Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 512.54

О КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ ПСЕВДО–MV–АЛГЕБР

О. А. Курылева

Аннотация. Пусть Υ_1 — совокупность квазимногообразий псевдо MV-алгебр, а Υ_2 — совокупность квазимногообразий решеточно упорядоченных групп. Относительно теоретико-множественного включения Υ_1 и Υ_2 являются решетками. Отмечены некоторые свойства Υ_1 и построено инъективное отображение φ из Υ_2 в Υ_1 такое, что $Z_1 \subseteq Z_2 \Leftrightarrow \varphi(Z_1) \subseteq \varphi(Z_2)$ для любых $Z_1, Z_2 \in \Upsilon_2$.

Ключевые слова: решеточно упорядоченная группа, псевдо-MV-алгебра, квазимногообразие.

§ 1. Введение

Напомним, что алгебра $\mathscr{A} = \langle A, \oplus, \urcorner, \sim, 1, 0\rangle$ типа $(2, 1, 1, 0, 0)$ называется *псевдо-MV-алгеброй*, если в $\mathscr{A}$ выполнены следующие тождества:

(A1) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;
(A2) $x \oplus 0 = 0 \oplus x = 0$;
(A3) $x \oplus 1 = 1 \oplus x = 1$;
(A4) $\sim 1 = 0$, $\urcorner 1 = 0$;
(A5) $\sim (\urcorner x \oplus \urcorner y) = \urcorner(\sim x \oplus \sim y)$;
(A6) $x \oplus \sim x \odot y = y \oplus \sim y \odot x = x \odot \urcorner y \oplus y = y \odot \urcorner x \oplus x$;
(A7) $x \odot (\urcorner x \oplus y) = (x \oplus \sim y) \oplus y$;
(A8) $\sim (\urcorner x) = x$,

где $x \odot y = \sim (\urcorner x \oplus \urcorner y)$

Если G — решеточно упорядоченная группа со строгой единицей u, то пара (G, u) называется *унитальной l-группой*. Пусть (G, u) — унитальная l-группа. Положим A равным интервалу $[0, u]$ в G и для $x, y \in A$ определим

$$x \oplus y = (x + y) \wedge u, \quad \urcorner x = u - x, \quad \sim x = -x + u, \quad 1 = u.$$

Нетрудно заметить, что алгебраическая система $\Gamma(G, u) = \langle A, \oplus, \urcorner, \sim, u, 0\rangle$ является псевдо-MV-алгеброй. А. Двуреченский [1] доказал, что для любой псевдо-MV-алгебры A существует единственная с точностью до изоморфизма унитальная l-группа G со строгой единицей u такая, что $\mathscr{A} = \Gamma(G, u)$.

§ 2. Решетка квазимногообразий псевдо-MV-алгебр

Описание решетки квазимногообразий l-групп дано в работе [2]. В соответствии с ним опишем решетку квазимногообразий псевдо-MV-алгебр.

Формула ϕ языка первого порядка сигнатуры $\sigma = \langle \oplus, \odot, \sim, \urcorner, 0, 1\rangle$ называется *квазитождеством*, если она имеет вид

$$(\forall x_1, \dots, \forall x_n)((A_1 = B_1) \& (A_1 = B_1) \& \dots \& (A_n = B_n) \Longrightarrow (A = B)),$$

где A_i, B_i $(i = 1, \dots n)$, A, B — термы сигнатуры σ от свободных переменных $x_1, \dots, x_n$. Квазимногообразие псевдо-MV-алгебр — это класс всех псевдо-MV-алгебр, удовлетворяющих некоторому множеству Φ квазитождеств сигнатуры σ.

Из стандартного результата для алгебраических систем [3] вытекает

Теорема 2.1. *Класс X псевдо-MV-алгебр является квазимногообразием тогда и только тогда, когда X наследствен, замкнут относительно фильтрованных произведений и содержит тривиальную систему.*

Ясно, что пересечение квазимногообразия псевдо-MV-алгебр является квазимногообразием. Поэтому для любого класса K псевдо-MV-алгебр существует минимальное квазимногообразие псевдо-MV-алгебр, содержащее K. Обозначим его через $q_{MV}(K)$.

К сигнатуре псевдо-MV-алгебр можно присоединить еще две бинарные операции $\vee, \wedge$, определенные по следующим правилам:

$$x \vee y = x \oplus (\sim x \odot y), \quad x \wedge y = x \odot (\neg x \oplus y).$$

Далее сигнатуру σ считаем наделенной операциями $\vee, \wedge$.

Кроме того, на псевдо-MV-алгебре можно также ввести отношение порядка, полагая $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $\neg x \oplus y = 1$. Очевидно, что введенные выше операции объединения и пересечения элементов x и y будут соответственно точной верхней и точной нижней гранями данных элементов относительно данного порядка. Из аксиом $A(3)$, $A(4)$, $A(8)$ следует, что для любого элемента x псевдо-MV-алгебры верно $\neg 0 \oplus x = 1$, что означает $0 \leq x$ для произвольного элемента x.

Непосредственная проверка показывает, что верен следующий результат.

Предложение 2.2. *Конъюнкция конечного числа квазитождеств сигнатуры σ эквивалентна одному квазитождеству в классе псевдо-MV-алгебр. В частности, если $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, то*

$$\forall \mathbf{x} \ (\&_{k=1}^{m} w_k(\mathbf{x}) = 0 \Longrightarrow w(\mathbf{x}) = 0)$$

эквивалентно квазитождеству

$$\forall \mathbf{x} \left(\left(\bigvee_{k=1}^{m} w_k(\mathbf{x}) = 0 \right) \Longrightarrow w(\mathbf{x}) = 0 \right).$$

Следствие 2.3. *Если квазимногообразие псевдо-MV-алгебр X имеет конечный базис квазитождеств, то X может быть определено одним квазитождеством.*

Множество Λ всех квазимногообразий псевдо-MV-алгебр является решеткой, где решеточная операция пересечения совпадает с теоретико-множественным пересечением:

$$X \wedge_\Lambda Y = X \cap Y,$$

а решеточная операция объединения есть теоретико-множественное пересечение всех квазимногообразий псевдо-MV-алгебр, содержащих X и Y:

$$X \vee_\Lambda Y = \bigcap \{W : X \cup Y \subseteq W\}.$$

§ 3. Квазирегулярные классы и унитальные решеточно упорядоченные группы

Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная псевдо-MV-алгебра, (G,u) — унитальная l-группа такая, что $\mathscr{A}=\Gamma(G,u)$, $\operatorname{Con}\mathscr{A}$ и $\operatorname{Con}G$ — решетки всех конгруэнций на $\mathscr{A}$ и G соответственно. Для $\varrho\in\operatorname{Con}G$ обозначим через $\psi_0(\varrho)$ эквивалентность на A, определенную по правилу:

$$a_1\psi_0(\varrho)a_2 \Longleftrightarrow a_1\varrho a_2,$$

где $a_1,a_2\in A$. По лемме 2.1 из [4] ψ_0 — изоморфизм решетки $\operatorname{Con}G$ на решетку $\operatorname{Con}\mathscr{A}$.

Пусть ϱ — некоторая конгруэнция на G, $g\in G$. Обозначим через $\bar g$ смежный класс по ϱ, содержащий g. Естественным образом строим фактор-группу $G/\varrho=\overline{G}$. Тогда $(\overline{G},\bar u)$ — унитальная l-группа.

Положим $\varrho_1=\psi_0(\varrho)$. Аналогично мы можем построить фактор-псевдо-MV-алгебру $\overline{\mathscr{A}}^1=\mathscr{A}/\varrho_1$, основным множеством которой является $\{\bar a^1\mid a\in A\}$.

Для каждого $a\in A$ имеем $\bar a^1=A\cap\bar a$. Для каждого $a\in A$ положим $\tau(\bar a^1)=\bar a$. Непосредственная проверка показывает, что τ — корректно определенное отображение множества $\overline{A}^1$ на интервал $[\bar 0,\bar u]$ из $\overline{G}$. Ясно, что $\tau(\bar 0^1)=\bar 0$ и $\tau(\bar u^1)=\bar u$, кроме того, $\tau(\bar x^1\oplus\bar y^1)=\bar x\oplus\bar y$, $\tau(\neg\bar x^1)=\neg\bar x$ и $\tau(\sim\bar x^1)=\sim\bar x$.

Таким образом, τ — изоморфизм псевдо-MV-алгебры $\overline{\mathscr{A}}^1$ на псевдо-MV-алгебру $\Gamma(\overline{G},\bar u)$.

Согласно [4] справедлива следующая

Лемма 3.1. *Пусть G_0 — l-группа, X — непустое подмножество G_0^+ и выполнены следующие условия:*

(1) X замкнуто относительно операции $+$,

(2) X — подрешетка решетки G_0^+,

(3) $x+X=X+x$ для каждого $x\in X$,

(4) если $x_1,x_2\in X$ и $x_1\leq x_2$, то $-x_1+x_2\in X$ и $x_2-x_1\in X$.

Положим $Y=\{x_1-x_2 : x_1,x_2\in X\}$. Тогда Y является l-подгруппой G_0 и $Y^+=X$.

Пусть теперь G_0 — подгруппа со строгой единицей u и $\mathscr{A}_1$ — подалгебра псевдо-MV-алгебры $\Gamma(G_0,u)$. Пусть A_1 — основное множество $\mathscr{A}_1$. Тогда $A_1\subseteq G_0^+$. Обозначим через X множество всех элементов $g\in G_0$, которые для подходящих $n\geq 1$ могут быть представлены в виде $g=a_1+a_2+\dots+a_n$ $(a_1,a_2,\dots,a_n\in A)$. Очевидно, что множество X удовлетворяет условию (1) леммы 3.1. Далее, используя предложения 3.7 и 3.8 из [1], заключаем, что условия (2)–(4) также выполнены для X. Снова положим $Y=\{x_1-x_2 : x_1,x_2\in X\}$. Тогда справедлива

Лемма 3.2. *Имеет место равенство $\mathscr{A}_1=\Gamma(Y,u)$, причем основным множеством является $A_1=[0,u]_2$, где $[0,u]_2$ — интервал в Y.*

Обозначим через $\mathscr{G}_0$ класс унитальных решеточно упорядоченных групп.

Определение 3.3. Непустой подкласс $Y\in\mathscr{G}_0$ называется *квазирегулярным*, если он удовлетворяет следующим условиям.

(1) Пусть $(H_1,u_1)\in Y$ и H_2 — l-подгруппа H_1 такая, что $u_1\in H_2$. Тогда $(H_2,u_1)\in Y$.

(2) Единичная группа принадлежит Y.

(3) Предположим, что $(G_i, u_i)_{i \in I}$ — индексированная система элементов Y, $\mathscr{D}$ — фильтр над I. Тогда фильтрованное произведение $\prod_{\mathscr{D}}(G_i, u_i)$ принадлежит Y.

Пусть $X \in \Upsilon_1$. Как отмечено ранее, каждый элемент $\mathscr{A}$ может быть записан в виде $\mathscr{A} = \Gamma(G, u)$, где $(G, u) \in \mathscr{G}_0$. Положим

$$Y = \{(G, u) \mid \Gamma(G, u) = \mathscr{A},\ \mathscr{A} \in X\}.$$

Лемма 3.4. *Класс Y квазирегулярен.*

Доказательство. Пусть $(H_1, u_1) \in Y$, тогда $\Gamma(H_1, u_1) = \mathscr{A}_1$. Пусть H_2 — l-подгруппа H_1 и $u_1 \in H_2$. Очевидно, что u_1 — строгая единица H_2, следовательно, мы можем построить псевдо-MV-алгебру $\mathscr{A}_2 = \Gamma(H_2, u_1)$.

Кроме того, $\mathscr{A}_2$ является подалгеброй $\mathscr{A}_1$. Обозначим через $\oplus_i$, $\neg_i$ и $\sim_i$ соответствующие операции в $\mathscr{A}_i$ $(i = 1, 2)$. Если $+$, $-$ и $\wedge$ — операции H_1, то ввиду того, что H_2 является l-подгруппой H_1, заключаем, что для $h, h' \in H_2$ справедливы равенства

$$h \oplus_1 h' = (h + h') \wedge u_1 = h \oplus_2 h', \quad \neg_1 h = u_1 - h = \neg_2 h, \quad \sim_1 h = -h + u_1 = \sim_2 h.$$

Таким образом, $(H_2, u_1) \in Y$.

Очевидно, единичная группа (E, e) принадлежит Y, поскольку ей соответствует тривиальная псевдо-MV-алгебра.

Рассмотрим $(G_i, u_i)_{i \in I}$ — индексированную систему элементов Y и $\mathscr{D}$ — фильтр над I. Положим $G_{\mathscr{D}} = \prod_{\mathscr{D}}(G_i, u_i)$. Очевидно, $G_{\mathscr{D}}$ является l-группой. В качестве сильной единицы этой l-группы примем элемент $u_0\mathscr{D}$ — класс эквивалентности элемента $u_0 = (u_1, \dots, u_n, \dots) \in \prod_{i \in I} G_i$. Тогда $\mathscr{A} = \Gamma(G_{\mathscr{D}}, u_0\mathscr{D})$ изоморфна фильтрованному произведению псевдо-MV-алгебр $\mathscr{A}_i = \Gamma(G_i, u_i)$, а ввиду того, что класс X замкнут относительно фильтрованных произведений, получаем $G_{\mathscr{D}} \in Y$, и лемма доказана.

Следствие 3.5. *Отображение $\psi_1 : \Upsilon_1 \to \mathscr{U}$, ставящее в соответствие классу $X \in \Upsilon_1$ класс Y является отображением совокупности Υ_1 в совокупность $\mathscr{U}$ классов унитальных решеточно упорядоченных групп.*

Для $Y_1 \in \mathscr{U}$ положим $X_1 = \{\mathscr{A} \mid \mathscr{A} = \Gamma(G, u), (G, u) \in Y_1\}$.

Лемма 3.6. *Класс X_1 — это квазимногообразие псевдо-MV-алгебр.*

Доказательство. Очевидно, что единичная алгебра содержится в X_1. Докажем, что X_1 замкнут относительно подалгебр. Пусть $\mathscr{A} \in X_1$, Значит, существует унитальная l-группа (G, u). Пусть $\mathscr{A}_1$ — подалгебра $\mathscr{A}$. Тогда по лемме 3.2 существует l-подгруппа G_1 группы G такая, что u — строгая единица G_1 и $\mathscr{A}_1 = \Gamma(G_1, u)$, откуда $\mathscr{A}_1 \in X_1$. Замкнутость X_1 относительно фильтрованных произведений доказывается аналогично лемме 3.4.

Пусть теперь $X_1 = \chi_1(Y_1)$ для каждого $Y_1 \in \mathscr{U}$. Из определения ψ_1 и χ_1 непосредственно вытекает

Лемма 3.7. *Имеет место равенство $\psi_1 = \chi_1^{-1}$. Кроме того, если $X_1, X_2 \in \Upsilon_1$ и $Y_1, Y_2 \in \mathscr{U}$, то*

$$X_1 \subseteq X_2 \Longrightarrow \psi_1(X_1) \subseteq \psi_1(X_2), \quad Y_1 \subseteq Y_2 \Longrightarrow \chi_1(Y_1) \subseteq \chi_1(Y_2).$$

Из леммы 3.7 вытекает

Теорема 3.8. *Отображение ψ_1 является изоморфизмом частично упорядоченного множества Υ_1 в частично упорядоченное множество $\mathscr{U}$.*

§ 4. Связь между $\mathscr{U}$ и Υ_2

Пусть Z — квазимногообразие l-групп. Обозначим $Y = \{(G, u) \mid G \in Z\}$.

Лемма 4.1. *Класс Y квазирегулярен.*

Доказательство. Выполнимость условий (1), (2) определения 3.3 очевидна. Докажем, что фильтрованное произведение унитальных l-групп из Y снова принадлежит классу Y. Рассмотрим индексированную систему $(G_i, u_i)_{i\in I}$ элементов Y и фильтр $\mathscr{D}$ над I. Положим $G_{\mathscr{D}} = \prod_{\mathscr{D}}(G_i, u_i)$. Очевидно, $G_{\mathscr{D}}$ является l-группой. В качестве сильной единицы этой l-группы возьмем элемент $u_0\mathscr{D}$. Тогда $\mathscr{A} = \Gamma(G_{\mathscr{D}}, u_0\mathscr{D})$ изоморфна фильтрованному произведению псевдо-MV-алгебр $\mathscr{A}_i = \Gamma(G_i, u_i)$, а ввиду того, что класс Z замкнут относительно фильтрованных произведений, получаем $G_{\mathscr{D}} \in Y$.

Если Z и Y такие, как указано выше, то $Y = \psi_2(Z)$. Следовательно, ψ_2 — отображение Υ_2 в $\mathscr{U}$. Ясно, что если $Z_1, Z_2 \in \Upsilon_2$, то

$$Z_1 \subseteq Z_2 \Longrightarrow \psi_2(Z_1) \subseteq \psi_2(Z_2).$$

Лемма 4.2. *Пусть $Z_1, Z_2 \in \Upsilon_2$. Предположим, что Z_1 не является подклассом Z_2, тогда $\psi_2(Z_1)$ не является подклассом $\psi_2(Z_2)$.*

Доказательство. Пусть, напротив,

$$\psi_2(Z_1) \subseteq \psi_2(Z_2). \tag{$*$}$$

Так как квазимногообразие можно определить с помощью квазитождеств и так как отношение $Z_1 \subseteq Z_2$ нарушается, заключаем, что существует квазитождество

$$\bigwedge_i p_i(x_1, x_2, \dots x_n) = e \to q(x_1, x_2, \dots x_n) = e, \tag{$**$}$$

где p_i, q, построенные с помощью операций $+, -, \vee, \wedge$, такие, что квазитождество $(**)$ истинно в Z_2 и ложно в Z_1. Следовательно, существует решеточно упорядоченная l-группа $G_1 \in Z_1$ такая, что в G_1 ложно квазитождество $(**)$, а значит, существуют элементы $g_1, \dots, g_2 \in G_1$ такие, что $\bigwedge_i p_i(g_1, g_2, \dots g_n) = e \to q(g_1, g_2, \dots g_n) = e$ ложна на G_1. Пусть $u = |g_1| \vee |g_2| \vee \dots \vee |g_n|$ и G_1' — выпуклая l-подгруппа G_1, порожденная элементом u. Тогда u — строгая единица G_1', отсюда $(G_1', u) \in \psi_2(Z_2)$. Это влечет, что $G_1' \in Z_2$, тогда G_1' удовлетворяет квазитождеству $(**)$. Так как $g_1, g_2, \dots, g_n \in G_1'$, приходим к противоречию.

Из лемм 4.1 и 4.2 следует

Предложение 4.3. *Отображение ψ_2 — инъективное отображение Υ_2 на $\mathscr{U}$ такое, что для $Z_1, Z_2 \in \Upsilon_2$*

$$Z_1 \subseteq Z_2 \Leftrightarrow \psi_2(Z_1) \subseteq \psi_2(Z_2).$$

Из леммы 3.7 вытекает

Теорема 4.4. *Существует инъективное отображение φ из Υ_2 в Υ_1 такое, что для $Z_1, Z_2 \in \Upsilon_2$*

$$Z_1 \subseteq Z_2 \Leftrightarrow \varphi_2(Z_1) \subseteq \varphi_2(Z_2).$$

Непосредственно из теоремы 4.4 и теоремы А. С. Гурченкова о немодулярности решетки квазимногообразий l-групп [2] получаем

Следствие 4.5. *Решетка Λ всех квазимногообразий псевдо-MV-алгебр не модулярна и, следовательно, не дистрибутивна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dvurečenskij A.* Pseudo MV-algebras are intervals in l-groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 2002. V. 72. P. 427–445.

2. *Kopytov V. M., Medvedev N. Ya.* Quasivarieties and varieties of lattice-ordered groups. Ordered groups and infinite permutation groups. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1996.

3. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

4. *Jakubik J.* On varieties of pseudo MV-algebras. // Czechoslovak Math. J. 2000. V. 53, N 128. P. 1021–1038.

Статья поступила 29 мая 2007 г.

Курылева Ольга Александровна
Алтайский гос. университет, пр. Ленина, 61, Барнаул 656049
kuryleva@rambler.ru