Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 512.554.34

КОНФОРМНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

П. С. Колесников

Аннотация. Исследуется конструкция вложения диалгебр Ли (алгебр Лейбница) в конформные алгебры. Эта конструкция приводит к понятию конформного представления алгебр Лейбница. Доказано, что любая (конечномерная) алгебра Лейбница имеет точное конформное представление (конечного типа). В качестве следствия получено новое доказательство теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта для алгебр Лейбница.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, диалгебра, конформная алгебра.

Введение. В работе [1] была исследована связь между конформными алгебрами [2] (алгебраическими системами со счетным числом операций умножения, возникшими в математической физике [3]) и диалгебрами [4, 5]. Было введено общее понятие многообразия диалгебр, обобщающее понятия ассоциативной диалгебры [4] и альтернативной диалгебры [6]. В частности, класс диалгебр Ли совпадает с многообразием алгебр Лейбница. Основным результатом работы [1] является доказательство вложимости произвольной диалгебры данного многообразия в конформную алгебру такого же многообразия.

В данной работе мы более подробно исследуем вложение лиевых диалгебр (алгебр Лейбница) в конформные алгебры. Для этого многообразия конструкция обертывающей конформной алгебры из [1] может быть упрощена с использованием понятия конформного представления диалгебры. Мы покажем, что любая (конечномерная) алгебра Лейбница может быть вложена в конформную алгебру петель над алгеброй линейных преобразований (конечномерного) линейного пространства. В качестве следствия получим новые доказательства теоремы о существовании инъективного вложения алгебры Лейбница в ассоциативную диалгебру и аналога теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта (PBW-теоремы) для алгебр Лейбница [5].

1. Многообразия диалгебр. *Диалгеброй* называется линейное пространство A с двумя билинейными операциями умножения $\dashv$, $\vdash$. В работах [4] и [6] понятия ассоциативной и альтернативной диалгебр соответственно были мотивированы связями диалгебр и алгебр Лейбница. Так, например, тождества ассоциативности для диалгебры A выбираются таким образом, чтобы относительно операции

$$[ab] = a \vdash b - b \dashv a$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–344.2008.1) и Лаврентьевского гранта поддержки молодежных проектов СО РАН № 29.

© 2008 Колесников П. С.

пространство A являлось левой алгеброй Лейбница, т. е. выполнялось тождество

$$[x_1[x_2x_3]] = [[x_1x_2]x_3] + [x_2[x_1x_3]]. \tag{1}$$

Полученная алгебра Лейбница $A^{(-)}$ является аналогом присоединенной алгебры Ли для ассоциативной алгебры.

В [1] развит универсальный подход к определению многообразия диалгебр, использующий понятие операды. Это определение может быть представлено в терминах тождеств следующим образом.

Определение 1. Пусть Var — многообразие алгебр, определенное семейством Σ полилинейных тождеств. Диалгебра A называется Var-*диалгеброй*, если она удовлетворяет тождествам

$$\begin{gathered}(x_1 \dashv x_2) \vdash x_3 - (x_1 \vdash x_2) \vdash x_3, \quad x_1 \dashv (x_2 \vdash x_3) - x_1 \dashv (x_2 \dashv x_3), \\ t_i(x_1, \dots, x_n), \quad t \in \Sigma,\ \deg t = n,\ i = 1, \dots, n,\end{gathered} \tag{2}$$

где t_i получается из t заменой каждого монома $(x_{j_1} \dots x_{j_n})$ на $(x_{j_1} \vdash \dots \vdash x_i \dashv \dots \dashv x_{j_n})$ с сохранением расстановки скобок.

В случае $\Sigma = \{(x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)\}$ (ассоциативность) система тождеств (2) совпадает с введенной в [4]:

$$\begin{gathered}t_1 = (x_1 \dashv x_2) \dashv x_3 - x_1 \dashv (x_2 \dashv x_3), \quad t_2 = (x_1 \vdash x_2) \dashv x_3 - x_1 \vdash (x_2 \dashv x_3), \\ t_3 = (x_1 \vdash x_2) \vdash x_3 - x_1 \vdash (x_2 \vdash x_3).\end{gathered}$$

Если $\Sigma = \{x_1x_2 + x_2x_1,\ x_1(x_2x_3) - x_2(x_1x_3) - (x_1x_2)x_3\}$ (тождества алгебры Ли), то относительно операции $[xy] = x \vdash y$ тождества (2) эквивалентны левому тождеству Лейбница (1). Обратно, любая (левая) алгебра Лейбница относительно операций $x \vdash y = [xy]$, $x \dashv y = -[yx]$ является диалгеброй Ли в смысле определения 1.

2. Конформные алгебры. Пусть H — кокоммутативная алгебра Хопфа с коумножением Δ, коединицей ε и антиподом S. Мы будем использовать запись Свидлера [7], опуская знаки суммирования, например:

$$\begin{gathered}\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}, \quad (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)} \otimes h_{(3)}, \\ (S \otimes \mathrm{id})\Delta(h) = h_{(-1)} \otimes h_{(2)}, \quad (\mathrm{id} \otimes S)\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(-2)}.\end{gathered}$$

Определение 2 [2, 8, 9]. Пусть M и N — левые H-модули. *Конформным линейным отображением* из M в N называется отображение a из M в $H^{\otimes 2} \otimes_H N$ такое, что $a(hu) = (1 \otimes h \otimes_H \mathrm{id})a(u)$, $h \in H$, $u \in M$. Здесь $H^{\otimes 2} = H \otimes H$ рассматривается как тензорное произведение регулярных правых H-модулей.

Заметим, что $H \otimes H$ является свободным правым H-модулем с базисом $\{h_i \otimes 1\}$, где $\{h_i\}$ — некоторый базис H над $\Bbbk$. Действительно,

$$f \otimes g = (fg_{(-1)} \otimes 1)g_{(2)} = \sum_i (h_i \otimes 1)g_i,$$

причем такое представление единственно.

Пространство всех конформных линейных отображений из M в N обозначается через $\mathrm{Chom}(M, N)$. Если $N = M$, то вместо $\mathrm{Chom}(M, M)$ используют обозначение $\mathrm{Cend}\, M$. Введем структуру левого H-модуля на $\mathrm{Chom}(M, N)$ по правилу

$$(ha)(u) = (h \otimes 1 \otimes_H \mathrm{id})a(u), \quad h \in H,\ a \in \mathrm{Chom}(M, N),\ u \in M.$$

Определение 3 [9, 10]. Левый H-модуль C, снабженный H-инвариантным отображением $\mu : C \to \operatorname{Cend} C$, называется *$H$-конформной алгеброй* (или *псевдоалгеброй над H*). Операция $(a * b) = \mu(a)b \in H^{\otimes 2} \otimes_H C$, $a, b \in C$, называется *псевдопроизведением.*

Если $H = \Bbbk$, то понятие H-конформной алгебры совпадает с понятием обычной алгебры над полем. Если $H = \Bbbk[T]$ (с канонической структурой алгебры Хопфа) и $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, то H-конформная алгебра в точности является конформной алгеброй в смысле [2]. В данной работе мы будем преимущественно рассматривать H-конформные алгебры над $H = \Bbbk[T]$ без ограничения на характеристику поля $\Bbbk$.

Простейшим примером H-конформной алгебры служит конструкция алгебры петель $\operatorname{Cur} A$ над обычной алгеброй A. Именно, $\operatorname{Cur} A$ есть свободный H-модуль $H \otimes A$, снабженный H-линейной операцией

$$\mu(f \otimes a) : h \otimes b \mapsto f \otimes h \otimes_H (1 \otimes ab), \quad a, b \in A, \ f, h \in H.$$

Псевдопроизведение $* : C \otimes C \to (H \otimes H) \otimes_H C$ на H-конформной алгебре C является $H^{\otimes 2}$-линейным отображением. Из общих соображений, связанных с категорной интерпретацией понятия алгебры над операдой, получается следующее обобщение (см. [10]): псевдопроизведение $*$ действует из $(H^{\otimes n} \otimes_H C) \otimes (H^{\otimes m} \otimes_H C)$ в $H^{\otimes (n+m)} \otimes_H C$ по правилу

$$(F_1 \otimes_H a_1) * (F_2 \otimes_H a_2) = (F_1 \otimes F_2 \otimes_H 1)(\Delta^{n-1} \otimes \Delta^{m-1} \otimes_H \mathrm{id})(a_1 * a_2), \qquad (3)$$

где $F_1 \in H^{\otimes n}$, $F_2 \in H^{\otimes m}$, $a_1, a_2 \in C$, $\Delta^0(h) = h$, $\Delta^k(h) = h_{(1)} \otimes \ldots \otimes h_{(k+1)}$ для $h \in H$, $k \geq 1$.

Соотношение (3) позволяет интерпретировать произвольный полилинейный терм t в сигнатуре алгебры над полем как функцию на $C^{\otimes n}$ ($n = \deg t$) со значениями в $H^{\otimes n} \otimes_H C$.

Определение 4 [10]. Пусть Var — многообразие алгебр, определенное семейством Σ полилинейных тождеств. H-конформная алгебра C над кокоммутативной алгеброй Хопфа H *принадлежит многообразию* Var (или, короче, *является* Var*-псевдоалгеброй*), если она удовлетворяет тождествам

$$t^*(x_1, \ldots, x_n), \quad t \in \Sigma,$$

где t^* получается из t заменой каждого монома $(x_{1\sigma} \ldots x_{n\sigma})$, $\sigma \in S_n$, на $(\sigma \otimes_H \mathrm{id})(x_{1\sigma} * \cdots * x_{n\sigma})$ с сохранением расстановки скобок. Здесь σ действует на $H^{\otimes n}$ по правилу $(h_1 \otimes \cdots \otimes h_n)^\sigma = (h_{1\sigma^{-1}} \otimes \cdots \otimes h_{n\sigma^{-1}})$.

На любой H-конформной алгебре C можно определить операции $\dashv, \vdash$ следующим образом: если $a * b = \sum\limits_i h_i \otimes 1 \otimes_H c_i$, $a, b, c_i \in C$, $h_i \in H$, то

$$a \vdash b = \sum_i \varepsilon(h_i) c_i, \quad a \dashv b = \sum_i h_i c_i.$$

Полученную диалгебру обозначим через $C^{(0)}$.

Основной результат работы [1] может быть сформулирован в следующем виде.

Теорема 1. *Если C — Var-псевдоалгебра, то $C^{(0)}$ является Var-диалгеброй. Обратно, любая Var-диалгебра A может быть вложена в $C^{(0)}$ для подходящей Var-псевдоалгебры C над $H = \Bbbk[T]$.* $\square$

3. Точные представления алгебр Лейбница. Пусть H — координатная алгебра Хопфа абелевой линейной алгебраической группы G. Зафиксируем базис $\{h_i\}$ алгебры H над полем $\Bbbk$. Рассмотрим три левых H-модуля M, N и V, для которых дано $H^{\otimes 2}$-линейное отображение

$$* : M \otimes N \to H^{\otimes 2} \otimes_H V.$$

Определим семейство операций $(\cdot\ _{(z)}\ \cdot) : M \otimes N \to V$, $z \in G$, следующим образом. Если $u * v = \sum\limits_i h_i \otimes 1 \otimes_H w_i$ для $u \in M$, $v \in N$, то

$$(u\ _{(z)}\ v) = \sum_i h_i(z^{-1}) w_i \in V. \tag{4}$$

Построенное семейство операций не зависит от выбора базиса $\{h_i\}$ и обладает следующими свойствами:

(C1) для любых u, v отображение $x \mapsto (u\ _{(x)}\ v)$ является регулярной V-значной функцией на G;
(C2) $(hu\ _{(z)}\ v) = h(z^{-1})(u\ _{(z)}\ v)$, $h \in H$;
(C3) $(u\ _{(z)}\ hv) = h_{(1)}(z)h_{(2)}(u\ _{(z)}\ v)$.

Свойство (C1) означает, что для любых $u \in M$, $v \in N$ однозначно определено конечное число элементов $w_i \in V$ таких, что $(u\ _{(z)}\ v) = \sum\limits_i h_i(z^{-1})w_i$ для любых $z \in G$. В этом случае положим $\{u\ _{(z)}\ v\} = \sum\limits_i h_{i(1)}(z)h_{i(2)}w_i$.

Структура H-конформной алгебры на левом H-модуле C полностью определяется семейством операций (4) для $M = N = V = C$. Тождества конформных алгебр, описанные в определении 4, можно выразить в терминах операций $(\cdot\ _{(z)}\ \cdot)$ и $\{\cdot\ _{(z)}\ \cdot\}$. Например, H-конформная алгебра C является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$a\ _{(z)}\ (b\ _{(y)}\ c) = (a\ _{(z)}\ b)\ _{(yz)}\ c, \quad a, b, c \in C,\ z, y \in G. \tag{5}$$

Замечание. В случае $G = \mathbb{A}_1 \simeq (\Bbbk, +)$, $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, операция $(\cdot\ _{(z)}\ \cdot)$ совпадает с так называемой λ-скобкой на конформной алгебре [8].

Если M — некоторый левый H-модуль, то действие $\operatorname{Cend} M$ на M также полностью определяется семейством G-произведений $(\cdot\ _{(z)}\ \cdot) : \operatorname{Cend} M \otimes M \to M$, $z \in G$, построенных по отображению $a * u = a(u)$, $a \in \operatorname{Cend} M$, $u \in M$. На пространстве $\operatorname{Cend} M$ также определим операции $(\cdot\ _{(z)}\ \cdot)$ и $\{\cdot\ _{(z)}\ \cdot\}$, $z \in G$, по следующему правилу: если $a, b \in \operatorname{Cend} M$, $u \in M$,

$$b(u) = \sum_i h_i \otimes 1 \otimes_H v_i, \quad a(v_i) = \sum_j h_j \otimes 1 \otimes_H w_{ij},$$

то

$$(a\ _{(z)}\ b)(u) = \sum_{i,j} h_j(z^{-1})h_{i(1)}(z)h_{i(2)} \otimes 1 \otimes_H w_{ij} \tag{6}$$

и

$$\{a\ _{(z)}\ b\}(u) = \sum_{i,j} h_i(z)h_{j(1)}(z^{-1})h_{j(2)} \otimes 1 \otimes_H w_{ij}. \tag{7}$$

(Нетрудно непосредственно проверить, что $(a\ _{(z)}\ b)$ и $\{a\ _{(z)}\ b\}$ лежат в $\operatorname{Cend} M$ для любого $z \in G$.) Для операций (6) на $\operatorname{Cend} M$ выполнены условия (C2), (C3) и (5), но (C1) в общем случае неверно.

Предложение 2. *Линейное пространство* $\operatorname{Cend} M$ *относительно операций* $a \vdash b = (a\ _{(e)}\ b)$, $a \dashv b = \{a\ _{(e)}\ b\}$, *где* e — *единица группы* G, *является ассоциативной диалгеброй, обозначаемой* $\operatorname{Cend} M^{(0)}$.

Доказательство. Как было отмечено, для операций (6) на $\operatorname{Cend} M$ выполняется (5). Кроме того, имеют место тождества

$$\{\{a\ _{(z)}\ b\}\ _{(y)}\ c\} = \{a\ _{(yz)}\ \{b\ _{(y)}\ c\}\} = \{a\ _{(yz)}\ (b\ _{(z^{-1})}\ c)\}, \tag{8}$$

$$(\{a\ _{(z)}\ b\}\ _{(y)}\ c) = ((a\ _{(yz)}\ b)\ _{(y)}\ c) = (a\ _{(yz)}\ (b\ _{(z^{-1})}\ c)) \tag{9}$$

для любых $y, z \in G$. Проверим, например, (9). Пусть $u \in M$,

$$c(u) = \sum_k h_k \otimes 1 \otimes_H v_k, \quad b(v_k) = \sum_i h_i \otimes 1 \otimes_H v_{ki}, \quad a(v_{ki}) = \sum_j h_j \otimes 1 \otimes_H v_{kij}.$$

Тогда по (6), (7)

$$\{a\ _{(z)}\ b\}(v_k) = \sum_{i,j} h_i(z) h_{j(1)}(z^{-1}) h_{j(2)} \otimes 1 \otimes_H v_{kij},$$

$$(a\ _{(yz)}\ b)(v_k) = \sum_{i,j} h_j((yz)^{-1}) h_{i(1)}(yz) h_{i(2)} \otimes 1 \otimes_H v_{kij}.$$

Следовательно,

$$(\{a\ _{(z)}\ b\}\ _{(y)}\ c)(u) = \sum_{i,j,k} h_i(z) h_{j(1)}(z^{-1}) h_{j(2)}(y^{-1}) h_{k(1)}(y) h_{k(2)} \otimes 1 \otimes_H v_{kij}$$
$$= \sum_{i,j,k} h_i(z) h_j((yz)^{-1}) h_{k(1)}(y) h_{k(2)} \otimes 1 \otimes_H v_{kij}$$

и

$$((a\ _{(yz)}\ b)\ _{(y)}\ c)(u) = \sum_{i,j,k} h_j((yz)^{-1}) h_{i(1)}(yz) h_{i(2)}(y^{-1}) h_{k(1)}(y) h_{k(2)} \otimes 1 \otimes_H v_{kij}$$
$$= \sum_{i,j,k} h_j((yz)^{-1}) h_i(z) h_{k(1)}(y) h_{k(2)} \otimes 1 \otimes_H v_{kij},$$

поскольку группа G абелева. Полученные выражения совпадают для любого $u \in M$. Второе равенство в (9) следует из ассоциативности (5).

При $y = z = e$ равенства (5), (8), (9) превращаются в тождества ассоциативной диалгебры. □

Присоединенную диалгебру Ли (алгебру Лейбница) с операцией

$$[ab] = (a\ _{(e)}\ b) - \{b\ _{(e)}\ a\}, \quad a, b \in \operatorname{Cend} M,$$

будем обозначать через $\operatorname{gc} M^{(0)}$.

Определение 5. *Конформным представлением* ассоциативной (соответственно лиевой) диалгебры A на левом H-модуле M называется гомоморфизм диалгебр $\rho : A \to C^{(0)}$, где $C = \operatorname{Cend} M$ (соответственно $\operatorname{gc} M$). Если M является конечно-порожденным H-модулем, то ρ называется *представлением конечного типа.*

Для случая обычных алгебр при $G = \{e\}$ определение 5 совпадает с привычным определением представления алгебры на линейном пространстве. Согласно классическим теоремам Пуанкаре — Биркгофа — Витта и Адо — Ивасавы любая (конечномерная) алгебра Ли имеет точное (конечномерное) представление. Алгебра Лейбница, не являющаяся алгеброй Ли, не может иметь точного представления для $G = \{e\}$ (а также для любой конечной группы). Но оказывается, что для аффинной прямой $G = \mathbb{A}_1$ такое представление существует.

Теорема 3. *Любая (конечномерная) алгебра Лейбница имеет точное конформное представление (конечного типа) для $G = \mathbb{A}_1$.*

Доказательство. Пусть L — алгебра Лейбница, $L^{\mathrm{alg}} = L/\operatorname{Span}\{[ab] + [ba] \mid a, b \in L\}$ — обычная алгебра Ли. Образ элемента $a \in L$ в алгебре L^{alg} будем обозначать через $\bar{a}$.

Зафиксируем некоторый нетривиальный L^{alg}-модуль V и рассмотрим пространство $M_0 = V \oplus (L \otimes V)$.

Координатная алгебра Хопфа группы $G = \mathbb{A}_1$ есть алгебра многочленов $H = \Bbbk[T]$, где $\Delta(h) = h(T \otimes 1 + 1 \otimes T)$, $\varepsilon(h) = h(0)$, $S(h) = h(-T)$ при $h \in H$. Определим отображение $\rho : L \to \operatorname{gc} M^{(0)}$ для $M = H \otimes M_0$. Чтобы задать конформное линейное преобразование $\rho(a)$, $a \in L$, достаточно определить значения операций $(\rho(a) \,_{(z)}\, u) \in M$, $z \in \Bbbk$, $u \in M_0$. Положим

$$
\begin{aligned}
\rho(a) \,_{(z)}\, v &= \bar{a}v + z(a \otimes v), \quad v \in V, \\
\rho(a) \,_{(z)}\, (b \otimes v) &= b \otimes \bar{a}v + [ab] \otimes v, \quad b \in L,\ v \in V.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Получим инъективное отображение из L в $\operatorname{Cend} M$. Покажем, что это действительно конформное представление алгебры Лейбница. Достаточно убедиться, что

$$
\rho([ab]) = (\rho(a) \,_{(0)}\, \rho(b)) - \{\rho(b) \,_{(0)}\, \rho(a)\}
$$

для любых $a, b \in L$. Действительно, используя (5) и (9), получаем

$$
\begin{aligned}
((\rho(a) \,_{(0)}\, \rho(b)) - \{\rho(b) \,_{(0)}\, \rho(a)\}) \,_{(z)}\, v &= \rho(a) \,_{(0)}\, (\rho(b) \,_{(z)}\, v) - \rho(b) \,_{(z)}\, (\rho(a) \,_{(0)}\, v) \\
&= \rho(a) \,_{(0)}\, (\bar{b}v + z(b \otimes v)) - \rho(b) \,_{(z)}\, (\bar{a}v) \\
&= \bar{a}\bar{b}v + z(b \otimes \bar{a}v) + z[ab] \otimes v - \bar{b}\bar{a}v - zb \otimes \bar{a}v \\
&= [\bar{a}, \bar{b}]v + z[ab] \otimes v = \rho([ab]) \,_{(z)}\, v,
\end{aligned}
$$

так как $[\bar{a}, \bar{b}] = \overline{[ab]}$,

$$
\begin{aligned}
&((\rho(a) \,_{(0)}\, \rho(b)) - \{\rho(b) \,_{(0)}\, \rho(a)\}) \,_{(z)}\, (c \otimes v) \\
&\quad = \rho(a) \,_{(0)}\, (c \otimes \bar{b}v + [bc] \otimes v) - \rho(b) \,_{(z)}\, (c \otimes \bar{a}v + [ac] \otimes v) \\
&\quad = c \otimes [\bar{a}, \bar{b}]v + [[ab]c] \otimes v = \rho([ab]) \,_{(z)}\, (c \otimes v)
\end{aligned}
$$

для $c \in L$, $v \in V$.

Если $\dim L < \infty$, то пространство $\dim M_0$ может быть выбрано конечномерным и в этом случае ρ — представление конечного типа. $\square$

Из соотношений (10) видно, что образы элементов $a \in L$ при отображении ρ лежат в $\operatorname{Cur}\operatorname{End} M_0 \subset \operatorname{Cend} M$. Действительно, $\rho(a) = 1 \otimes a_0 - T \otimes a_1$, где

$$
a_0(v) = \bar{a}v, \quad a_0(b \otimes v) = b \otimes \bar{a}v + [ab] \otimes v, \quad a_1(v) = a \otimes v, \quad a_1(b \otimes v) = 0
$$

для любых $b \in L$, $v \in V$.

Следствие 4. *Любая (конечномерная) алгебра Лейбница вкладывается в конформную алгебру петель над обычной алгеброй линейных преобразований (конечномерного) линейного пространства.* $\square$

Этот результат можно использовать для доказательства специальности алгебр Лейбница.

Следствие 5 [5]. *Для любой алгебры Лейбница L существует ассоциативная диалгебра A такая, что $L \subset A^{(-)}$.* $\square$

В данном случае $A = (\mathrm{Cur}\,\mathrm{End}\, M_0)^{(0)}$.

Пусть L — некоторая алгебра Лейбница, $U(L)$ — универсальная обертывающая ассоциативная диалгебра для L, построенная в [4, 5]. Именно, $U(L)$ есть фактор свободной ассоциативной диалгебры $F(L)$, порожденной пространством L, по идеалу, порожденному в $F(L)$ элементами вида $a \vdash b - b \dashv a - [ab]$, $a, b \in L$. Мы будем использовать обозначение $\tilde{c}$ для образа элемента $c \in L \subset F(L)$ в диалгебре $U(L)$.

По универсальному свойству диалгебры $U(L)$ любое представление $\rho : L \to \mathrm{gc}\, M^{(0)} = (\mathrm{Cend}\, M^{(0)})^{(-)}$ индуцирует представление ассоциативной диалгебры $U(\rho) : U(L) \to \mathrm{Cend}\, M^{(0)}$. Если M — модуль из теоремы 3, построенный по L^{alg}-модулю $V = U(L^{\mathrm{alg}})$, то соответствующее конформное представление $L \to \mathrm{gc}\, M^{(0)}$ обозначим через ρ_U.

Теорема 6. *Представление $U(\rho_U)$ ассоциативной диалгебры $U(L)$ является точным.*

Доказательство. Мы докажем теорему, не опираясь на результаты [4, 5].

Выберем линейный базис B алгебры L в виде $B = \{a_i \mid i \in I\} \cup \{b_j \mid j \in J\}$, где $\{\bar{a}_i \mid i \in I\}$ — базис L^{alg}, $\{y_j \mid j \in J\}$ — базис ядра естественного гомоморфизма диалгебр $L \to L^{\mathrm{alg}}$. Множество I будем считать вполне упорядоченным.

Лемма 7. *Линейная оболочка множества элементов вида*

$$\tilde{c} \dashv \tilde{a}_{i_1} \dashv \dots \dashv \tilde{a}_{i_n}, \quad c \in B,\ i_1 \le \dots \le i_n,\ n \ge 0, \tag{11}$$

совпадает с $U(L)$

Доказательство. Заметим, что расстановка скобок на словах (11) может быть произвольной, так как операция $\dashv$ ассоциативна.

Используя тождества ассоциативной диалгебры и переписывающее правило $\tilde{x} \vdash \tilde{y} = \tilde{y} \dashv \tilde{x} + \widetilde{[xy]}$, $x, y \in L$, любой элемент диалгебры $U(L)$ можно представить в виде линейной комбинации слов вида

$$\tilde{c}_1 \dashv \tilde{c}_2 \dashv \dots \dashv \tilde{c}_n, \quad c_i \in B.$$

Поскольку $x \dashv \tilde{b}_j = 0$ для любого $x \in U(L)$, можно считать, что $c_2, \dots, c_n \in \{a_i \mid i \in I\}$. Осталось заметить, что если $i_1 > i_2$, то

$$x \dashv (\tilde{a}_{i_1} \dashv \tilde{a}_{i_2}) = x \dashv (\tilde{a}_{i_2} \dashv \tilde{a}_{i_1}) + x \dashv (\tilde{a}_{i_1} \dashv \tilde{a}_{i_2} - \tilde{a}_{i_1} \vdash \tilde{a}_{i_2}) + x \dashv \widetilde{[a_{i_1} a_{i_2}]}$$
$$= x \dashv (\tilde{a}_{i_2} \dashv \tilde{a}_{i_1}) + x \dashv \widetilde{[a_{i_1} a_{i_2}]}.$$

Таким образом, любой элемент в $U(L)$ может быть приведен к линейной комбинации слов (11). $\square$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что образы слов (11) при отображении $U(\rho_U)$ линейно независимы. Действительно, пусть u — слово вида (11). Вычислим $(U(\rho_U)(u)\ _{(z)}\ 1) \in M$ для $1 \in U(L^{\mathrm{alg}})$. Поскольку $U(\rho_U)$ — гомоморфизм диалгебр,

$$w = U(\rho_U)(u) = \{\tilde{c}\ _{(0)}\ \{\tilde{a}_{i_1}\ _{(0)} \dots \{\tilde{a}_{i_{n-1}}\ _{(0)}\ \tilde{a}_{i_n}\} \dots \}\}.$$

Следовательно, из (9) имеем

$$(w\ _{(z)}\ 1) = (\tilde{c}\ _{(z)}\ (\tilde{a}_{i_1}\ _{(0)}\ (\cdots\ _{(0)}\ (\tilde{a}_{i_n}\ _{(0)}\ 1) \dots))),$$

что нетрудно вычислить по (10):

$$(w_{(z)}\, 1) = \tilde{c}_{(z)}\, (\bar{a}_{i_1} \dots \bar{a}_{i_n}) = \bar{c}\bar{a}_{i_1} \dots \bar{a}_{i_n} + z(c \otimes \bar{a}_{i_1} \dots \bar{a}_{i_n}).$$

Коэффициенты при z линейно независимы в M, следовательно, линейно независимы образы $U(\rho_U)$ от слов вида (11). $\square$

Следствие 8 (PBW-теорема для алгебр Лейбница [5, 11]). *Универсальная обертывающая диалгебра $U(L)$ для алгебры Лейбница L как линейное пространство изоморфна $L \otimes U(L^{\mathrm{alg}})$.* $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колесников П. С.* Многообразия диалгебр и конформные алгебры // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 323–340.
2. *Kac V. G.* Vertex algebras for beginners. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. (Univ. Lecture Ser; V. 10).
3. *Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B.* Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory // Nuclear Phys. 1984. V. 241. P. 333–380.
4. *Loday J.-L., Pirashvili T.* Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and homology // Math. Ann. 1993. V. 296. P. 139–158.
5. *Loday J.-L.* Dialgebras // Dialgebras and related operads. Berlin: Springer Verl., 2001. P. 7–66. (Lecture Notes in Math.; V. 1763).
6. *Liu D.* Steinberg–Leibniz algebras and superalgebras // J. Algebra. 2005. V. 283, N 1. P. 199–221.
7. *Sweedler M.* Hopf algebras. New York: Benjamin, 1969.
8. *Kac V. G.* Formal distribution algebras and conformal algebras // Proc. XII-th Intern. Congr. in Mathematical Physics (ICMP'97). Cambridge, MA: Intern. Press, 1999. P. 80–97.
9. *Bakalov B., D'Andrea A., Kac V. G.* Theory of finite pseudoalgebras // Adv. Math. 2001. V. 162, N 1. P. 1–140.
10. *Kolesnikov P. S.* Identities of conformal algebras and pseudoalgebras // Comm. Algebra. 2006. V. 34, N 6. P. 1965–1979.
11. *Aymon M., Grivel P.-P.* Un théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt pour les algèbres de Leibniz // Comm. Algebra. 2003. V. 31, N 2. P. 527–544.

Статья поступила 14 августа 2007 г.

Колесников Павел Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
pavelsk@math.nsc.ru