Fr} \subseteq \sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\Delta_M^k\big)^{Fr}\big)$. Поэтому

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\Delta_M^k\big)^{Fr}\big) = [0, +\infty).$$

В случае метрики типа (a) операторы D_{0k}^q и $\mathbf{D}_{0k}^q$ имеют вид (25). Оператор $\big(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^k\big)^{Fr}$ унитарно эквивалентен прямой сумме $\bigoplus\limits_q \big(D_{0k}^q\big)^{Fr}$, а оператор $\big(\Delta_{\mathfrak{M}_2}^k\big)^{Fr}$ — прямой сумме $\bigoplus\limits_q \big(\mathbf{D}_{1k}^q\big)^{Fr}$. Имеем

$$\big[\min_q\{\lambda_q^k, \lambda_q^{k-1}\}, +\infty\big) \subseteq \sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\Delta_M^k\big)^{Fr}\big).$$

С другой стороны, как нетрудно видеть, операторы $\big(D_{0k}^q\big)^{Fr}$ и $\big(\mathbf{D}_{1k}^q\big)^{Fr}$ не имеют собственных значений для любого k. Отсюда получаем точное равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\Delta_M^k\big)^{Fr}\big) = \big[\min\limits_q\{\lambda_q^k, \lambda_q^{k-1}\}, +\infty\big)$. Предложение доказано.

4. Существенный спектр метрик типа (e)

Лемма 1. *Для метрик типа* (e)

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^k\big)^{Fr}\big) = [((n-2k-1)/2)^2, +\infty),\ \sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\Delta_{\mathfrak{M}_1^*}^k\big)^{Fr}\big) = [((n-2k+1)/2)^2, +\infty).$$

при любом k.

Доказательство. Метрика (e) имеет вид

$$g_M = dt^2 + b^2 f'^2(t) d\theta^2 + f^2(t) g_F,$$

причем $f(0)=a$, $f'\geq 0$, $f'^2=\frac{\hat\lambda_0}{n-3}+f^2-\bigl(a^{n-1}+\frac{\hat\lambda_0}{n-3}a^{n-3}\bigr)f^{3-n}$, $\frac{1}{b}=\frac{n-1}{2}a+\frac{\hat\lambda_0}{2a}$, $a>0$ при $\hat\lambda_0\geq 0$, $a>\sqrt{\frac{-\hat\lambda_0}{n-3}}$ при $\hat\lambda_0<0$, $f''=f+\frac{(n-3)}{2}\bigl(a^{n-1}+\frac{\hat\lambda_0}{n-3}a^{n-3}\bigr)\frac{1}{f^{n-2}}$, $f'''=f'-\frac{(n-2)(n-3)}{2}\bigl(a^{n-1}+\frac{\hat\lambda_0}{n-3}a^{n-3}\bigr)\bigl(\frac{f'}{f^{n-1}}\bigr)$.

Как и в доказательстве предложения 2, нетрудно убедиться, что $f'>0$, если $t\neq 0$, $f''>0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\bigl(\frac{f'''}{f'}\bigr)=1$, $\lim\limits_{t\to\infty}\bigl(\frac{f''}{f}\bigr)=1$, $\lim\limits_{t\to\infty}\bigl(\frac{f''}{f'}\bigr)^2=1$, $\lim\limits_{t\to\infty}\bigl(\frac{f'}{f}\bigr)^2=1$, $\lim\limits_{t\to\infty}\bigl(\frac{f'}{f^2}\bigr)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\bigl(\frac{f''}{f'^2}\bigr)=0$. Оператор D_{0k}^{ql} в данном случае имеет вид $-\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{f^2}\lambda_q^k+\frac{l^2}{b^2f'^2(t)}+V_k(t)$, где потенциал

$$V_k(t)=\frac{1}{2}\frac{f'''}{f'}+(n-2k-2)\frac{f''}{f}-\frac{1}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2+\frac{(n-2k-2)(n-2k-4)}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2$$

— непрерывная ограниченная на $[R,+\infty)$ функция, $\lim\limits_{t\to\infty}V_k(t)=\bigl(\frac{n-2k-1}{2}\bigr)^2$. Поскольку оператор $\bigl(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^k\bigr)^{Fr}$ унитарно эквивалентен прямой сумме $\bigoplus\limits_{q,l=0}^{+\infty}\bigl(D_{0k}^{ql}\bigr)^{Fr}$, согласно общей теории операторов Шредингера имеем

$$[((n-2k-1/2))^2,+\infty)=\sigma_{\mathrm{ess}}\bigl(\bigl(D_{0k}^{q0}\bigr)^{Fr}\bigr)\subseteq\sigma_{\mathrm{ess}}\bigl(\bigl(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^k\bigr)^{Fr}\bigr).$$

Докажем обратное включение. Пусть $\lambda<\bigl(\frac{n-2k-1}{2}\bigr)^2$. Тогда $\lambda\notin\sigma_{\mathrm{ess}}\bigl(\bigl(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^k\bigr)^{Fr}\bigr)$. Действительно, $\bigl(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^k\bigr)^{Fr}\sim_u\bigoplus\limits_{q,l=0}^{+\infty}\bigl(D_{0k}^{ql}\bigr)^{Fr}$, где символ $\sim_u$ означает унитарную эквивалентность. Если $\lambda\in\sigma_{\mathrm{ess}}\bigl(\bigl(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^k\bigr)^{Fr}\bigr)$, то найдется последовательность Вейля дифференциальных форм в $\mathrm{Dom}\bigl(\bigl(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^k\bigr)^{Fr}\bigr)$, т. е. такая последовательность $\{\omega_q\}\subseteq\mathrm{Dom}\bigl(\bigl(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^k\bigr)^{Fr}\bigr)$, что $\|\omega_q\|^2_{\mathfrak{M}_1^k(\mathbb{B}^2\times_{f^2}F)}\leq C<\infty$, $\{\omega_q\}$ не имеет сходящихся в $\mathfrak{M}_1^k(\mathbb{B}^2\times_{f^2}F)$ подпоследовательностей и

$$\lim_{q\to\infty}\bigl(\bigl(\Delta_{\mathfrak{M}_1}^k\bigr)^{Fr}\omega_q-\lambda\omega_q\bigr)=0.$$

Эту последовательность всегда можно выбрать ортогональной, более того, мы можем положить $\omega_q=a_q(s,t)b_{1q}$, где $\{b_{1q}\}$ — (полный) ортонормированный базис в $L_2^k(F)$ собственных форм оператора Δ_F^k, отвечающих собственным значениям $\bigl\{\lambda_q^k\bigr\}$. Кроме того, в силу справедливости разложения Ходжа мы можем считать, что $\delta_F^k b_{1q}=0$. Таким образом, имеется ограниченная в $L_2([R,+\infty))$ последовательность Вейля функций $\{a_q\}$, не имеющая сходящихся подпоследовательностей и такая, что $\bigl\|\bigl(D_{0k}^{ql}\bigr)^{Fr}a_q-\lambda a_q\bigr\|^2\to 0$ при $q\to+\infty$.

Имеем $\mathrm{Dom}\bigl(\bigl(D_{0k}^{ql}\bigr)^{Fr}\bigr)\subset W_0^{1,2}([R,+\infty))$ и

$$\bigl\langle\bigl(D_{0k}^{ql}\bigr)^{Fr}a_q-\lambda a_q,a_q\bigr\rangle\leq\bigl\|\bigl(D_{0k}^{ql}\bigr)^{Fr}a_q-\lambda a_q\bigr\|\|a_q\|\to 0\quad\text{при } q\to+\infty.$$

Таким образом,

$$\bigl\langle\bigl(D_{0k}^{ql}\bigr)^{Fr}a_q-\lambda a_q,a_q\bigr\rangle=\int\limits_R^{+\infty}\left(-\frac{d^2a_q}{dt^2}+\frac{l^2}{b^2f'^2(t)}a_q\right)a_q\,dt+\int\limits_R^{+\infty}\frac{1}{f^2}\lambda_q^ka_q^2\,dt$$

$$+\int\limits_R^{+\infty}\left(V_k(t)a_q-\frac{(n-2k-1)^2}{4}a_q+\frac{(n-2k-1)^2}{4}a_q-\lambda a_q\right)a_q\,dt$$

$$= \int\limits_R^{+\infty} \left(\frac{da_q}{dt}\right)^2 dt + \int\limits_R^{+\infty} \frac{l^2}{b^2 f'^2(t)} a_q^2\, dt + \int\limits_R^{+\infty} \frac{1}{f^2} \lambda_q^k a_q^2\, dt$$
$$+ \int\limits_R^{+\infty} \left(V_k(t) - \frac{(n-2k-1)^2}{4}\right) a_q^2\, dt + \int\limits_R^{+\infty} \left(\frac{(n-2k-1)^2}{4} - \lambda\right) a_q^2\, dt.$$

Так как $\lim\limits_{t\to\infty} V_k(t) = \left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2$ и существенный спектр не зависит от R, мы можем выбрать R настолько большим, что

$$\int\limits_R^{+\infty} \left(V_k(t) - \frac{(n-2k-1)^2}{4}\right) a_q^2\, dt + \int\limits_R^{+\infty} \left(\frac{(n-2k-1)^2}{4} - \lambda\right) a_q^2\, dt > 0.$$

Но тогда

$$\int\limits_R^{+\infty} a_q^2\, dt \to 0$$

в противоречие с предположением.

Следовательно, $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\Delta^k_{\mathfrak{M}_1}\big)^{Fr}\big) \subseteq \big[\big(\frac{n-2k-1}{2}\big)^2, +\infty\big)$, т. е. $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\Delta^k_{\mathfrak{M}_1}\big)^{Fr}\big) = \big[\big(\frac{n-2k-1}{2}\big)^2, +\infty\big)$.

По двойственности имеем $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\Delta^k_{\mathfrak{M}_1^*}\big)^{Fr}\big) = [((n-2k+1)/2)^2, +\infty)$. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть* $\mathbf{D}$ *— диагональный матричный дифференциальный оператор на* $[R, +\infty)$ *вида*

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dt^2} + a_1^2(t) + V_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dt^2} + a_2^2(t) + V_2(t) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{d^2}{dt^2} + a_n^2(t) + V_n(t) \end{pmatrix},$$

причем $V_i(t)$, $a_i(t)$ *— вещественные непрерывные ограниченные функции на* $[R, +\infty)$ *и* $\lim\limits_{t\to+\infty} a_i(t) = 0$.

Пусть $c_i = \inf\limits_{t\in[R,+\infty)} V_i(t)$. *Тогда если* $\lambda < \min\limits_i c_i$, *то* $\lambda \notin \sigma((\mathbf{D})^{Fr})$.

Доказательство следует из очевидной оценки на $C_0^\infty([R, +\infty))$:

$$\langle \mathbf{D}\mathbf{u} - \lambda\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \sum_{i=1}^n \int\limits_R^{+\infty} \left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 dt + \sum_{i=1}^n \int\limits_R^{+\infty} a_i^2 u_i^2\, dt$$
$$+ \sum_{i=1}^n \int\limits_R^{+\infty} (V_i - \lambda)\, u_i^2\, dt \geq \int\limits_R^{+\infty} (\min_i c_i - \lambda) u_i^2\, dt > 0.$$

Лемма 2. *Пусть* ω *— ко-замкнутая форма из* $\mathfrak{M}_2^k(\mathbb{R}^2 \times_{f^2} F)$, *т. е.*

$$\omega = \sum_q \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_q^{k-1}}} u_q(s,t) d_F^{k-1} c_{3q} + (-1)^k v_q(s,t) c_{3q} \wedge ds + (-1)^k w_q(s,t) c_{3q} \wedge dt\right)$$

и $\delta^k_M\omega = 0$. *Тогда компоненты формы* ω *удовлетворяют уравнениям*

$$\frac{\sqrt{\lambda_q^{k-1}}}{f}u_q + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{f''}{f'}\right) + (n-2k)\left(\frac{f'}{f}\right)\right\}w_q + \frac{\partial w_q}{\partial t} + \left(\frac{1}{bf'}\right)\frac{\partial v_q}{\partial s} = 0 \qquad (28)$$

для любого q.

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Лемма 3. *Для метрики* (e) *операторы* $\left(D^{ql}_{0k}(R)\right)^{Fr}$ *и* $\left(\mathbf{D}^{ql}_{1k}(R)\right)^{Fr}$ *не имеют собственных значений на* $\left[(-\infty, \varepsilon_0(R)) \cup \left[\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2, +\infty\right)\right] \setminus \{0\}$ *и* $\left[(-\infty, \varepsilon_1(R)) \cup \left[\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2, +\infty\right)\right] \setminus \{0\}$ *соответственно при любом* $R > 0$, *здесь*

$$\varepsilon_0(R) = \inf_{t\in[R,+\infty)} V^1_k(t), \quad \varepsilon_1(R) = \min_i \inf_{t\in[R,+\infty)} V^i_k(t),$$

где

$$V^1_k(t) = \frac{1}{2}\frac{f'''}{f'} - \frac{1}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 + \frac{(n-2k-2)(n-2k-4)}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + (n-2k-2)\frac{f''}{f};$$

$$V^2_k(t) = -\frac{1}{2}\frac{f'''}{f'} + \frac{3}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 + \frac{(n-2k)(n-2k-2)}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала оператор $\left(D^{ql}_{0k}(R)\right)^{Fr}$. В силу предложения 3 он не имеет собственных значений, меньших $\varepsilon_0(R)$. Пусть теперь $\lambda \geq \left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2$ и $D^{ql}_{0k}(R)u = -\frac{d^2u}{dt^2} + V_{qlk}(t)u = \lambda u$. Обозначим $\mu^2 = \lambda - \left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\int\limits_R^{+\infty} |V_{qlk}(t)|\,dt &= \int\limits_R^{+\infty}\left|\frac{l^2}{b^2f'^2(t)} + \frac{1}{f^2}\lambda^k_q + V_k(t) - \left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2\right|dt \\ &\leq \int\limits_R^{+\infty}\left|\frac{l^2}{b^2f'^2(t)} + \frac{1}{f^2}\lambda^k_q\right|dt + \frac{1}{2}\int\limits_R^{+\infty}\left|\frac{f'''}{f'} - 1\right|dt \\ &+ \frac{(n-2k-2)(n-2k-4)}{4}\int\limits_R^{+\infty}\left|\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - 1\right|dt \\ &+ \frac{1}{4}\int\limits_R^{+\infty}\left|\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - 1\right|dt + (n-2k-2)\int\limits_R^{+\infty}\left|\frac{f''}{f} - 1\right|dt < +\infty,\end{aligned}$$

поскольку в силу свойств искривляющей функции все шесть интегралов в правой части неравенства сходятся. Но тогда решения уравнения

$$\begin{aligned}D^{ql}_{0k}(R)u - \lambda u &= -\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{f^2}\lambda^k_q u + \frac{l^2}{b^2f'^2(t)}u \\ &+ \left(V_k(t) - \left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2\right)u - \mu^2 u = -\frac{d^2u}{dt^2} + V_{qlk}(t)u - \mu^2 u = 0\end{aligned}$$

имеют следующие асимптотики (см. [18, XI.9, следствие 9.2]): $u \sim c_1e^{i\mu t} + c_2e^{-i\mu t}$ при $\mu \neq 0$ и $u \sim c_1t + c_2$ при $\mu = 0$. Условие L_2-интегрируемости влечет $c_1 = c_2 = 0$ в обоих случаях, т. е. $u = 0$.

Перейдем к исследованию второго оператора. Пусть $\lambda \neq 0$ и $\mathbf{D}^{ql}_{1k}(R)(u,v,w) = \lambda(u,v,w)$. Рассмотрим форму из $\mathfrak{M}^k_2(\mathbb{R}^2 \times_{f^2} F)$:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda^{k-1}_q}}(bf')^{-\frac{1}{2}} f^{\frac{2k-n+2}{2}} e^{il\theta} u(t) d^{k-1}_F c_{3q} + (-1)^k (bf')^{\frac{1}{2}} f^{\frac{2k-n}{2}} e^{il\theta} v(t) c_{3q} \wedge ds$$
$$+ (-1)^k (bf')^{-\frac{1}{2}} f^{\frac{2k-n}{2}} e^{il\theta} w(t) c_{3q} \wedge dt.$$

Тогда $\Delta^k_{\mathfrak{M}_2}\omega = \lambda\omega$. Оператор δ^k_M переводит формы из $\mathfrak{M}^k_2(\mathbb{R}^2 \times_{f^2} F)$ в формы из $\mathfrak{M}^k_1(\mathbb{R}^2 \times_{f^2} F)$. В силу коммутационных соотношений имеем

$$\delta^k_M \Delta^k_{\mathfrak{M}_2}\omega = \Delta^{k-1}_{\mathfrak{M}_1}\delta^k_M\omega = \lambda\delta^k_M\omega,$$

т. е. $\delta^k_M\omega$ — собственная форма для оператора $\Delta^{k-1}_{\mathfrak{M}_1}$. Но последний оператор не имеет собственных значений, как показано выше. Поэтому $\delta^k_M\omega = 0$ и вектор-функция (u,v,w) должна удовлетворять уравнениям (28).

Имеем

$$\mathbf{D}^{ql}_{1k}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{D}^{ql}_{0k} & 0 & 2\left(\frac{f'}{f^2}\right)\sqrt{\lambda^{k-1}_q} \\ 0 & \widehat{D}^{ql}_{0k} & -\frac{2il}{b}\left(\frac{f''}{f'^2}\right) \\ 2\left(\frac{f'}{f^2}\right)\sqrt{\lambda^{k-1}_q} & \frac{2il}{b}\left(\frac{f''}{f'^2}\right) & \widehat{D}'^{ql}_{0k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

причем

$$\widehat{D}^{ql}_{0k} = -\frac{d^2}{dt^2} + \widehat{V}_{1qk}(t), \quad \widetilde{D}^{ql}_{0k} = -\frac{d^2}{dt^2} + \widetilde{V}_{1qk}(t), \quad \widehat{D}'^{ql}_{0k} = -\frac{d^2}{dt^2} + \widehat{V}'_{1qk}(t),$$

а потенциалы определяются из выражений (26). Нетрудно видеть, что $\widehat{V}_{1qk}(t)$, $\widetilde{V}_{1qk}(t)$, $\widehat{V}'_{1qk}(t)$ — непрерывные ограниченные на $[R,+\infty)$ функции и

$$\lim_{t\to\infty}\widetilde{V}_{1qk}(t) = \lim_{t\to\infty}\widehat{V}_{1qk}(t) = \left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2, \quad \lim_{t\to\infty}\widehat{V}'_{1qk}(t) = \left(\frac{n-2k+1}{2}\right)^2.$$

Рассмотрим уравнение $\mathbf{D}^{ql}_{1k}(R)(u,v,w) = \lambda(u,v,w)$. Его можно переписать в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = E\xi + G(t)\xi,$$

где $\xi = \left(u, \frac{du}{dt}, v, \frac{dv}{dt}, w, \frac{dw}{dt}\right)$, а матрица E имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

где $E_i = \begin{pmatrix} 0 & \mu^2_i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mu^2_1 = \left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2 - \lambda$, $\mu^2_2 = \left(\frac{n-2k+1}{2}\right)^2 - \lambda$, а матрица $G(t)$ такова, что $\int\limits_R^{+\infty} |G_{ij}(t)|\,dt < \infty$. Приводя E к жордановой форме и пользуясь теоремами 13.1 и 13.2 из [18, X.13, X.16], получаем для решений уравнения $\mathbf{D}^{ql}_{1k}(R)(u,v,w) = \lambda(u,v,w)$ следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} u &\sim c^u_1 e^{\left(\sqrt{(\frac{n-2k-1}{2})^2-\lambda}\right)t} + c^u_2 e^{-\left(\sqrt{(\frac{n-2k-1}{2})^2-\lambda}\right)t}, \\ v &\sim c^v_1 e^{\left(\sqrt{(\frac{n-2k-1}{2})^2-\lambda}\right)t} + c^v_2 e^{-\left(\sqrt{(\frac{n-2k-1}{2})^2-\lambda}\right)t}, \\ w &\sim c^w_1 e^{\left(\sqrt{(\frac{n-2k+1}{2})^2-\lambda}\right)t} + c^w_2 e^{-\left(\sqrt{(\frac{n-2k+1}{2})^2-\lambda}\right)t} \end{aligned} \tag{29}$$

при $\lambda \neq \left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2, \left(\frac{n-2k+1}{2}\right)^2$;

$$u \sim c_1^u t + c_2^u; \quad v \sim c_1^v t + c_2^v; \quad w \sim c_1^w e^{\left(\sqrt{(\frac{n-2k+1}{2})^2-\lambda}\right)t} + c_2^w e^{-\left(\sqrt{(\frac{n-2k+1}{2})^2-\lambda}\right)t} \tag{30}$$

при $\lambda = \left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2$, $\lambda \neq \left(\frac{n-2k+1}{2}\right)^2$;

$$\begin{gathered} u \sim c_1^u e^{\left(\sqrt{(\frac{n-2k-1}{2})^2-\lambda}\right)t} + c_2^u e^{-\left(\sqrt{(\frac{n-2k-1}{2})^2-\lambda}\right)t}, \\ v \sim c_1^v e^{\left(\sqrt{(\frac{n-2k-1}{2})^2-\lambda}\right)t} + c_2^v e^{-\left(\sqrt{(\frac{n-2k-1}{2})^2-\lambda}\right)t}, \quad w \sim c_1^w t + c_2^w \end{gathered} \tag{31}$$

при $\lambda = \left(\frac{n-2k+1}{2}\right)^2$, $\lambda \neq \left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2$ и, наконец, при $n = 2k$, $\lambda = \frac{1}{4}$

$$u \sim c_1^u t + c_2^u, \quad v \sim c_1^v t + c_2^v, \quad w \sim c_1^w t + c_2^w. \qquad (32).$$

Из соотношений (29) при $\lambda \geq \max\left\{\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2, \left(\frac{n-2k+1}{2}\right)^2\right\}$ сразу получаем $u = v = w = 0$ из соображений L_2-интегрируемости.

Далее, из уравнения (28) для компонент u, w собственной вектор-функции имеем

$$\frac{1}{f^2}\lambda_q^{k-1}u - \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{l^2}{(bf')^2}u + \left[\frac{1}{2}\frac{f'''}{f'} + \frac{(n-2k-2)(n-2k-4)}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 + (n-2k-2)\frac{f''}{f}\right]u + 2\sqrt{\lambda_q^{k-1}}\left(\frac{f'}{f^2}\right)w = \lambda u;$$

$$\frac{1}{f^2}\lambda_q^{k-1}w - \frac{d^2w}{dt^2} - 2\left(\frac{f''}{f'}\right)\frac{dw}{dt} + \frac{l^2}{(bf')^2}w - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{f'''}{f'}\right) + (n-2k)\frac{f''}{f} + \frac{1}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - \frac{(n-2k)(n-2k+2)}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right]w - \frac{2}{f'}\left(\frac{f'}{f}\right)'\sqrt{\lambda_q^{k-1}}u = \lambda w.$$

Асимптотики для w в данном случае имеют следующий вид (для u остаются теми же, что и в (29)):

$$w \sim b_1^w e^{\left(-1+\sqrt{(\frac{n-2k-1}{2})^2-\lambda}\right)t} + b_2^w e^{\left(-1-\sqrt{(\frac{n-2k-1}{2})^2-\lambda}\right)t}.$$

Пусть $\lambda < \left(\frac{n-2k+1}{2}\right)^2$. Согласно (29) и (30)

$$w \sim c_2^w e^{-\left(\sqrt{(\frac{n-2k+1}{2})^2-\lambda}\right)t}.$$

Таким образом,

$$-\sqrt{((n-2k+1)/2)^2-\lambda} = -1 \pm \sqrt{((n-2k-1)/2)^2-\lambda},$$

откуда $\lambda = 0$, что противоречит исходному предположению. Поэтому $w = 0$. При $\lambda \geq \left(\frac{n-2k+1}{2}\right)^2$ из требования L_2-интегрируемости опять же получаем $w = 0$. Поэтому $w = 0$ всегда, если (u, v, w) — соответствующая ненулевому собственному значению λ собственная вектор-функция оператора $\mathbf{D}_{1k}^{ql}(R)$, удовлетворяющая уравнению (28).

Таким образом, уравнение $\mathbf{D}_{1k}^{ql}(R)(u, v, w) = \lambda(u, v, w)$ принимает вид

$$\frac{1}{f^2}\lambda_q^{k-1}u - \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{l^2}{(bf')^2}u + \left[\frac{1}{2}\frac{f'''}{f'} - \frac{1}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 + \frac{(n-2k-2)(n-2k-4)}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + (n-2k-2)\frac{f''}{f}\right]u = \lambda u;$$

$$\frac{1}{f^2}\lambda_q^{k-1}v-\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{l^2}{(bf')^2}v-\left[\frac{1}{2}\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2-\frac{(n-2k)(n-2k-2)}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2\right]v=\lambda v.$$

Если $\lambda \geq \left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2$, то требование L_2-интегрируемости даст $u=v=0$, если $\lambda<\varepsilon_1(R)$, то воспользуемся предложением 3 и опять получим $u=v=0$. Лемма доказана.

В дальнейшем нам потребуется следующая техническая

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{D}$ *— симметричный матричный дифференциальный оператор на* $[R,+\infty)$ *вида*

$$\mathbf{D}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_{V_1}&0&W_1(t)\\0&D_{V_2}&-iW_2(t)\\W_1(t)&iW_2(t)&D_{V_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix},$$

где $D_{V_i}=-\frac{d^2}{dt^2}+V_i(t)$, *причем* V_i, W_i *— непрерывные вещественнозначные ограниченные функции* t *и* $\lim\limits_{t\to\infty}W_i(t)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}V_i(t)=c_i$.

Тогда $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathbf{D}^{Fr})=[\min\limits_i c_i,+\infty)$.

Доказательство. Будем следовать идеям статей [19, 20], где изучался спектр матричных операторов типа Навье — Стокса. Пусть $\mu\in\rho(D_{V_1})\cap\rho(D_{V_2})$. Имеем

$$\mathbf{D}-\mu\mathbf{E}=\begin{pmatrix}D_{V_1}-\mu E&0&W_1(t)\\0&D_{V_2}-\mu E&-iW_2(t)\\W_1(t)&iW_2(t)&D_{V_3}-\mu E\end{pmatrix}=\mathbf{U}(\mu)(\mathbf{D}_1-\mu\mathbf{E})\mathbf{V}(\mu)$$
$$=\mathbf{U}(\mu)\begin{pmatrix}D_{V_1}-\mu E&0&0\\0&D_{V_2}-\mu E&0\\0&0&D_{V_3}-S(\mu)-\mu E\end{pmatrix}\mathbf{V}(\mu),$$

где

$$S(\mu)=W_1(D_{V_1}-\mu E)^{-1}W_1+W_2\big(D_{V_2}-\mu E\big)^{-1}W_2,$$
$$\mathbf{U}(\mu)=\begin{pmatrix}E&0&0\\0&E&0\\W_1(D_{V_1}-\mu E)^{-1}&iW_2(D_{V_2}-\mu E)^{-1}&E\end{pmatrix},$$
$$\mathbf{V}(\mu)=\begin{pmatrix}E&0&(D_{V_1}-\mu E)^{-1}W_1\\0&E&-i(D_{V_2}-\mu E)^{-1}W_2\\0&0&E\end{pmatrix}.$$

Тогда для любого λ

$$\mathbf{D}-\lambda\mathbf{E}=\mathbf{D}-\mu\mathbf{E}+(\mu-\lambda)\mathbf{E}$$
$$=\mathbf{U}(\mu)\begin{pmatrix}D_{V_1}-\lambda E&0&0\\0&D_{V_2}-\lambda E&0\\0&0&D_{V_3}-S(\mu)-\lambda E\end{pmatrix}\mathbf{V}(\mu)$$
$$+(\mu-\lambda)[\mathbf{E}-\mathbf{U}(\mu)\mathbf{V}(\mu)].$$

При этом

$$\mathbf{E}-\mathbf{U}(\mu)\mathbf{V}(\mu)$$
$$=-(\mu-\lambda)\begin{pmatrix}0&0&(D_{V_1}-\mu E)^{-1}W_1\\0&0&-i(D_{V_2}-\mu E)^{-1}W_2\\W_1(D_{V_1}-\mu E)^{-1}&iW_2(D_{V_2}-\mu E)^{-1}&F(\mu)\end{pmatrix},$$

где $F(\mu) = W_1(D_{V_1} - \mu E)^{-2}W_1 + W_2(D_{V_2} - \mu E)^{-2}W_2$. Далее, W_1 и W_2 — непрерывные ограниченные убывающие на бесконечности функции, более того, нетрудно видеть, что W_1 и W_2 — относительно компактные возмущения D_{V_1} и D_{V_2} соответственно. Поэтому операторы $W_1(D_{V_1} - \mu E)^{-1}$ и $W_2(D_{V_2} - \mu E)^{-1}$ компактны. Ограниченность W_1 и W_2 влечет компактность оператора $F(\mu)$.

Операторы $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}^{-1}$, $\mathbf{V}^{-1}$ ограниченны. Поэтому оператор $\mathbf{D}-\lambda\mathbf{E}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда $\mathbf{D}_1 - \lambda\mathbf{E}$ фредгольмов, т. е. $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathbf{D}_1^{Fr}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathbf{D}^{Fr})$. Далее, компактность операторов $W_1(D_{V_1} - \mu E)^{-1}$ и $W_2(D_{V_2} - \mu E)^{-1}$ и ограниченность функций W_1 и W_2 влечет компактность оператора $S(\mu)$, поэтому $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathbf{D}_1^{Fr}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathbf{A}^{Fr})$, где $\mathbf{A}$ — диагональный матричный оператор,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} D_{V_1} & 0 & 0 \\ 0 & D_{V_2} & 0 \\ 0 & 0 & D_{V_3} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathbf{D}^{Fr}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathbf{A}^{Fr}) = \bigcup\limits_{i=1}^{3} \sigma_{\mathrm{ess}}(D_{V_i}^{Fr}) = [\min\limits_i c_i, +\infty)$. Предложение доказано.

Лемма 5. *Имеет место равенство*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big((\mathbf{D}_{1k}^{ql})^{Fr}\big) = [\min\{((n-2k-1)/2)^2, ((n-2k+1)/2)^2\}, +\infty)$$

при любых k, q, l.

Доказательство сразу следует из предыдущей леммы.

Лемма 6. *Имеют место равенства*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big((\Delta_{\mathfrak{M}_2}^k)^{Fr}\big) \setminus \{0\} = [\min\{((n-2k-1)/2)^2, ((n-2k+1)/2)^2\}, +\infty),$$

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big((\Delta_{\mathfrak{M}_2^*}^k)^{Fr}\big) \setminus \{0\} = [\min\{((n-2k-1)/2)^2, ((n-2k+1)/2)^2\}, +\infty)$$

при любом k.

Доказательство. Для удобства здесь мы будем явно указывать зависимость рассматриваемых операторов от R. Вспомним, что по теореме 2

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big((\Delta_{\mathfrak{M}_2}^k)^{Fr}\big)(R) = \sigma_{\mathrm{ess}}\big((\Delta_{\mathfrak{M}_2}^k)^{Fr}\big)(R') \tag{33}$$

для любых $R, R' > 0$.

Пусть

$$\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}\big((\Delta_{\mathfrak{M}_2}^k)^{Fr}\big) \setminus \{0\}, \quad \lambda_0 < \min\left\{\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2, \left(\frac{n-2k+1}{2}\right)^2\right\}.$$

Тогда найдется такая ортонормированная последовательность собственных форм $\psi_j \in \mathfrak{M}_2^k$ оператора $(\Delta_{\mathfrak{M}_2}^k)^{Fr}$, что

$$(\Delta_{\mathfrak{M}_2}^k)^{Fr}\psi_j = \lambda_j\psi_j, \quad \lim_{j\to\infty}\lambda_j = \lambda_0, \quad \|\psi_j\| = 1.$$

Раскладывая форму ψ_j по базису в $\mathfrak{M}_2^k$, имеем

$$\psi_j = \sum_{q,l}\Bigg(\frac{1}{\sqrt{\lambda_q^{k-1}}}(bf')^{-\frac12} f^{\frac{2k-n+2}{2}} e^{il\theta} u_{ql}^j(t) d_F^{k-1} c_{3q}$$
$$+ (-1)^k (bf')^{\frac12} f^{\frac{2k-n}{2}} e^{il\theta} v_{ql}^j(t) c_{3q} \wedge ds + (-1)^k (bf')^{-\frac12} f^{\frac{2k-n}{2}} e^{il\theta} w_{ql}^j(t) c_{3q} \wedge dt\Bigg)$$

и для компонент формы ψ_j — уравнения

$$\mathbf{D}^{ql}_{1k}(R)\big(u^j_{ql}, v^j_{ql}, w^j_{ql}\big) = \lambda_j\big(u^j_{ql}, v^j_{ql}, w^j_{ql}\big).$$

Тогда поскольку $\lambda_j \to \lambda_0$, для любого ε_0 существует j_0 такое, что $|\lambda_j - \lambda_0| < \varepsilon_0$ для всех $j \geq j_0$. Выберем ε_0 достаточно малым так, что еще

$$\lambda_0 + \varepsilon_0 < \min\left\{\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2, \left(\frac{n-2k+1}{2}\right)^2\right\}.$$

Теперь мы можем подобрать положительное R_0 так, чтобы $\varepsilon_1(R_0)$ из леммы 3 удовлетворяло следующему неравенству:

$$\lambda_0 + \varepsilon_0 < \varepsilon_1(R_0) < \min\left\{\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)^2, \left(\frac{n-2k+1}{2}\right)^2\right\},$$

и, пользуясь соотношениями (33), вырезать из M относительно компактную часть $B^2(0, R_0) \times_{f^2} F$, что не повлияет на существенный спектр $\big(\Delta^k_{\mathfrak{M}_2}\big)^{Fr}$. Заметим также, что это R_0 не зависит от q и l, а зависит только от поведения искривляющей функции на бесконечности, степени формы и размерности исходного многообразия.

Но тогда для всех $j > j_0$ по лемме 3 имеем $\psi_j = 0$, что противоречит исходному предположению. Лемма доказана.

Предложение 4. *Выполнено равенство*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\big(\Delta^k_M\big)^{Fr}\big) \setminus \{0\} = [\min\{((n-2k-1)/2)^2, ((n-2k+1)/2)^2\}, +\infty)$$

при любом k.

Доказательство следует из лемм 1, 6 и равенства (11′).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Eichhorn J.* The essential spectrum of non-simply-connected open complete Riemannian manifolds // Ann. Global Anal. Geom. 1984. V. 2, N 1. P. 1–18.
2. *McKean H. P.* An upper bound to the spectrum of Δ on a manifold of negative curvature // J. Differential Geom. 1970. V. 4, N 3. P. 359–366.
3. *Cheeger J.* On the spectral geometry of spaces with cone-like singularities // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1979. V. 76, N 5. P. 2103–2106.
4. *Lee J. M.* The spectrum of asymptotically hyperbolic Einstein manifold // Comm. Anal. Geom. 1995. V. 3, N 1–2. P. 253–271.
5. *Lax P. D., Phillips R. S.* The asymptotic distribution of lattice points in Euclidean and non-Euclidean spaces // J. Funct. Anal. 1982. V. 46, N 3. P. 280–350.
6. *Carron G., Pedon E.* On the differential form spectrum of hyperbolic manifolds // Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5). 2004. V. 3, N 4. P. 705–747.
7. *Donnelly H.* The differential form spectrum of hyperbolic space // Manuscripta Math. 1981. V. 33, N 3/4. P. 365–386.
8. *Antoci F.* On the spectrum of the Laplace–Beltrami operator for p-forms for a class of warped product metrics // Adv. Math. 2004. V. 188, N 2. P. 247–293.
9. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Т. 2.
10. *Zeghib A.* Geometry of warped products // http://www.umpa.ens-lyon.fr/ zeghib/conferences.html.
11. *Dobarro F., Lami Dozo E.* Scalar curvature and warped products of Riemann manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 303, N 1. P. 161–168.
12. *Dobarro F., Ünal B.* Curvature of multiply warped products // J. Geom. Phys. 2005. V. 55, N 1. P. 75–106.

13. *Eichhorn J.* Spektraltheorie offener Riemannscher Mannigfaltigkeiten mit einer rotationssymmetrischen Metrik // Math. Nachr. 1983. Bd 114. S. 23–51.
14. *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О разложении в ортогональную прямую сумму комплексов де Рама искривленных произведений римановых многообразий // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 354–368.
15. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О нормальной и компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования при однородных краевых условиях // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 4. С. 82–96.
16. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
17. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы (спектральная теория). М.: Мир, 1966.
18. *Hartman P.* Ordinary differential equations. New York: Wiley, 1964.
19. *Atkinson F. V., Langer H., Mennicken R., Shkalikov A. A.* The essential spectrum of some matrix operators // Math. Nachr. 1994. Bd 167. S. 5–20.
20. *Шкаликов А. А.* О существенном спектре матричных операторов // Мат. заметки. 1995. Т. 58, № 6. С. 945–949.

Статья поступила 10 августа 2006 г.

Глотко Николай Владимирович