Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 517.957:517.548

КВАЗИВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ И НУЛЬ–ЛАГРАНЖИАНЫ В ПРОБЛЕМАХ УСТОЙЧИВОСТИ КЛАССОВ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. А. Егоров

Аннотация. Получены теоремы устойчивости для классов решений дифференциальных уравнений, построенных с помощью квазивыпуклых функций и нуль-лагранжианов.

Ключевые слова: квазивыпуклая функция, нуль-лагранжиан, устойчивость классов отображений.

Первые результаты по устойчивости классов плоских и пространственных конформных отображений получены М. А. Лаврентьевым при исследовании квазиконформных отображений [1, 2]. Теория устойчивости конформных отображений, возникшая в рамках теории квазиконформных отображений, в дальнейшем развивалась главным образом усилиями самого М. А. Лаврентьева, а также П. П. Белинского и Ю. Г. Решетняка (см., например, монографии [3–8] и библиографию в них). Одним из основных результатов этой теории является следующее утверждение (см., например, [3, 5–8]): *для шара* $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *каждое* K*-квазиконформное отображение* $v : B(x,r) \to \mathbb{R}^n$ *с коэффициентом* K*, близким к* 1*, имеет малое отклонение в* C*-норме от конформных отображений на каждом подшаре* $B(x,\rho r)$, $0 < \rho < 1$*, при этом отклонение стремится к нулю при* $K \to 1$.

В силу использования свойства устойчивости конформных отображений при получении важных теорем как в самой теории квазиконформных отображений, так и в ее приложениях возник интерес к поиску других классов отображений, обладающих свойствами устойчивости. Отталкиваясь от теории устойчивости конформных отображений, А. П. Копылов в статье [9] (см. также монографию [7]) предложил общую концепцию устойчивости в C-норме классов отображений, названную им концепцией ξ-устойчивости. Эта концепция регулярным образом согласована с теорией устойчивости конформных отображений (см. [7, 9]). Действительно, сформулированный выше результат равносилен теореме о ξ-устойчивости класса конформных отображений в классе квазиконформных отображений (см. [7, гл. 1, § 1.3]). В рамках концепции ξ-устойчивости получены теоремы об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений, классов решений эллиптических систем линейных уравнений в частных производных, классов гомотетий и ряда других классов отображений (см.,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ, Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2006 г. № 117 и Фонда содействия отечественной науке.

например, работы А. П. Копылова [7, 9, 10], Н. С. Даирбекова [11, 12], Т. В. Соколовой [13, 14] и библиографию в них).

Развивая теорию ξ-устойчивости, в этой статье, как и в [15], мы исследуем устойчивость классов решений нелинейных дифференциальных уравнений

$$F(u'(x)) = G(u'(x)), \tag{1}$$

строящихся с помощью квазивыпуклых функций F и нуль-лагранжианов G. Большинство упомянутых выше классов отображений могут быть рассмотрены как классы решений уравнений вида (1). В частности, если для отображения $u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, выпуклая функция F и нуль-лагранжиан G определены равенствами $F(u'(x)) = |u'(x)|^n$ и $G(u'(x)) = \det u'(x)$, то (сохраняющие ориентацию) конформные отображения являются решениями уравнения (1). Отметим, что в [15] мы исследовали устойчивость классов решений уравнений (1) в частном случае, когда функции F являются выпуклыми. Некоторые частные случаи результатов настоящей статьи анонсированы в [16].

Основным результатом данной статьи является теорема о ξ-устойчивости класса решений уравнения (1), построенного с помощью удовлетворяющих некоторым предположениям квазивыпуклой функции F и нуль-лагранжиана G (теорема 1). Для этого класса решений установлены также оценки устойчивости в C-норме на компактно вложенных подобластях (теорема 4). Если функция F является строго квазивыпуклой, то в добавление к оценкам устойчивости в C-норме установлены оценки близости производных в норме пространства Лебега (теоремы 5 и 6). При получении теорем устойчивости для классов решений уравнения (1) исследован ряд свойств решений дифференциальных неравенств

$$F(v'(x)) \leq KG(v'(x)) \tag{2}$$

с $K \geq 1$. В частности, доказаны теоремы о замкнутости множеств таких решений относительно локальной сходимости в пространстве Лебега (теорема 7) и о их гёльдеровой регулярности (теорема 8).

Опишем структуру статьи. В § 1 приводятся основные используемые в работе обозначения и термины. В § 2 содержатся определения исследуемых классов решений и формулировки основных результатов. В § 3 исследуются свойства решений дифференциальных неравенств (2). Доказательству теорем 2 и 3 посвящен § 4. В § 5 установлены следствия из теорем о сходимости с функционалом, необходимые для доказательства основных теорем 5 и 6. Доказательство теоремы 5 изложено в § 6.

§ 1. Обозначения и терминология

Пусть A — множество в $\mathbb{R}^n$. Топологическая граница множества A обозначается через ∂A. Диаметр множества A определяется равенством $\operatorname{diam} A := \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$. Внешняя мера Лебега множества A обозначается символом $|A|$.

Множество $\mathbb{R}^{m\times n} := \{\zeta = (\zeta_{\mu\nu})_{\substack{\mu=1,\dots,m,\\ \nu=1,\dots,n}} : \zeta_{\mu\nu} \in \mathbb{R},\ \mu = 1,\dots,m,\ \nu = 1,\dots,n\}$ состоит из всех вещественных $m\times n$-матриц. Мы отождествляем матрицу $\zeta = (\zeta_{\mu\nu})_{\substack{\mu=1,\dots,m,\\ \nu=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ с линейным отображением $(\zeta_1,\dots,\zeta_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, где $\zeta_\mu(x) := \sum_{\nu=1}^{n} \zeta_{\mu\nu}x_\nu$, $\mu = 1,\dots,m$, $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Операторная норма в пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$ задается равенством $|\zeta| := \sup\{|\zeta(x)| : x \in \mathbb{R}^n,\ |x| <$

1}, а норма Гильберта — Шмидта — $\|\zeta\| := \left(\sum\limits_{\mu=1}^{m}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\zeta_{\mu\nu}^2\right)^{1/2}$. Число k-наборов упорядоченных индексов в множестве $\Gamma_n^k := \{I = (i_1,\dots,i_k) : 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n,\ i_\varkappa \in \{1,\dots,n\},\ \varkappa = 1,\dots,k\}$ равно биномиальному коэффициенту $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $I \in \Gamma_n^k$, то полагаем $x_I := (x_{i_1},\dots,x_{i_k}) \in \mathbb{R}^k$. Элементами k-й ассоциированной матрицы $M_k(\zeta) := (\det_{JI}\zeta)_{J\in\Gamma_m^k, I\in\Gamma_n^k} \in \mathbb{R}^{\binom{m}{k}\times\binom{n}{k}}$ для матрицы $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$ являются $k\times k$-миноры $\det_{JI}\zeta := \det\begin{pmatrix}\zeta_{j_1 i_1} & \dots & \zeta_{j_1 i_k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \zeta_{j_k i_1} & \dots & \zeta_{j_k i_k}\end{pmatrix}$. Здесь и далее мы индексируем элементы матрицы $\Upsilon \in \mathbb{R}^{\binom{m}{k}\times\binom{n}{k}}$ лексикографически упорядоченными k-наборами $I \in \Gamma_n^k$ и $J \in \Gamma_m^k$, т. е. $\Upsilon = (\gamma_{JI})_{J\in\Gamma_m^k, I\in\Gamma_n^k}$. Мы отождествляем $M_1(\zeta)$ с ζ.

Матрица Якоби отображения $u = (u_1,\dots,u_m) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в точке $x \in U$ есть матрица $u'(x) := \left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}(x)\right)_{\substack{\mu=1,\dots,m,\\ \nu=1,\dots,n}}$. Если $I \in \Gamma_n^k$ и $J \in \Gamma_m^k$, то $\frac{\partial u_J}{\partial x_I}(x) = \frac{\partial(u_{j_1},\dots,u_{j_k})}{\partial(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}(x) := \det_{JI} u'(x)$.

Пусть $\mathscr{V}$ — вещественное векторное пространство. Говорят, что функция $\Phi : \mathscr{V} \to \mathbb{R}$ *положительно однородна степени* $p \in \mathbb{R}$, если $\Phi(tx) = t^p\Phi(x)$ для всех чисел $t > 0$ и векторов $x \in \mathscr{V}\setminus\{0\}$. Функция $\Phi : \mathscr{V} \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если $\Phi(tx + (1-t)y) \le t\Phi(x) + (1-t)\Phi(y)$ для всех чисел $t \in (0,1)$ и векторов $x, y \in \mathscr{V}$. Говорят, что выпуклая функция Φ *строго* (*существенно*) *выпуклая*, если выполнено строгое неравенство $\Phi(tx + (1-t)y) < t\Phi(x) + (1-t)\Phi(y)$ при $x \ne y$. Функция $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ называется *поливыпуклой* (*строго поливыпуклой*), если существует выпуклая (соответственно строго выпуклая) функция $\Phi : \mathbb{R}^{\binom{m}{1}\times\binom{n}{1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{\binom{m}{\min\{m,n\}}\times\binom{n}{\min\{m,n\}}} \to \mathbb{R}$ такая, что $F(\zeta) = \Phi(M_1(\zeta),\dots,M_{\min\{m,n\}}(\zeta))$, $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Поливыпуклые интегранды впервые введены Боллом в статье [17], а строго поливыпуклые интегранды — Боллом и Марсденом в [18] при исследовании проблем нелинейной теории упругости. Следуя Морри [19], непрерывную функцию $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ называем *квазивыпуклой*, если выполнено неравенство

$$|B(0,1)|F(\zeta) \le \int\limits_{B(0,1)} F(\zeta + \varphi'(x))\,dx \tag{3}$$

для всех функций $\varphi \in C_0^\infty(B(0,1);\mathbb{R}^m)$ и матриц $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$. В силу [19] каждая квазивыпуклая функция является локально липшицевой. Для функции $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ справедливы следующие импликации [17, 19] (см. также [8, 20–23]): F выпуклая $\Longrightarrow$ F поливыпуклая $\Longrightarrow$ F квазивыпуклая. Если $\min\{m,n\} = 1$, то понятия выпуклости, поливыпуклости и квазивыпуклости эквивалентны. Пусть $p \ge 1$. Следуя М. А. Сычеву [24], говорим, что квазивыпуклая функция F является *строго p-квазивыпуклой*, если для матрицы $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и чисел $\varepsilon, C > 0$ существует число $\delta = \delta(\zeta,\varepsilon,C) > 0$ такое, что для каждого отображения $\varphi \in C_0^\infty(B(0,1);\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющего неравенству $\|\varphi'\|_{L^p(B(0,1);\mathbb{R}^{m\times n})} \le C|B(0,1)|^{1/p}$, условие $\int\limits_{B(0,1)} F(\zeta + \varphi'(x))\,dx \le |B(0,1)|(F(\zeta) + \delta)$ влечет соотношение $|\{x \in B(0,1) : |\varphi'(x)| \ge \varepsilon\}| \le \varepsilon|B(0,1)|$. Отметим, что в математической литературе термин строгой квазивыпуклости также используется для обозначения другого (близкого, но неэквивалентного рассматриваемому) свойства, состоящего в том, что в определении квазивыпуклости (3) выполнено строгое неравенство для отображений φ, отличных от нулевого (см., например, [25]). В данной работе мы используем этот термин в определении М. А. Сычева [24]. В случае $p > 1$ для рассматриваемых в нашей работе функций F понятие строгой p-квазивыпуклости эквивалентно понятию строгой замкнутой p-квазивыпуклости из работы Кристенсена [26], определяемому в терминах теории градиентных мер Янга (см. [24, предложение 3.4]). Следуя Эванс [27] и Эванс и Гариепи [28], непрерывную функцию $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ будем называть *равномерно строго p-квазивыпуклой*, если

$$|B(0,1)|F(\zeta) + c \int\limits_{B(0,1)} |\varphi'(x)|^p\,dx \le \int\limits_{B(0,1)} F(\zeta + \varphi'(x))\,dx$$

для некоторого $c > 0$ и для всех $\varphi \in C_0^\infty(B(0,1);\mathbb{R}^m)$ и $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Для функции $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ мы имеем следующую импликацию: F равномерно строго p-квазивыпуклая $\Longrightarrow$ F строго p-квазивыпуклая. Действительно, пусть F — равномерно строго p-квазивыпуклая функция. Пусть $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\varepsilon, C > 0$, $\varphi \in C_0^\infty(B(0,1);\mathbb{R}^m)$ и $\|\varphi'\|_{L^p(B(0,1);\mathbb{R}^{m\times n})} \le C|B(0,1)|^{1/p}$. Имеем

$$\begin{aligned}|\{x \in B(0,1) : |\varphi'(x)| \ge \varepsilon\}| &\le \varepsilon^{-p} \int\limits_{B(0,1)} |\varphi'(x)|^p\,dx \\ &\le c^{-1}\varepsilon^{-p}\biggl(\int\limits_{B(0,1)} F(\zeta + \varphi'(x))\,dx - |B(0,1)|F(\zeta)\biggr).\end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из равномерно строгой p-квазивыпуклости функции F. Тогда неравенство $\int\limits_{B(0,1)} F(\zeta + \varphi'(x))\,dx \le |B(0,1)|(F(\zeta) + \delta)$ с $\delta = c\varepsilon^{p+1}$ влечет $|\{x \in B(0,1) : |\varphi'(x)| \ge \varepsilon\}| \le \varepsilon|B(0,1)|$. Следовательно, F является строго p-квазивыпуклой. Отметим, что в определениях квазивыпуклости, строгой p-квазивыпуклости и равномерно строгой p-квазивыпуклости шар $B(0,1)$ может быть заменен любой ограниченной областью U с $|\partial U| = 0$ (см., например, [23]). Мы называем функцию $G : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ *нуль-лагранжианом*, если функции G и $-G$ являются квазивыпуклыми. Термин «нуль-лагранжиан» возник в силу следующего факта. Соответствующее вариационному интегралу $\int\limits_U G(u'(x))\,dx$ с нуль-лагранжианом G уравнение Эйлера — Лагранжа тождественно удовлетворяется при всех допустимых деформациях $u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (см. [29], а также [8, 20–23]). Только аффинные комбинации миноров, называемые *квазиаффинными функциями*, являются нуль-лагранжианами [30, 31] (см. также [8, 17, 19–23, 29]), т. е.

$$G(\zeta) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} \sum_{J\in\Gamma_m^k, I\in\Gamma_n^k} \gamma_{JI} \det\nolimits_{JI} \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}, \tag{4}$$

для некоторых $\gamma_0, \gamma_{JI} \in \mathbb{R}$.

Другие используемые нами обозначения и определения вводятся по мере необходимости.

§ 2. Определение классов и формулировка основных результатов

Фиксируем число $k \in \mathbb{N}$, $2 \le k \le \min\{n, m\}$. Для непрерывных функций $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ и $G : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ мы в дальнейшем считаем, что выполнены следующие предположения:

(H1) F является квазивыпуклой функцией;

(H2) G является нуль-лагранжианом;

(H3) F и G положительно однородны степени k;

(H4) $\sup\{K \ge 0 : F(\zeta) \ge KG(\zeta),\ \zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}\} = 1$;

(H5) $c_F := \inf\{F(\zeta) : \zeta \in \mathbb{R}^{m\times n},\ |\zeta| = 1\} > 0$;

(H6) $d_G := \sup\Big\{ \sum\limits_{J\in\Gamma_m^k, I\in\Gamma_n^k} |\gamma_{JI}||x_I|^2 : x \in \mathbb{R}^n,\ |x| = 1\Big\} < kc_F/(n-k)$ в случае $k < n$.

Здесь коэффициенты γ_{JI} из представления (4) для нуль-лагранжиана G. В силу (H3) это представление состоит только из $k \times k$-миноров, т. е.

$$G(\zeta) = \sum_{J\in\Gamma_m^k, I\in\Gamma_n^k} \gamma_{JI} \det\nolimits_{JI} \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}. \tag{5}$$

Используя (H4), легко показать, что $G \not\equiv 0$. Поэтому $d_G > 0$. Так как функция F непрерывна, из (H3) следуют неравенства

$$c_F|\zeta|^k \le F(\zeta) \le C_F|\zeta|^k, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}, \tag{6}$$

с константами c_F из (H5) и $C_F := \sup\{F(\zeta) : \zeta \in \mathbb{R}^{m\times n},\ |\zeta| = 1\} < \infty$.

Для $K \ge 1$ обозначим через $\mathfrak{G}(K) = \mathfrak{G}_{F,G}(K)$ класс отображений $v \in W^{1,k}_{\mathrm{loc}}(V; \mathbb{R}^m)$, определенных на областях $V \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих дифференциальному неравенству (2) для п. в. $x \in V$. Для отображения $v \in W^{1,k}_{\mathrm{loc}}(V; \mathbb{R}^m)$ обозначим через $K(v)$ наименьшую постоянную $K \ge 1$ в (2).

Из предположения (H4) следует, что класс $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(1)$ состоит из решений u дифференциального соотношения (1).

Обозначим через W^1 класс отображений $v : V \to \mathbb{R}^m$, определенных на областях $V \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих условию $v \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(V; \mathbb{R}^m)$ для некоторого числа $p = p(v) > n$.

Одним из основных результатов об устойчивости класса $\mathfrak{G}$ является

Теорема 1. *Пусть функции F и G удовлетворяют предположениям* (H1)–(H6). *Тогда класс $\mathfrak{G}$ ξ-устойчив относительно класса W^1.*

Следуя А. П. Копылову [7, 9] (см. также [5]), говорят, что класс $\mathfrak{G}$ *ξ-устойчив относительно класса W^1*, если класс $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям ξ-нормальности $\mathfrak{g}_1$–$\mathfrak{g}_6$ из [9] (см. также [7, гл. 1] и условия (K_1)–(K_4) в [5, гл. II, § 12.6]) и существует функция $\alpha = \alpha_{\mathfrak{G}} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такая, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \alpha(\varepsilon) = \alpha(0) = 0$ и $\xi(v, \mathfrak{G}) \le \alpha(\Xi(v, \mathfrak{G}))$ для всех отображений $v \in W^1$. Здесь функционал $\xi(\cdot, \mathfrak{G})$ глобальной близости и функционал $\Xi(\cdot, \mathfrak{G})$ локальной близости определяются следующим образом [7, 9] (см. также [5]). Возьмем число $\rho \in (0, 1]$ и шар $B = B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$. Для данного произвольного локально ограниченного отображения $v : B \to \mathbb{R}^m$ обозначим через $\xi_{\rho,B}(v, \mathfrak{G})$ точную нижнюю грань чисел $\varepsilon \ge 0$, для которых найдется отображение $u : B \to \mathbb{R}^m$ из класса $\mathfrak{G}$ такое, что $\|v - u\|_{C(B(x,\rho r);\mathbb{R}^m)} \le \varepsilon \operatorname{diam} v(B)$. Функционал

$$\xi_B(v, \mathfrak{G}) := \int_0^1 \xi_{\rho,B}(v, \mathfrak{G})\, d\rho$$

измеряет близость отображения v к классу $\mathfrak{G}$ в равномерной метрике внутри шара B, отнесенной к размерам $v(B)$. Для отображения $v : V \to \mathbb{R}^m$, определенного на области $V \subset \mathbb{R}^n$, полагаем

$$\xi(v,\mathfrak{G}) := \sup\{\xi_B(v,\mathfrak{G}) : B \subset V\}, \quad \xi_\rho(v,\mathfrak{G}) := \sup\{\xi_{\rho,B}(v,\mathfrak{G}) : B \subset V\},$$
$$\Xi(x,v,\mathfrak{G}) := \limsup_{r\to 0} \xi_{B(x,r)}(v,\mathfrak{G}), \quad \Xi(v,\mathfrak{G}) := \sup\{\Xi(x,v,\mathfrak{G}) : x \in V\};$$

в определении $\xi(v,\mathfrak{G})$ и $\xi_\rho(v,\mathfrak{G})$ точная верхняя грань берется по всем шарам, лежащим в области V. Функционалы $\xi(v,\mathfrak{G})$ и $\xi_\rho(v,\mathfrak{G})$ глобальной близости измеряют близость отображения v к классу $\mathfrak{G}$ внутри каждого шара, компактно содержащегося в области определения отображения v, а функционалы $\Xi(x,v,\mathfrak{G})$ и $\Xi(v,\mathfrak{G})$ локальной близости — соответственно в малых шарах с центром в точке x и во всех малых шарах из области определения отображения v. Таким образом, теорема 1 означает, что отображение $v \in W^1$, локально близкое к отображениям класса $\mathfrak{G}$, глобально близко к ним на каждом шаре, компактно содержащемся в области определения отображения v.

Замечание 1. Используя теоремы 7 и 8 и следствие 1 из § 3, легко показать, что класс $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям ξ-нормальности $\mathfrak{g}_1$–$\mathfrak{g}_6$ из [7, 9]. В частности, условие $\mathfrak{g}_4$ (см. также условие (K_3) в [5, гл. II, § 12.6]) означает, что класс $\mathfrak{G}$ замкнут относительно локально равномерной сходимости.

Теорема 1 является прямым следствием следующих ниже теорем 2 и 3 и теоремы 3 из статьи А. П. Копылова [9] (см. также [7, теорема 1.1.3]), утверждающей, что функционалы ξ и ξ_ρ, $\rho \in (0,1)$, асимптотически эквивалентны.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *найдется функция* $\bar\alpha(\varepsilon) = \bar\alpha_{F,G}(\varepsilon)$, *определенная для* $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$ *и такая, что* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \bar\alpha(\varepsilon) = \bar\alpha(0) = 0$ *и для каждого отображения* $v \in W^1$ *неравенство* $\Xi(v,\mathfrak{G}) \le \varepsilon < \varepsilon_0$ *влечет* $v \in \mathfrak{G}(1+\bar\alpha(\varepsilon))$.

Теорема 3. *Пусть* $\rho \in (0,1)$. *При выполнении условий теоремы* 1 *существует функция* $\beta_\rho(K) = \beta_{\rho,F,G}(K)$, *определенная для* $1 \le K < K_0$ *и такая, что* $\lim\limits_{K\to 1} \beta_\rho(K) = \beta_\rho(1) = 0$ *и для любого отображения* $v : B(a,r) \to \mathbb{R}^m$ *шара* $B(a,r) \subset \mathbb{R}^n$ *из класса* $\mathfrak{G}(K)$ *с некоторым* $1 \le K < K_0$ *найдется отображение* $u : B(a,r) \to \mathbb{R}^m$ *класса* $\mathfrak{G}$ *такое, что*

$$\|v-u\|_{C(B(a,\rho r);\mathbb{R}^m)} \le \beta_\rho(K)\operatorname{diam} v(B(a,r)). \tag{7}$$

Теорема 3 может быть дополнена следующим утверждением о близости на компактно вложенных подобластях.

Теорема 4. *Пусть* V — *область в* $\mathbb{R}^n$, *и пусть* U — *компактное подмножество в* V. *При выполнении условий теоремы* 1 *существует функция* $\bar\beta(K) = \bar\beta_{V,U,F,G}(K)$, *определенная для* $1 \le K < K_0$ *и такая, что* $\lim\limits_{K\to 1} \bar\beta(K) = \bar\beta(1) = 0$ *и для каждого отображения* $v : V \to \mathbb{R}^m$ *класса* $\mathfrak{G}(K)$ *с некоторым* $1 \le K < K_0$ *найдется отображение* $u : V \to \mathbb{R}^m$ *класса* $\mathfrak{G}$ *такое, что*

$$\|v-u\|_{C(U;\mathbb{R}^m)} \le \bar\beta(K)\operatorname{diam} v(V). \tag{8}$$

Следующие теоремы усиливают теоремы 3 и 4 в случае, когда функция F удовлетворяет следующему предположению:

($\mathrm{H1}'$) F является строго k-квазивыпуклой.

Заметим, что предположение (H1$'$) более сильное, чем (H1). В этом случае в дополнение к оценкам (7) и (8) близости (в C-норме) отображений из класса $\mathfrak{G}(K)$ к отображениям класса $\mathfrak{G}$ мы получаем оценки близости (в L^k-норме) производных этих отображений.

Теорема 5. *Предположим, что функции F и G удовлетворяют предположениям* (H1$'$) *и* (H2)–(H6). *Тогда заключение теоремы* 3 *справедливо с одновременным выполнением неравенства* (7) *и следующего неравенства:*

$$\|v' - u'\|_{L^k(B(a,\rho r);\mathbb{R}^{m\times n})} \le \beta_\rho(K) r^{(n-k)/k} \operatorname{diam} v(B(a,r)).$$

Теорема 6. *При выполнении условий теоремы* 5 *заключение теоремы* 4 *справедливо с одновременным выполнением неравенства* (8) *и неравенства*

$$\|v' - u'\|_{L^k(U;\mathbb{R}^{m\times n})} \le \bar\beta(K) \operatorname{diam} v(V).$$

Обсудим условия, достаточные для выполнения предположений (H1), (H1$'$) или (H6). В § 1 отмечено, что поливыпуклые (в частности, выпуклые) функции являются квазивыпуклыми, т. е. удовлетворяют (H1), а равномерно строго k-квазивыпуклые функции являются строго k-квазивыпуклыми, т. е. удовлетворяют (H1$'$). По [27, лемма 8.2] строго выпуклая функция $F(\zeta) = \|\zeta\|^k$ равномерно строго k-квазивыпукла. Заметим, что сумма (равномерно) строго k-квазивыпуклой функции и квазивыпуклой функции является (равномерно) строго k-квазивыпуклой функцией. Сформулируем еще одно условие, достаточное для выполнения (H1$'$) (см. следствие 2 в § 5). Для функции F, удовлетворяющей оценке $0 \le F(\zeta) \le C(|\zeta|^k + 1)$, $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$, с некоторой константой $C > 0$, выполнено предположение (H1$'$), если F удовлетворяет с некоторым числом $\varkappa \in \mathbb{N}$, $1 \le \varkappa \le k$, следующему условию:

(H1$''$) существуют число $s \in \mathbb{N}$, строго выпуклая функция $\Phi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ и линейное отображение $\Psi : \mathbb{R}^{\binom{m}{1}\times\binom{n}{1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{\binom{m}{\varkappa}\times\binom{n}{\varkappa}} \to \mathbb{R}^s$ такие, что $F(\zeta) = \Phi(\Psi(M_1(\zeta), \dots, M_\varkappa(\zeta)))$, $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$, и справедливо неравенство

$$|\Psi(\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_\varkappa)| \ge c|\Upsilon_1| \tag{9}$$

для всех $(\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_\varkappa) \in \mathbb{R}^{\binom{m}{1}\times\binom{n}{1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{\binom{m}{\varkappa}\times\binom{n}{\varkappa}}$ и некоторого $c > 0$.

Отметим, что условие (H1$''$) влечет поливыпуклость функции F. В случае $\varkappa = 1$ условие (H1$''$) эквивалентно строгой выпуклости функции F. В случае $\varkappa = \min\{m, n\}$ строго поливыпуклые функции являются примерами функций, удовлетворяющих (H1$''$).

Наконец, отметим, что предположение (H6) выполнено, если справедливо следующее условие:

(H6$'$) $\bar d_G := \sup\big\{ \sum\limits_{J\in\Gamma_m^k} |\gamma_{JI}| : I \in \Gamma_n^k \big\} < c_F / \binom{n-1}{k}$ в случае $k < n$.

Действительно, если справедливо условие (H6$'$), то для $x \in \mathbb{R}^n$ с $|x| = 1$ имеем

$$\sum_{J\in\Gamma_m^k, I\in\Gamma_n^k} |\gamma_{JI}||x_I|^2 \le \bar d_G \sum_{I\in\Gamma_n^k} |x_I|^2 = \bar d_G \binom{n-1}{k-1} < c_F \binom{n-1}{k-1} \Big/ \binom{n-1}{k} = \frac{kc_F}{n-k}.$$

Это влечет выполнение (H6).

Теоремы 1–6 для частного случая, когда функция F является выпуклой (строго выпуклой в теоремах 5 и 6) и выполнено предположение (H6$'$), получены в работе [15]. При выполнении предположения (H6$'$) теорема 3 и частные случаи теоремы 5, когда функция F является равномерно строго k-квазивыпуклой или удовлетворяет условию (H1$''$), анонсированы в работе автора [16].

В заключение параграфа напомним примеры хорошо известных ξ-устойчивых классов отображений, которые можно рассматривать как классы решений уравнений (1), построенных с помощью удовлетворяющих нашим предположениям функций F и G.

Пусть $k = n = m \geq 2$. Тогда функции $F(\zeta) = |\zeta|^n$ и $G(\zeta) = \det \zeta$ удовлетворяют (H1$'$) и (H2)–(H5) (в случае $k = n$ условие (H6) не является ограничением). Определяемый этими функциями класс $\mathfrak{G}$ состоит из «сохраняющих ориентацию» обобщенно конформных отображений, т. е. из сужений на области сохраняющих ориентацию мёбиусовых преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ или постоянных отображений (при $n = 2$ из голоморфных отображений). Классы $\mathfrak{G}(K)$ являются множествами отображений с ограниченным искажением. Устойчивость класса конформных отображений и свойства отображений с ограниченным искажением детально изучены (см., например, монографии [3–8]).

Пусть $n = m \geq 3$ и $2 \leq k < n$. Тогда функции

$$F(\zeta) = |\zeta|^k, \quad G(\zeta) = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{I \in \Gamma_n^k} \det_{II} \zeta$$

($G(\zeta)$ — сумма главных $k \times k$-миноров матрицы ζ, деленная на биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$) удовлетворяют (H1$'$) и (H2)–(H6). Определяемый этими функциями класс $\mathfrak{G}$ состоит из сужений на области гомотетий пространства $\mathbb{R}^n$. Устойчивость класса гомотетий и свойства отображений из соответствующих классов $\mathfrak{G}(K)$ изучены в работах Т. В. Соколовой [13, 14].

Пусть $2 \leq k = n < m$. Рассмотрим матрицу $\zeta = (\zeta_{\mu\nu})_{\substack{\mu=1,\dots,m, \\ \nu=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ как блочную матрицу $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}$ с $\zeta^1 = (\zeta_{\mu\nu})_{\substack{\mu=1,\dots,n, \\ \nu=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\zeta^2 = (\zeta_{\mu\nu})_{\substack{\mu=n+1,\dots,m, \\ \nu=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{(m-n) \times n}$. Функции $F(\zeta) = |\zeta^1|^n + |\zeta^2|^n$ и $G(\zeta) = \det \zeta^1$ удовлетворяют (H1$'$) и (H2)–(H5). Для этих функций уравнение (2) имеет вид

$$|(v^1)'|^n + |(v^2)'|^n \leq K \det(v^1)'. \tag{10}$$

Здесь для отображения $v = (v_1, \dots, v_m) : V \to \mathbb{R}^m$ мы используем представление $v = (v^1, v^2)$ с $v^1 = (v_1, \dots, v_n) : V \to \mathbb{R}^n$ и $v^2 = (v_{n+1}, \dots, v_m) : V \to \mathbb{R}^{m-n}$. Класс $\mathfrak{G}$ состоит из отображений $v = (v^1, v^2)$ таких, что v^1 является «сохраняющим ориентацию» обобщенно конформным отображением (при $n = 2$ голоморфным отображением), а v^2 — постоянным отображением. Классы $\mathfrak{G}(K)$ решений (10) асимптотически эквивалентны при $K \to 1$ классам решений систем дифференциальных неравенств

$$|(v^1)'|^n \leq (1 + \varepsilon_1) \det(v^1)', \quad |(v^2)'| \leq \varepsilon_2 |(v^1)'| \tag{11}$$

с $\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \leq K - 1$. Устойчивость класса $\mathfrak{G}$ и свойства решений системы (11) изучены А. П. Копыловым [10].

§ 3. Некоторые свойства отображений класса $\mathfrak{G}(K)$

Чтобы доказать основные теоремы, нам требуются следующие вспомогательные утверждения о свойствах отображений класса $\mathfrak{G}(K)$, имеющие и самостоятельный интерес. Эти утверждения являются обобщением соответствующих результатов работы [15].

Аналогично отображениям с ограниченным искажением отображения из класса $\mathfrak{G}(K)$ обладают следующими свойствами.

Лемма 1. *Пусть функции F и G удовлетворяют предположениям* (H2)–(H5). *Пусть $K \geq 1$, и пусть $S = \{v : V \to \mathbb{R}^m\} \subset \mathfrak{G}(K)$ — множество отображений области $V \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что S равномерно ограничено в $L^k_{\mathrm{loc}}(V;\mathbb{R}^m)$. Тогда S равномерно ограничено в $W^{1,k}_{\mathrm{loc}}(V;\mathbb{R}^m)$.*

Теорема 7. *Пусть функции F и G удовлетворяют предположениям* (H1)–(H5). *Пусть $K \geq 1$ и $(v_l : V \to \mathbb{R}^m)_{l\in\mathbb{N}}$, $v_l \in \mathfrak{G}(K)$, — последовательность отображений области $V \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что $v_l \to v$ в $L^k_{\mathrm{loc}}(V;\mathbb{R}^m)$ для некоторого отображения $v \in L^k_{\mathrm{loc}}(V;\mathbb{R}^m)$. Тогда $v \in \mathfrak{G}(\overline{K})$ с $\overline{K} = \liminf\limits_{l\to\infty} K(v_l) \leq K$.*

Теорема 8. *Пусть F и G — функции, удовлетворяющие предположениям* (H2)–(H6). *Положим $K_0 = \infty$ при $k = n$ и $K_0 = \frac{kc_F}{(n-k)d_G}$ при $k < n$. Пусть числа $K \in [1, K_0)$ и $\delta \in (0,1)$ удовлетворяют неравенству*

$$\frac{Kd_G}{kc_F} \leq \frac{1}{n-k+k\delta}, \tag{12}$$

и пусть $C_0 \in \mathbb{R}$. Пусть V — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда каждое решение $v \in W^{1,k}_{\mathrm{loc}}(V;\mathbb{R}^m)$ дифференциального неравенства

$$F(v'(x)) \leq KG(v'(x)) + C_0 \quad \text{для п. в. } x \in V \tag{13}$$

удовлетворяет на каждом компактном подмножестве в V условию Гёльдера с показателем δ.

В силу условия (H6) для константы K_0 в теореме 8 выполнено неравенство $K_0 > 1$.

Пусть $C_{\mathrm{loc}}(V;\mathbb{R}^m)$ — пространство непрерывных функций $C(V;\mathbb{R}^m)$, наделенное топологией локально равномерной сходимости. Из теоремы 8 и теоремы Арцела — Асколи получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 8 *множество $S = \{v : V \to \mathbb{R}^m\} \subset \mathfrak{G}(K)$ отображений области $V \subset \mathbb{R}^n$ предкомпактно в $C_{\mathrm{loc}}(V;\mathbb{R}^m)$ тогда и только тогда, когда оно локально равномерно ограничено.*

Доказательство леммы 1. Для $I = (i_1,\dots,i_k) \in \Gamma^k_n$ определим дифференциальные формы Ω_I на $\mathbb{R}^n$ правилом $\Omega_I := \operatorname{sgn} I\, dx_{\hat{i}_1} \wedge \dots \wedge dx_{\hat{i}_{n-k}}$, где набор индексов $(\hat{i}_1,\dots,\hat{i}_{n-k}) \in \Gamma^{n-k}_n$ таков, что $\{\hat{i}_1,\dots,\hat{i}_{n-k}\} = \{1,\dots,n\} \setminus \{i_1,\dots,i_k\}$, а знак $\operatorname{sgn} I$ выбирается так, чтобы $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge \Omega_I = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Для $v = (v_1,\dots,v_m) \in S$ и $J = (j_1,\dots,j_k) \in \Gamma^k_m$ имеем $\frac{\partial v_J}{\partial x_I} = *(dv_{j_1} \wedge \dots \wedge dv_{j_k} \wedge \Omega_I)$, где $*$ — оператор Ходжа. Тогда неравенство (2) запишется в виде

$$F(v') \leq K \sum_{J\in\Gamma^k_m,\, I\in\Gamma^k_n} \gamma_{JI} * (dv_{j_1} \wedge \dots \wedge dv_{j_k} \wedge \Omega_I), \tag{14}$$

где γ_{JI} — коэффициенты из представления (5). Пусть $\eta \in C^\infty_0(V)$ — произвольная неотрицательная функция. Умножим обе части (14) на η^k, проинтегрируем по V с помощью формулы Стокса и используем неравенство Гёльдера. В результате получим

$$\int\limits_V \eta^k F(v')\, dx_1 \dots dx_n \leq K \int\limits_V \eta^k \sum_{J\in\Gamma^k_m,\, I\in\Gamma^k_n} \gamma_{JI}\, dv_{j_1} \wedge \dots \wedge dv_{j_k} \wedge \Omega_I$$

$$= \frac{K}{k} \sum_{J\in\Gamma_m^k,\, I\in\Gamma_n^k} \gamma_{JI} \sum_{\varkappa=1}^{k} (-1)^{\varkappa} \int\limits_V v_{j_\varkappa}\, d(\eta^k) \wedge dv_{j_1} \wedge \dots \wedge dv_{j_{\varkappa-1}} \wedge dv_{j_{\varkappa+1}} \wedge \dots \wedge dv_{j_k} \wedge \Omega_I$$

$$\le CK \int\limits_V (|v||\eta'|)(\eta|v'|)^{k-1} \le CK \Bigl(\int\limits_V |\eta'|^k |v|^k\Bigr)^{1/k} \Bigl(\int\limits_V |\eta v'|^k\Bigr)^{(k-1)/k},$$

где $C > 0$ — некоторая константа. Учитывая (H5) и (6), имеем

$$\int\limits_V |\eta v'|^k \le \frac{CK}{c_F} \Bigl(\int\limits_V |\eta'|^k |v|^k\Bigr)^{1/k} \Bigl(\int\limits_V |\eta v'|^k\Bigr)^{(k-1)/k}.$$

Тогда

$$\|\eta v'\|_{L^k(V;\mathbb{R}^{m\times n})} \le \frac{CK}{c_F} \||\eta'||v|\|_{L^k(V)}.$$

Утверждение леммы следует непосредственно из последнего неравенства.

Доказательство теоремы 7. Из леммы 1 получаем, что последовательность (v_l) локально ограничена в пространстве $W^{1,k}_{\mathrm{loc}}(V;\mathbb{R}^m)$. Из общих свойств пространств Соболева следует, что $v \in W^{1,k}_{\mathrm{loc}}(V;\mathbb{R}^m)$ (см., например, [4, гл. I, теорема 1.1]). Пусть $(v_{l_s})_{s\in\mathbb{N}}$ — подпоследовательность такая, что $\lim\limits_{s\to\infty} K(v_{l_s}) = \overline{K}$. Для каждого s выполняется неравенство $F(v'_{l_s}(x)) \le K(v_{l_s}) G(v'_{l_s}(x))$ для п. в. $x \in V$. Умножим обе части этого неравенства на произвольную неотрицательную функцию $\eta \in C_0^\infty(V)$ и проинтегрируем по V. В результате получим

$$\int\limits_V \eta F(v'_{l_s}) \le K(v_{l_s}) \int\limits_V \eta G(v'_{l_s}).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу по s и используя теорему о слабой полунепрерывности функционалов вариационного исчисления [32, теорема II.4] и теорему о слабой непрерывности миноров [4, гл. II, лемма 4.9], приходим к неравенству $\int\limits_V \eta F(v') \le \overline{K} \int\limits_V \eta G(v')$. Ввиду произвола в выборе функции η последнее неравенство означает выполнение неравенства (2) для функции v с $K = \overline{K}$.

Доказательство теоремы 8. Пусть $a \in V$. Используя последовательно неравенства (6) и (13), теорему Ю. Г. Решетняка [33, теорема 1], определение величины d_G и неравенство (12), для п. в. $r \in (0, \operatorname{dist}(a, \partial V))$ получаем

$$p(r) := \int\limits_{B(a,r)} |v'|^k \le c_F^{-1} \int\limits_{B(a,r)} F(v')$$

$$\le c_F^{-1} \Bigl(K \sum_{J\in\Gamma_m^k,\, I\in\Gamma_n^k} \gamma_{JI} \int\limits_{B(a,r)} \frac{\partial v_J}{\partial x_I} + C_0 |B(a,r)| \Bigr)$$

$$\le \frac{Kr}{kc_F} \int\limits_{\partial B(a,r)} \Bigl(\sum_{J\in\Gamma_m^k,\, I\in\Gamma_n^k} |\gamma_{JI}| \frac{|x_I - a_I|^2}{r^2} \Bigr) |v'(x)|^k \, d\sigma_x + \frac{C_0 |B(a,r)|}{c_F}$$

$$\le \frac{K d_G r}{kc_F} \int\limits_{\partial B(a,r)} |v'|^k \, d\sigma + \frac{C_0 |B(0,1)| r^n}{c_F}$$

$$\leq \frac{r}{n-k+k\delta} \int\limits_{\partial B(a,r)} |v'|^k \, d\sigma + \frac{C_0|B(0,1)|r^n}{c_F}.$$

Здесь $d\sigma_x$ — элемент площади $(n-1)$-мерной сферы $\partial B(a,r)$. Для п. в. $r \in (0, \operatorname{dist}(a, \partial V))$ выполнено равенство $p'(r) = \int\limits_{\partial B(a,r)} |v'|^k \, d\sigma$. Тогда

$$\frac{r}{n-k+k\delta} p'(r) - p(r) + \frac{C_0|B(0,1)|}{c_F} r^n \geq 0.$$

Умножая это неравенство на $(n-k+k\delta)r^{-(n-k+k\delta+1)}$, получаем

$$\left(p(r)r^{-(n-k+k\delta)} + \frac{(n-k+k\delta)C_0|B(0,1)|}{kc_F(1-\delta)} r^{k(1-\delta)}\right)' \geq 0.$$

Поэтому выражение в скобках является неубывающей функцией по r. Для $0 < r < R < \operatorname{dist}(a, \partial V)$ имеем

$$p(r)r^{-(n-k+k\delta)} + \frac{(n-k+k\delta)C_0|B(0,1)|}{kc_F(1-\delta)} r^{k(1-\delta)} \leq p(R)R^{-(n-k+k\delta)} + \frac{(n-k+k\delta)C_0|B(0,1)|}{kc_F(1-\delta)} R^{k(1-\delta)}.$$

Следовательно,

$$p(r) \leq \left(p(R)R^{-(n-k+k\delta)} + \frac{(n-k+k\delta)C_0|B(0,1)|}{kc_F(1-\delta)} [R^{k(1-\delta)} - r^{k(1-\delta)}]\right) r^{n-k+k\delta}. \tag{15}$$

Пусть U — компактное подмножество в V и $\varepsilon_U := \frac{1}{2}\operatorname{dist}(U, \partial V)$. Тогда ε_U-окрестность $U' := \bigcup\limits_{x \in U} B(x, \varepsilon_U)$ множества U лежит в V вместе со своим замыканием. Полагая

$$C_U := \varepsilon_U^{-(n-k+k\delta)} \int\limits_{U'} |v'|^k + \frac{(n-k+k\delta)|C_0||B(0,1)|}{kc_F(1-\delta)} \varepsilon_U^{k(1-\delta)} < \infty,$$

из неравенства (15) для всех $a \in U$ и $r \in (0, \varepsilon_U)$ получаем соотношение

$$\int\limits_{B(a,r)} |v'|^k \leq C_U r^{n-k+k\delta}.$$

Из последнего соотношения по теореме Морри [19, теорема 3.5.2] (см. также [4, гл. II, лемма 1.1]) следует, что отображение v удовлетворяет условию Гёльдера на множестве U с показателем δ.

§ 4. Доказательство теорем 2 и 3

Для доказательства теоремы 2 нам требуется следующая

Лемма 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *найдутся функции* $\alpha_j(\varepsilon) = \alpha_{j,F,G}(\varepsilon)$, $j = 1,2,3$, *определенные для* $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_j$ *и такие, что* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \alpha_j(\varepsilon) = \alpha_j(0) = 0$ *и следующие утверждения выполнены для каждого линейного отображения* $\zeta \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

1) *если* $\xi(\zeta, \mathfrak{G}) \le \varepsilon < \varepsilon_1$, *то найдется линейное отображение* $\zeta_0 \in \mathfrak{G} \cap \mathbb{R}^{m\times n}$ *такое, что* $|\zeta_0| = |\zeta|$ *и* $|\zeta - \zeta_0| \le \alpha_1(\varepsilon)|\zeta|$;

2) *если существует линейное отображение* $\zeta_0 \in \mathfrak{G}$ *такое, что* $|\zeta - \zeta_0| \le \varepsilon|\zeta|$ *с* $\varepsilon < \varepsilon_2$, *то* $F(\zeta) \le (1 + \alpha_2(\varepsilon))G(\zeta)$;

3) *если* $F(\zeta) \le (1 + \varepsilon)G(\zeta)$ *с* $\varepsilon < \varepsilon_3$, *то найдется линейное отображение* $\zeta_0 \in \mathfrak{G}$ *такое, что* $|\zeta_0| = |\zeta|$ *и* $|\zeta - \zeta_0| \le \alpha_3(\varepsilon)|\zeta|$.

Доказательство. 1. Чтобы доказать существование функции α_1, предположим, стремясь прийти к противоречию, что существуют последовательность $(\zeta_l \in \mathbb{R}^{m\times n})_{l\in\mathbb{N}}$ и число $\delta > 0$ такие, что $|\zeta_l| = 1$, $\xi(\zeta_l, \mathfrak{G}) < 1/l$ и

$$|\zeta_l - \bar{\zeta}| > \delta \tag{16}$$

для всех линейных отображений $\bar{\zeta} \in \mathfrak{G}$ с $|\bar{\zeta}| = 1$. Из [7, лемма 1.2.2] следует, что $\xi_1(\zeta_l, \mathfrak{G}) \le 2\xi(\zeta_l, \mathfrak{G}) < 2/l$. Тогда существует отображение $u_l : B(0, 1) \to \mathbb{R}^m$ из класса $\mathfrak{G}$ такое, что

$$\|\zeta_l - u_l\|_{C(B(0,1);\mathbb{R}^m)} < 2/l. \tag{17}$$

Так как $|\zeta_l| = 1$, существует подпоследовательность $(\zeta_{l_s})_{s\in\mathbb{N}}$ такая, что $\zeta_{l_s} \to \zeta_0$ равномерно на шаре $B(0, 1)$ для некоторого линейного отображения $\zeta_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ с $|\zeta_0| = 1$. Комбинируя это с неравенством (17), получаем, что $u_{l_s} \to \zeta_0$ равномерно на шаре $B(0, 1)$. Класс $\mathfrak{G}$ замкнут относительно локально равномерной сходимости (см. замечание 1 в § 2). Следовательно, $\zeta_0 \in \mathfrak{G}$. Последнее противоречит (16).

2. Фиксируем $0 < \varepsilon' < 1$. Пусть $\zeta, \zeta_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — линейные отображения такие, что $|\zeta| = 1$, $\zeta_0 \in \mathfrak{G}$ и $|\zeta - \zeta_0| \le \varepsilon < \varepsilon'$. Каждая квазивыпуклая функция является локально липшицевой. Поэтому функции F и G удовлетворяют условию Липшица на кольце $\{\bar{\zeta} \in \mathbb{R}^{m\times n} : 1 - \varepsilon' < |\bar{\zeta}| < 1 + \varepsilon'\}$ с некоторой константой липшицевости $C > 0$. Тогда $|F(\zeta) - F(\zeta_0)| \le C\varepsilon$ и $|G(\zeta) - G(\zeta_0)| \le C\varepsilon$. Следовательно, $F(\zeta) \le F(\zeta_0) + C\varepsilon$ и $G(\zeta) \ge G(\zeta_0) - C\varepsilon$. Так как $\zeta_0 \in \mathfrak{G}$, то $F(\zeta_0) = G(\zeta_0)$. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $F(\zeta) \le \bigl(1 + \frac{2C\varepsilon}{F(\zeta_0) - C\varepsilon}\bigr)G(\zeta)$. Из (6) имеем $F(\zeta_0) \ge c_F|\zeta_0|^k \ge c_F(1 - \varepsilon)^k$. Тогда функция $\alpha_2(\varepsilon) = \frac{2C\varepsilon}{c_F(1-\varepsilon)^k - C\varepsilon}$ требуемая.

3. Доказательство существования функции α_3 аналогично доказательству существования функции α_1.

Доказательство теоремы 2. Пусть α_1 и α_2 — функции из леммы 2. Положим $\bar{\alpha} = \alpha_2 \circ \alpha_1$. Пусть V — область в $\mathbb{R}^n$, и пусть $v \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(V; \mathbb{R}^m)$ с $p > n$. Предположим, что $\Xi(v, \mathfrak{G}) \le \varepsilon$. Так как $p > n$, отображение v непрерывно и почти всюду дифференцируемо в V. Рассмотрим точку $x \in V$ с $v'(x) \ne 0$. Поскольку $\Xi(x, v, \mathfrak{G}) \le \Xi(v, \mathfrak{G}) \le \varepsilon$, по [7, лемма 1.1.2] имеем $\xi(v'(x), \mathfrak{G}) \le \varepsilon$. Из леммы 2 следует, что неравенство (2) выполнено с $K = 1 + \bar{\alpha}(\varepsilon)$. Очевидно, неравенство (2) выполнено для точек $x \in V$ с $v'(x) = 0$. Поэтому $v \in \mathfrak{G}(1+\bar{\alpha}(\varepsilon))$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\rho \in (0, 1)$. Стремясь прийти к противоречию, предположим, что существует последовательность $(v_l : B(0, 1) \to \mathbb{R}^m)_{l\in\mathbb{N}}$ такая, что (i) $v_l \in \mathfrak{G}(1 + 1/l)$; (ii) $|v_l(x)| \le 1$, $x \in B(0, 1)$; (iii) существует константа $\delta > 0$ такая, что $\|v_l - u\|_{C(B(0,\rho);\mathbb{R}^m)} \ge \delta$ для всех отображений $u : B(0, 1) \to \mathbb{R}^m$ из класса $\mathfrak{G}$. По следствию 1 из (i) и (ii) следует, что существует подпоследовательность $(v_{l_s})_{s\in\mathbb{N}}$ такая, что $v_{l_s} \to v$ локально равномерно на шаре $B(0, 1)$ для некоторого отображения $v : B(0, 1) \to \mathbb{R}^m$. Из теоремы 7 вытекает, что $v \in \mathfrak{G}$. Последнее противоречит (iii). Теорема доказана.

Теорема 4 доказывается аналогично.

§ 5. Следствия из теорем о сходимости с функционалом

Чтобы доказать теоремы 5 и 6, нам необходимо следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $p > 1$, и пусть $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ — строго p-квазивыпуклая функция, удовлетворяющая неравенствам*

$$c|\zeta|^p \le F(\zeta) \le C(|\zeta|^p + 1), \quad \zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}, \tag{18}$$

с некоторыми постоянными $0 < c < C < \infty$. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей, и пусть $(v_l)_{l\in\mathbb{N}}$, $v_l \in W^{1,p}(V;\mathbb{R}^m)$, — последовательность отображений такая, что $v_l \to v$ в $L^1(V;\mathbb{R}^m)$ для некоторого отображения $v \in W^{1,p}(V;\mathbb{R}^m)$. Предположим, что

$$\int\limits_V F(v_l') \to \int\limits_V F(v') < \infty. \tag{19}$$

Тогда $v_l \to v$ в $W^{1,p}(V;\mathbb{R}^m)$.

Это предложение есть следствие теоремы о сходимости с интегральным функционалом со строго p-квазивыпуклым интеграндом из работы М. А. Сычева [24, теорема 1.8]. Оно также может быть получено из результатов Кристенсена (см. [26, пример 3.2]). Для строго выпуклых функций F предложение является следствием известной теоремы Ю. Г. Решетняка о сходимости с функционалом (см., например, [4, гл. III, теорема 3.6]). Для равномерно строго p-квазивыпуклых функций предложение доказано Эвансом и Гариепи [28]. Для доказательства предложения 1 нам потребуется следующая

Лемма 3. *Пусть $p > 1$, и пусть $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ — локально липшицева функция, удовлетворяющая неравенству*

$$F(\zeta) \ge c|\zeta|^p, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}, \tag{20}$$

с некоторой константой $c > 0$. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей. Пусть $(v_l \in W^{1,p}(V;\mathbb{R}^m))_{l\in\mathbb{N}}$ — последовательность отображений такая, что $v_l \to v$ в $L^1(V;\mathbb{R}^m)$ и $v_l' \to v'$ по мере на области V для некоторого отображения $v \in W^{1,p}(V;\mathbb{R}^m)$. Предположим, что мы имеем сходимость (19). *Тогда $v_l \to v$ в $W^{1,p}(V;\mathbb{R}^m)$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдется число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для каждого измеримого подмножества $A \subset V$ с $|A| < \delta_1$ выполняются неравенства $\int\limits_A F(v') < c\varepsilon$ и $\int\limits_A |v'|^p < \varepsilon$. Существует компактное подмножество $D \subset V$ такое, что $|V \setminus D| < \delta_1/2$ и производная v' непрерывна на D. Тогда $\mu = \sup\limits_D |v'| < \infty$. Для локально липшицевой функции F найдется число $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0, \min\{\mu, (\varepsilon/|V|)^{1/p}\})$ такое, что для $\zeta_1, \zeta_2 \in B(0, 2\mu) \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ с $|\zeta_1 - \zeta_2| \le \delta_2$ справедливо неравенство $|F(\zeta_1) - F(\zeta_2)| < c\varepsilon/|V|$. Пусть $A_l = \{x \in D : |v_l'(x) - v'(x)| \ge \delta_2\}$. В силу сходимости $v_l' \to v'$ по мере в V существует номер $l_1 = l_1(\delta_1, \delta_2)$ такой, что $|A_l| \le \delta_1/2$ для $l \ge l_1$. Положим $D_l = D \setminus A_l$. Тогда $|V \setminus D_l| = |V \setminus D| + |D \setminus D_l| = |V \setminus D| + |A_l| < \delta_1$ для $l \ge l_1$. В силу (19) существует номер $l_2 = l_2(\varepsilon)$ такой, что $|\int\limits_V (F(v_l') - F(v'))| < c\varepsilon$ для $l \ge l_2$. Для каждого $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и почти всех $x \in V$ имеем $|\zeta - v'(x)|^p \le (|\zeta| + |v'(x)|)^p \le 2^{p-1}(|\zeta|^p + |v'(x)|^p) \le 2^{p-1}(c^{-1}F(\zeta) + |v'(x)|^p)$. Здесь последнее неравенство следует из (20). Пусть $l \ge \max\{l_1, l_2\}$. Тогда справедливы неравенства

$$\int\limits_{V\setminus D_l} |v_l' - v'|^p \le 2^{p-1}\Bigg(c^{-1}\int\limits_{V\setminus D_l} F(v_l') + \int\limits_{V\setminus D_l} |v'|^p\Bigg)$$
$$\le 2^{p-1}\Bigg(c^{-1}\Bigg[\int\limits_{V\setminus D_l} F(v') + \Bigg|\int\limits_V (F(v_l') - F(v'))\Bigg| + \int\limits_{D_l} |F(v_l') - F(v')|\Bigg] + \int\limits_{V\setminus D_l} |v'|^p\Bigg)$$
$$\le 2^{p-1}(c^{-1}[c\varepsilon + c\varepsilon + |V|(c\varepsilon/|V|)] + \varepsilon) = 2^{p+1}\varepsilon.$$

Из определений множеств D_l и числа δ_2 имеем $|v_l'(x) - v'(x)| \le \delta_2 \le (\varepsilon/|V|)^{1/p}$ для почти всех $x \in D_l$. Поэтому $\int\limits_{D_l} |v_l' - v'|^p \le |V|(\varepsilon/|V|) = \varepsilon$. Объединяя полученные неравенства, получаем $\int\limits_V |v_l' - v'|^p \le \{2^{p+1}+1\}\varepsilon$. Ввиду произвольности ε последнее соотношение доказывает лемму.

Доказательство предложения 1. Используя условия (18) и (19), неравенство Пуанкаре и ограниченность последовательности $(v_l)_{l\in\mathbb{N}}$ в $L^1(V;\mathbb{R}^m)$, легко показать, что последовательность $(v_l)_{l\in\mathbb{N}}$ ограничена в $W^{1,p}(V;\mathbb{R}^m)$. Поэтому сходимость $v_l \to v$ в $L^1(V;\mathbb{R}^m)$ при $l \to \infty$ влечет слабую сходимость $v_l \to v$ в $W^{1,p}(V;\mathbb{R}^m)$ при $l \to \infty$. Используя [24, теорема 1.8], получаем сходимость $v_l' \to v'$ по мере в V при $l \to \infty$. Предложение теперь следует из леммы 3.

Используя следующее предложение, мы покажем, что функция F, удовлетворяющая оценке

$$0 \le F(\zeta) \le C(|\zeta|^p + 1), \quad \zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}, \tag{21}$$

и условию (H1$''$) с $\varkappa \le p$, $p > 1$, является строго p-квазивыпуклой (см. следствие 2).

Предложение 2. *Пусть $p > 1$ и $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная функция, удовлетворяющая условию* (H1$''$) *с $\varkappa \le p$. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное открытое множество и $(v_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность в $W^{1,p}(V;\mathbb{R}^m)$ такая, что $v_l \to v$ в $L^1(V;\mathbb{R}^m)$ для некоторого отображения $v \in W^{1,p}(V;\mathbb{R}^m)$. Предположим, что мы имеем сходимость* (19). *Тогда $v_l' \to v'$ по мере.*

Доказательство. Пусть $\eta \in C_0(V)$. В силу свойства слабой непрерывности миноров [4. гл. II, лемма 4.9] имеем $\int\limits_V \eta M_t(v_l') \to \int\limits_V \eta M_t(v')$ для $t = 1, \dots, \varkappa$. Так как Ψ — линейное отображение, получаем

$$\int\limits_V \eta\Psi(M_1(v_l'), \dots, M_\varkappa(v_l')) \to \int\limits_V \eta\Psi(M_1(v'), \dots, M_\varkappa(v')). \tag{22}$$

Так как Φ — строго выпуклая функция, по теореме о сходимости с функционалом из работы Г. Н. Василенко [34, теорема 1] из (19) и (22) следует, что $\Psi(M_1(v_l'), \dots, M_\varkappa(v_l')) \to \Psi(M_1(v'), \dots, M_\varkappa(v'))$ по мере. Используя (9), получаем $v_l' \to v'$ по мере.

Следствие 2. *Пусть* $p > 1$, *и пусть* $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ — *непрерывная функция, удовлетворяющая* (21) *и* (H1$''$) *с* $\varkappa \le p$. *Тогда функция* F *строго* p-*квазивыпуклая.*

Доказательство. Условие (H1$''$) влечет, что функция F поливыпуклая. Следовательно, F является квазивыпуклой функцией. Пусть $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей. Рассмотрим последовательность $(\varphi_l \in C_0^\infty(V;\mathbb{R}^m))_{l\in\mathbb{N}}$ такую, что последовательность $(|\varphi_l'|^p)_{l\in\mathbb{N}}$ является равномерно интегрируемой на V. Предположим, что $\varphi_l \to 0$ слабо в $W^{1,p}(V;\mathbb{R}^m)$ и $\int_V F(\zeta+\varphi_l') \to F(\zeta)|V|$. По теореме Реллиха — Кондрашова $\varphi_l \to 0$ в $L^1(V;\mathbb{R}^m)$. В силу предложения 2 $\varphi_l' \to 0$ по мере. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Так как $(|\varphi_l'|^p)_{l\in\mathbb{N}}$ — равномерно интегрируемая последовательность, существует число $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0,1]$ такое, что для каждого измеримого подмножества $A \subset V$ с $|A| \le \delta$ выполнено неравенство $\int_A |\varphi_l'|^p \le \varepsilon$ для всех l. Поскольку $\varphi_l' \to 0$ по мере, то существует номер l_0 такой, что $|\{x \in V : |\varphi_l'| > \varepsilon\}| < \delta$ для $l > l_0$. Имеем

$$\begin{aligned}\int_V |\varphi_l'| &= \int_{\{x\in V:|\varphi_l'|>\varepsilon\}} |\varphi_l'| + \int_{\{x\in V:|\varphi_l'|\le\varepsilon\}} |\varphi_l'| \\ &\le |\{x \in V : |\varphi_l'| > \varepsilon\}|^{1-1/p}\Bigg(\int_{\{x\in V:|\varphi_l'|>\varepsilon\}} |\varphi_l'|^p\Bigg)^{1/p} + \varepsilon|V| \\ &\le \delta^{1-1/p}\varepsilon^{1/p} + \varepsilon|V| \le \varepsilon^{1/p} + \varepsilon|V|\end{aligned}$$

для $l > l_0$. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем $\varphi_l' \to 0$ в $L^1(V;\mathbb{R}^{m\times n})$. Из [24, теорема 1.8] следует, что функция F строго p-квазивыпуклая.

§ 6. Доказательство теоремы 5

Допустим, что функции с нужными свойствами не существует. Это означает, что найдется последовательность отображений $(v_l : B(0,1) \to \mathbb{R}^m)_{l\in\mathbb{N}}$ со свойствами: (i) $v_l \in \mathfrak{G}(1 + 1/l)$; (ii) $|v_l(x)| \le 1$, $x \in B(0,1)$; (iii) существует $\delta > 0$ такое, что $\|v - u\|_{C(B(0,\rho);\mathbb{R}^m)} + \|v_l' - u'\|_{L^k(B(0,\rho);\mathbb{R}^{m\times n})} \ge \delta$ для любого отображения $u : B(0,1) \to \mathbb{R}^m$ из класса $\mathfrak{G}$. Из (i), (ii) и следствия 1 вытекает, что существует подпоследовательность (обозначим ее снова через (v_l)), сходящаяся локально равномерно к некоторому отображению $v : B(0,1) \to \mathbb{R}^m$. По теореме 7 получаем, что $v \in \mathfrak{G}$. Используя лемму 1, нетрудно показать, что последовательность (v_l) слабо сходится в $W^{1,k}_{\mathrm{loc}}(B(0,1);\mathbb{R}^m)$ к отображению v. Для произвольной неотрицательной функции $\eta \in C_0^\infty(B(0,1))$ теорема о слабой полунепрерывности функционалов вариационного исчисления [32, теорема II.4] и теорема о слабой непрерывности миноров [4, гл. II, лемма 4.9] влекут неравенства

$$\int_{B(0,1)} \eta F(v') \le \liminf_{l\to\infty} \int_{B(0,1)} \eta F(v_l'), \qquad \int_{B(0,1)} \eta G(v') = \lim_{l\to\infty} \int_{B(0,1)} \eta G(v_l').$$

Учитывая (i) и (H4), получаем

$$\int\limits_{B(0,1)} \eta F(v') \le \liminf_{l\to\infty} \int\limits_{B(0,1)} \eta F(v_l') \le \liminf_{l\to\infty} K(v_l) \int\limits_{B(0,1)} \eta G(v_l')$$
$$= \int\limits_{B(0,1)} \eta G(v') \le \int\limits_{B(0,1)} \eta F(v').$$

Это значит, что существует подпоследовательность (которую мы снова обозначим через (v_l)) такая, что $\int\limits_{B(0,1)} \eta F(v_l') \to \int\limits_{B(0,1)} \eta F(v')$. Отметим, что эта подпоследовательность зависит от выбранной нами функции η. Задавая подходящий набор функций η и используя предложение 1, получим, что существует подпоследовательность (для которой мы снова сохраняем обозначение (v_l)) такая, что $\int\limits_{B(0,\rho)} |v_l' - v'|^k \to 0$. Учитывая локально равномерную сходимость последовательности (v_l) к $v \in \mathfrak{G}$, приходим к противоречию с (iii). Теорема 5 доказана.

Теорема 6 доказывается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А.* Sur une classe de représentations continues // Мат. сб. 1935. Т. 42, № 4. С. 407–424.
2. *Лаврентьев М. А.* Устойчивость в теореме Лиувилля // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95, № 3. С. 925–926.
3. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974.
4. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
5. *Reshetnyak Yu. G.* Space mappings with bounded distortion. Providence, RI.: Amer. Math. Soc., 1989. (Transl. Math. Monographs; V. 73).
6. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. 2-е изд., перераб. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1996.
7. *Копылов А. П.* Устойчивость в C-норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990.
8. *Iwaniec T., Martin G.* Geometric function theory and non-linear analysis. Oxford: Oxford Univ. Press, 2001. (Oxford Math. Monographs).
9. *Копылов А. П.* Об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений. I. Концепция устойчивости. Теорема Лиувилля // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 2. С. 83–111.
10. *Копылов А. П.* К устойчивости классов конформных отображений. I // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 2. С. 348–369.
11. *Даирбеков Н. С.* Квазирегулярные отображения нескольких n-мерных переменных // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 4. С. 87–102.
12. *Даирбеков Н. С.* Устойчивость классов квазирегулярных отображений нескольких пространственных переменных // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 1. С. 47–59.
13. *Соколова Т. В.* О поведении отображений, близких к гомотетиям // Мат. заметки. 1991. Т. 50, вып. 4. С. 154–156.
14. *Соколова Т. В.* Устойчивость в пространстве W_p^1 преобразований гомотетии. Дис. … канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1991.
15. *Егоров А. А.* Устойчивость классов решений дифференциальных соотношений, построенных с помощью выпуклых и квазиаффинных функций // Тр. по геометрии и анализу. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2003. С. 275–288.
16. *Egorov A. A.* Stability of classes of solutions to partial differential relations constructed by quasiconvex functions and null Lagrangians // EQUADIFF 2003. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2005. P. 1065–1067.
17. *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1977. V. 63. P. 337–403.

18. *Ball J. M., Marsden J. E.* Quasiconvexity at the boundary, positivity of the second variation and elastic stability // Arch. Ration. Mech. Anal. 1984. V. 86. P. 251–277.
19. *Morrey C. B.* Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin etc.: Springer-Verl., 1966. (Grundlehren der Math, Wiss.; V. 130).
20. *Ball J. M., Currie J. C., Olver P. J.* Null Lagrangians, weak continuity, and variational problems of arbitrary order // J. Funct. Anal. 1981. V. 41. P. 135–174.
21. *Dacorogna B.* Weak continuity and weak lower semi-continuity of non-linear functionals. Berlin etc.: Springer-Verl., 1982. (Lect. Notes Math.; V. 922).
22. *Dacorogna B.* Direct methods in the calculus of variations. Berlin etc.: Springer-Verl., 1989. (Appl. Math. Sci.; V. 78).
23. *Müller S.* Variational models for microstructure and phase transisions // Calculus of variations and geometric evolution problems. Berlin: Springer-Verl., 1999 P. 85–210. (Lecture Notes Math.; V. 1713).
24. *Sychev M.* Young measure approach to characterization of behaviour of integral functionals on weakly convergent sequences by means of their integrands // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 1998. V. 15. P. 755–782.
25. *Knops R. J., Stuart C. A.* Quasiconvexity and uniqueness of equilibrium solutions in nonlinear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1984. V. 86, N 3. P. 233–249.
26. *Kristensen J.* Finite functionals and Young measures generated by gradients of Sobolev functions. Lyngby, Denmark, 1994. 58 p. (Preprint / Mathematical Institute. Technical University of Denmark; MAT-REPORT No. 1994–34).
27. *Evans L. C.* Quasiconvexity and partial regularity in the calculus of variations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1986. V. 95. P. 227–252.
28. *Evans L. C., Gariepy R. F.* Some remarks concerning quasiconvexity and strong convergence // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A. 1987. V. 106. P. 53–61.
29. *Ball J. M.* Constitutive inequalities and existence theorems in nonlinear elastostatics // Nonlinear analysis and mechanics: Heriot–Watt Symposium (Edinburgh, 1976). London: Pitman, 1977. V. 1. P. 187–241.
30. *Landers A. W.* Invariant multiple integrals in the calculus of variations // Contributions to the calculus of variations, 1938–1941. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1942. P. 184–189.
31. *Edelen D. G. B.* Non local variations and local invariance of fields. New York: Elsivier, 1969. (Modern Analytic and Computational Methods in Science and Engineering; V. 19).
32. *Acerbi E., Fusco N.* Semicontinuity problems in the calculus of variations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1984. V. 86. P. 125–145.
33. *Решетняк Ю. Г.* Одно интегральное неравенство для дифференцируемых функций многих переменных // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 5. С. 135–140.
34. *Василенко Г. Н.* О сходимости с функционалом // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 1. С. 26–34.

Статья поступила 8 декабря 2006 г.

Егоров Александр Анатольевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
yegorov@math.nsc.ru