Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5

УДК 512.57

КОНГРУЭНЦИИ НА ПОДКЛОНАХ КЛОНА БУРЛЕ РАНГА ТРИ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ КРЕАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

И. А. Мальцев, Б. Г. Тугылбаева

Аннотация. Описаны конгруэнции на подклонах клона Бурле ранга 3, у которых отличные от проекций функции не являются креативными и принимают не более двух значений.

Ключевые слова: квазилинейная функция, предитеративная алгебра, клон Бурле, конгруэнция, гомоморфизм.

К 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева

1. Введение

Предитеративной алгеброй Поста [1, 2] называется алгебра $\mathscr{P}_A^* = (O_A; \zeta, \tau, \Delta, *)$, носителем которой является множество O_A всех функций, отображающих множество A в себя, а операции ζ, τ, Δ при $n > 1$ определены следующим образом:

$$
\begin{aligned}
(\zeta f)(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1),\\
(\tau f)(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n),\\
(\Delta f)(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &= f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Если функция f унарная, то $\zeta f = \tau f = \Delta f = f$. Операция $*$ для n-арной функции f и m-арной функции g определена так:

$$(f * g)(x_1, \dots, x_{n+m-1}) = f(g(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}).$$

Подалгебры алгебры $\mathscr{P}_A^*$, содержащие все проекции, т. е. функции вида $e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$, называются *клонами.* Мощность множества A называется *рангом клона.* Клон $\mathscr{P}_A^*$ конечного ранга k будет обозначаться через $\mathscr{P}_k^*$.

Клоны играют важную роль в теории универсальных алгебр, они находят применение в вычислительной технике, распознавании образов и т. д. Изучение конгруэнций на предитеративных алгебрах начато А. И. Мальцевым [1, 2] и продолжено В. В. Горловым [3], Лау [4], И. А. Мальцевым [5, 6] и др. Поиск конгруэнций имеет и прикладное значение, поскольку вопрос о существовании гомоморфизма между двумя конечными моделями равносилен задаче обобщенной выполнимости, возникающей во многих областях информатики [7], например, в теории баз данных и в анализе языков программирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00270) и Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–2069.2003.1).

При изучении некоторых классов многообразий важную роль играет термальное условие [8, 9]. Клон, все функции которого удовлетворяют термальному условию, называется ТС-*клоном.* Каждый ТС-клон содержится в некотором максимальном ТС-клоне. Если множество А трехэлементное, например $\{0, 1, 2\}$, то на нем существует только два максимальных ТС-клона, которые будут далее обозначаться буквами $\mathscr{B}$ и $\mathscr{L}$.

Клон $\mathscr{L}$ состоит из всех линейных функций, т. е. функций, представимых в виде $a_0x_1 + \dots + a_nx_n$, где сложение и умножение производятся по модулю 3, и хорошо изучен [10, 11].

Клон $\mathscr{B}$ состоит из одноместных функций и функций, представимых в виде

$$f_0(f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)),$$

где функции $f_0, \dots, f_n$ одноместные, а сложение производится по модулю 2. Такие функции часто называют *квазилинейными*, а образованный ими клон — *клоном Бурле*, поскольку впервые этот клон упомянут в [12]. Его строение изучалось в работах [13–16]. В частности, Я. Деметровичем и И. А. Мальцевым [13, 14] описаны все подклоны клона $\mathscr{B}$, неселекторные функции которых принимают значения 0 и 1. В этих работах указан состав каждого клона, даны примеры базисов, перечислены все подклоны и описаны решетки, образуемые этими подклонами. В своих построениях мы будем пользоваться указанными результатами и по возможности сохраним преемственность обозначений.

Будем говорить, что определенная на множестве $\{0, 1, 2\}$ существенно многоместная квазилинейная функция, принимающая значения 0 и 1, *не является креативной*, если в результате подстановки в нее любой квазилинейной функции, также определенной на множестве $\{0,1,2\}$ и принимающей значения 0 и 1, число существенных переменных не возрастает. В этой статье мы описываем все конгруэнции, имеющиеся на подклонах клона $\mathscr{B}$, в которых все отличные от проекций функции принимают значения 0 и 1 и не являются креативными. Конгруэнции на остальных клонах, рассмотренных в [13, 14], будут описаны в другой работе.

2. Каноническое разложение квазилинейной функции

В дальнейшем запись вида f^m будет означать, что функция f имеет m переменных, которые могут быть как существенными, так и фиктивными.

2.1. Обозначим через $\mathscr{E}$ клон, образованный всеми проекциями $e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$, через $\mathscr{Z}$ — клон, образованный проекциями и функциями из клона $\mathscr{B}$, значения которых принадлежат множеству $\{0, 1\}$, через $\mathscr{K}^\nabla$ — клон, функции которого получаются из функций предитеративной алгебры $\mathscr{K}$ всевозможными добавлениями фиктивных переменных.

За исключением особо оговоренных случаев, далее слово «клон» будет означать «подклон клона $\mathscr{Z}$». Через ζ^n, τ^n, Δ^n обозначим n-кратное применение соответствующей операции. Существует ровно 8 одноместных функций, принадлежащих клону $\mathscr{Z}$. Эти функции перечислены в табл. 1.

Символом $\oplus$ мы будем обозначать сложение по модулю 2. Любая отличная от проекции функция из $\mathscr{Z}$ либо является существенно одноместной и получена из функции, упомянутой в табл. 1, либо может быть представлена в виде

$$f_0(f_1(x_1) \oplus \dots \oplus f_n(x_n)), \tag{2.1}$$

Таблица 1

x	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	$\gamma(x)$	$\delta(x)$	$\overline{\varphi}(x)$	$\overline{\psi}(x)$	$c_0(x)$	$c_1(x)$
0	0	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1
2	0	1	1	0	1	0	0	1

где функции $f_0,\dots,f_n$ одноместные и принадлежат множеству P_3. Поскольку сложение производится по модулю 2, мы не различаем числа 0 и 2, и можно считать, что каждая из функций $f_1,\dots,f_n$ принимает значения из множества $\{0,1\}$ и содержится в табл. 1.

Сумма $f_1(x_1)\oplus\dots\oplus f_n(x_n)$ может принимать лишь значения 0 и 1, и задаваемая формулой (2.1) функция также не может принимать значение 2. Это позволяет считать, что и функция f_0 упомянута в табл. 1. Если на множестве $\{0,1\}$ функция f_0 принимает более одного значения, то она принадлежит множеству $\{\varphi,\psi,\overline{\varphi},\overline{\psi}\}$. Однако функции φ, ψ на множестве $\{0,1\}$ действуют тождественно, и если f_0 совпадает с одной из них, то ее можно из записи (2.1) исключить. Если же f_0 совпадает с одной из функций $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$, то запись (2.1) равносильна формуле

$$f_1(x_1)\oplus\dots\oplus f_n(x_n)\oplus 1.$$

Учитывая сказанное, а также то, что

$$\overline{\varphi}=\varphi\oplus 1,\quad \overline{\psi}=\psi\oplus 1,\quad \delta=\gamma\oplus 1,\quad 1\oplus 1=0, \tag{2.2}$$

приходим к заключению, что каждая отличная от проекции принадлежащая клону $\mathscr{Z}$ функция f может быть записана в виде

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{j=1}^{p}\gamma(x_{i_j})\oplus\sum_{j=p+1}^{p+q}\varphi(x_{i_j})\oplus\sum_{j=p+q+1}^{p+q+r}\psi(x_{i_j})\oplus\sum_{j=p+q+r+1}^{n}c_0(x_{i_j})\oplus c_f, \tag{2.3}$$

где $p,q,r\geq 0$, $\{i_1,\dots,i_n\}=\{1,\dots,n\}$, $c_f\in\{0,1\}$, функции c_0 всегда равны нулю и нужны лишь для того, чтобы выделить фиктивные переменные.

2.2. *Для любой многоместной функции $f(x_1,\dots,x_n)$ из клона $\mathscr{Z}$, не являющейся проекцией, разложение* (2.3) *определено однозначно.*

Доказательство. Пусть

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}u_j(x_j)\oplus c_f, \tag{2.4}$$

где каждая функция u_j совпадает с одной из функций φ, ψ, γ, c_0, а $c_f\in\{0,1\}$. Рассмотрим функцию

$$g(x_i)=f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n),$$

где $a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n$ — константы из множества $\{0,1,2\}$. Если $g(0)\neq g(1)$, то слагаемое u_i в сумме (2.4) не может совпадать ни с c_0, ни с γ и, следовательно, равно либо φ, либо ψ. А именно,

$$u_i=\begin{cases}\psi & \text{при } g(0)\neq g(2),\\ \varphi & \text{при } g(0)=g(2).\end{cases}$$

Если же $g(0) = g(1)$, то u_i совпадает либо с c_0, либо с γ. А именно,

$$u_i = \begin{cases} \gamma & \text{при } g(0) \neq g(2), \\ c_0 & \text{при } g(0) = g(2). \end{cases}$$

Значение константы c_f равно числу $f(0, \dots, 0)$. $\square$

2.3. Разложение (2.3) функции $f(x_1, \dots, x_n)$ назовем *каноническим.*

Далее будет доказано, что лишь две конгруэнции на рассматриваемых клонах не обладают следующим свойством: любые две сравнимые по данной конгруэнции функции имеют одинаковое число переменных. Это означает, что в канонических разложениях этих функций могут различаться лишь позиции однотипных слагаемых и количества таких слагаемых, поэтому множества индексов однотипных слагаемых играют важную роль в дальнейших рассуждениях.

2.4. Введем следующие обозначения, связанные с разложением (2.3):

$$\Gamma_f = \{i_1, \dots, i_p\}, \quad \Phi_f = \{i_{p+1}, \dots, i_{p+q}\},$$
$$\Psi_f = \{i_{p+q+1}, \dots, i_{p+q+r}\}, \quad (\Phi\Psi)_f = \Phi_f \cup \Psi_f.$$

Таким образом, Γ_f, Φ_f и Ψ_f — множества индексов всех переменных функции f, от которых в разложении (2.3) зависят слагаемые вида γ, φ и ψ соответственно.

2.5. Число $|\Gamma_f| + |\Phi_f| + |\Psi_f|$ назовем *рангом функции* f. Оно равно количеству существенных переменных этой функции. *Рангом пары функций*, сравнимых по некоторой конгруэнции, назовем наибольший из рангов этих функций.

В дальнейшем в большинстве утверждений доказывается стабильность определенных отношений относительно сигнатурных операций предитеративной алгебры. Разложение (2.3) и равенства (2.2) позволяют не обращать внимание на функции $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ и δ.

2.6. *Применение операции Δ к бинарным функциям дает следующие результаты:*

$$\begin{aligned}
&\Delta(\varphi(x_1) \oplus \psi(x_2)) = \Delta(\psi(x_1) \oplus \varphi(x_2)) = \gamma(x_1), \\
&\Delta(\gamma(x_1) \oplus \varphi(x_2)) = \Delta(\varphi(x_1) \oplus \gamma(x_2)) = \psi(x_1), \\
&\Delta(\gamma(x_1) \oplus \psi(x_2)) = \Delta(\psi(x_1) \oplus \gamma(x_2)) = \varphi(x_1), \\
&\Delta(u(x_1) \oplus c_0(x_2)) = \Delta(c_0(x_1) \oplus u(x_2)) = u(x_1), \quad u \in \{\varphi, \psi, \gamma, c_0, c_1\}, \\
&\Delta(u(x_1) \oplus c_1(x_2)) = \Delta(c_1(x_1) \oplus u(x_2)) = u(x_1) \oplus 1, \quad u \in \{\varphi, \psi, \gamma, c_0, c_1\}, \\
&\Delta(u(x_1) \oplus u(x_2)) = c_0(x_1), \quad u \in \{\varphi, \psi, \gamma, c_0, c_1\}. \quad \square
\end{aligned} \tag{2.5}$$

2.7. *Использование операции $*$ дает следующие результаты:*

$$e_i^n * f^m = e_{i+m-1}^{n+m-1} \ \text{ при } i > 1, \quad e_1^n * f^m = f^{n+m-1},$$
$$u * e_i^n = \sum_{j=1}^{i-1} c_0(x_j) \oplus u(x_i) \oplus \sum_{j=i+1}^{n} c_0(x_j), \quad u \in \{\varphi, \psi, \gamma, \delta, c_0, c_1\}, \tag{2.6}$$
если $f^n \notin \mathscr{E}$, *то* $\varphi * f^n = \psi * f^n = f^n$, $\gamma * f^n = c_0^n$, $c_i^1 * f^n = c_i^n$, $i = 0, 1$. $\square$

Соотношения (2.6) показывают, что отличная от проекции функция f является креативной тогда и только тогда, когда в ее разложении (2.3) есть слагаемые вида φ или ψ, т. е. тогда и только тогда, когда $\Phi\Psi_f \neq \varnothing$. Далее рассматриваются клоны, не содержащие таких функций.

3. Леммы о тривиальных конгруэнциях

Как и на любой предитеративной алгебре ранга больше единицы, на всех подклонах клона $\mathscr{Z}$ существуют по крайней мере следующие три конгруэнции: *нулевая* $\varkappa_0$, совпадающая с отношением равенства, *арностная* $\varkappa_a$, по которой функции сравнимы тогда и только тогда, когда они зависят от одинакового числа переменных, и *единичная* $\varkappa_1$, по которой сравнимы любые две функции подклона.

Если предитеративная алгебра $\mathscr{K}$ содержит все проекции, то, очевидно, $\mathscr{K}^\nabla = \mathscr{K}$. В других случаях это равенство может и не выполняться. Например, любая полугруппа $\mathscr{G}$ одноместных функций, определенных на множестве A, является предитеративной алгеброй, и $\mathscr{G}^\nabla \neq \mathscr{G}$.

3.1. Клон $\mathscr{K}$ назовем *составным*, если множество принадлежащих ему функций, не являющихся проекциями, замкнуто относительно операций ζ, τ, Δ, $*$.

Составной клон $\mathscr{A}$ всегда можно представить в виде объединения $\mathscr{A} = \mathscr{K}^\nabla \cup \mathscr{E}$, где $\mathscr{K}$ — некоторая предитеративная алгебра, не содержащая проекций.

Все конгруэнции на предитеративной алгебре естественным образом делятся на два класса: *подарностные*, т. е. содержащиеся в $\varkappa_a$, и *внеарностные*. В. В. Горловым [3] доказано, что если предитеративная алгебра $\mathscr{A}$ содержит все функции из клона $\mathscr{E}$, то каждая отличная от единичной конгруэнция на $\mathscr{A}$ является подарностной. Это означает, что на клонах не существует внеарностных конгруэнций, отличных от $\varkappa_1$.

3.2. Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный подклон клона $\mathscr{P}_k$. Зададим на $\mathscr{K}$ *эквивалентность* $\varkappa_\mathscr{E}$ следующим образом: $f \equiv g(\varkappa_\mathscr{E})$ тогда и только тогда, когда f и g имеют равное количество переменных и либо обе не являются проекциями, либо обе являются проекциями и совпадают.

Для функций из $\mathscr{K}$, не принадлежащих $\mathscr{E}$, отношение $\varkappa_\mathscr{E}$ ведет себя так же, как $\varkappa_a$, а на $\mathscr{E}$ совпадает с $\varkappa_0$.

3.3. *На составном клоне $\mathscr{A} = \mathscr{K}^\nabla \cup \mathscr{E}$ эквивалентность $\varkappa_\mathscr{E}$ является конгруэнцией.*

Доказательство. Стабильность отношения $\varkappa_\mathscr{E}$ относительно операций ζ, τ и Δ очевидна. Пусть $f_1 \equiv f_2(\varkappa_\mathscr{E})$ и $g_1 \equiv g_2(\varkappa_\mathscr{E})$. Это означает, что арности функций $f_1 * g_1$ и $f_2 * g_2$ совпадают и что

$$f_1 \in \mathscr{E} \iff f_2 \in \mathscr{E}, \quad g_1 \in \mathscr{E} \iff g_2 \in \mathscr{E}.$$

Докажем, что $f_1 * g_1 \equiv f_2 * g_2(\varkappa_\mathscr{E})$.

Если $f_1 \notin \mathscr{E}$, то и $f_2 \notin \mathscr{E}$. При $g_1 \in \mathscr{K}^\nabla$ функции $f_1 * g_1$ и $f_2 * g_2$ также принадлежат $\mathscr{K}^\nabla$, поскольку клон $\mathscr{K}$ замкнут относительно операции $*$, и $f_1 * g_1 \equiv f_2 * g_2(\varkappa_\mathscr{E})$, так как их арности совпадают. Если же $g_1, g_2 \in \mathscr{E}$, то функции $f_1 * g_1$ и $f_2 * g_2$ отличаются от f_1 и f_2 лишь фиктивными переменными, следовательно, обе принадлежат алгебре $\mathscr{K}^\nabla$ и потому не могут быть проекциями. Это доказывает, что $f_1 * g_1 \equiv f_2 * g_2(\varkappa_\mathscr{E})$.

Предположим, что f_1 является проекцией, тогда $f_2 = f_1$. При $g_1 \notin \mathscr{E}$ функция g_2 также не является проекцией. Таким образом, функции $f_1 * g_1$ и $f_2 * g_2$ либо обе являются проекциями (если подстановка осуществляется вместо несущественной переменной) и совпадают, либо обе принадлежат алгебре $\mathscr{K}^\nabla$, не являются проекциями и потому сравнимы по $\varkappa_\mathscr{E}$.

Наконец, если проекциями являются f_1 и g_1, то $f_2 = f_1$ и $g_2 = g_1$, следовательно, $f_1 * g_1 = f_2 * g_2$ и $f_1 * g_1 \equiv f_2 * g_2(\varkappa_{\mathscr{E}})$. $\square$

3.4. Следствие. *Клон над множеством из k элементов, у которого каждая отличная от проекции функция принимает менее k значений, является составным, и потому на нем имеется конгруэнция $\varkappa_{\mathscr{E}}$. В частности, $\varkappa_{\mathscr{E}}$ является конгруэнцией на каждом отличном от $\mathscr{E}$ подклоне клона $\mathscr{L}$.* $\square$

3.5. Конгруэнции $\varkappa_0$, $\varkappa_a$, $\varkappa_{\mathscr{E}}$ и $\varkappa_1$ назовем *тривиальными.*

3.6. *Пусть $\varkappa \subseteq \varkappa_a$ — подарностная конгруэнция на клоне $\mathscr{K}$. Она совпадает с $\varkappa_a$ тогда и только тогда, когда две различные проекции сравнимы по $\varkappa$. Если проекция e_i^n сравнима по $\varkappa$ с функцией f, принимающей одно значение, то $\varkappa = \varkappa_a$.*

Доказательство. Первое утверждение доказано В. В. Горловым [3]. Так как

$$e_1^2 * e_i^n \equiv e_1^2 * f(\varkappa), \quad \zeta\big(e_1^2 * e_i^n\big) \equiv \zeta\big(e_1^2 * f\big)(\varkappa)$$

и функции $e_1^2 * f$, $\zeta\big(e_1^2 * f\big)$ принимают одно значение и совпадают, получаем сравнение $e_1^2 * e_i^n \equiv \zeta\big(e_1^2 * e_i^n\big)(\varkappa)$. Сравнимыми оказались две разные проекции, следовательно, $\varkappa = \varkappa_a$. $\square$

3.7. Будем писать $\varkappa_1 \lhd \varkappa_2$, если $\varkappa_1 \subseteq \varkappa_2$ и между конгруэнциями $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ нет промежуточной конгруэнции $\varkappa_3$: $\varkappa_1 \subseteq \varkappa_3 \subseteq \varkappa_2 \Rightarrow \varkappa_3 = \varkappa_1 \vee \varkappa_3 = \varkappa_2$.

3.8. *Между конгруэнциями $\varkappa_{\mathscr{E}}$ и $\varkappa_a$ нет промежуточной: $\varkappa_{\mathscr{E}} \lhd \varkappa_a$.*

Доказательство. Покажем, что если $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathscr{E}}$ — отличная от $\varkappa_{\mathscr{E}}$ подарностная конгруэнция на $\mathscr{K}$, то $\varkappa = \varkappa_a$. Так как $\varkappa \neq \varkappa_{\mathscr{E}}$, найдутся две функции f_1 и f_2, сравнимые по $\varkappa$, но не сравнимые по $\varkappa_{\mathscr{E}}$. Рассмотрим три случая.

1. Обе функции являются проекциями, и сравнение имеет вид $e_i^n \equiv e_j^n(\varkappa)$, где $i \neq j$. Согласно 3.6 $\varkappa = \varkappa_a$.

2. Только одна из функций f_1, f_2, например f_2, является проекцией e_i^n, и $n > 1$. Верно сравнение $\zeta f_1 \equiv \zeta e_i^n(\varkappa)$. Однако $\zeta f_1 \equiv f_1(\varkappa)$, так как сравнимыми по $\varkappa$ являются все отличные от проекций функции из $\mathscr{K}$, имеющие одинаковую арность. Получаем сравнения

$$f_1 \equiv e_i^n(\varkappa), \quad \zeta f_1 \equiv f_1(\varkappa), \quad \zeta f_1 \equiv \zeta e_i^n(\varkappa), \quad e_i^n \equiv \zeta e_i^n(\varkappa),$$

где ζe_i^n — проекция, не совпадающая с e_i^n. Этот случай уже рассмотрен.

3. Если же сравнение имело вид $f_1 \equiv e_1^1(\varkappa)$, где f_1 — унарная функция, не принадлежащая $\mathscr{E}$, то верным является также сравнение $e_1^2 * f_1 \equiv e_1^2 * e_1^1(\varkappa_s)$. Так как $e_1^2 * f_1$ не является проекцией и $e_1^2 * e_1^1 = e_1^2$, то мы опять приходим к уже рассмотренному варианту. $\square$

4. Нетривиальные конгруэнции

Среди подклонов клона $\mathscr{L}$, не содержащих креативных функций, особую роль имеют клоны, перечисленные в табл. 2 (проекции не упоминаются, поскольку принадлежат каждому клону). Эти клоны не содержат функций φ и ψ.

Формулы (2.6) показывают, что, объединяя множества функций, принадлежащих двум таким клонам, мы всегда получим замкнутое множество, т. е. клон. Введем следующие обозначения для этих объединений $(k, l \geq 0)$:

$$\mathscr{I}_{k0} \cup \mathscr{I}_{0l} = \mathscr{I}_{kl},\ \mathscr{I}_{\infty 0} \cup \mathscr{I}_{0l} = \mathscr{I}_{\infty l},\ \mathscr{I}_{0\infty} \cup \mathscr{I}_{k0} = \mathscr{I}_{k\infty},\ \mathscr{I}_{\infty 0} \cup \mathscr{I}_{0\infty} = \mathscr{I}_{\infty\infty}.$$

Таблица 2

Клон	Содержащиеся функции
$\mathscr{I}_{k0}$	c_0^n, $\gamma(x_{i_1}) \oplus \dots \oplus \gamma(x_{i_m})$, $1 \le m \le k$
$\mathscr{I}_{0l}$	c_1^n, $\gamma(x_{j_1}) \oplus \dots \oplus \gamma(x_{j_m}) \oplus 1$, $1 \le m \le l$
$\mathscr{I}_{\infty 0}$	c_0^n, $\gamma(x_{i_1}) \oplus \dots \oplus \gamma(x_{i_m})$
$\mathscr{I}_{0\infty}$	c_1^n, $\gamma(x_{j_1}) \oplus \dots \oplus \gamma(x_{j_m}) \oplus 1$

Каждая принадлежащая клону $\mathscr{I}_{kl}$ функция f обладает следующими свойствами: $\Phi_f = \varnothing$, $\Psi_f = \varnothing$, $c_f = 0 \Rightarrow |\Gamma_f| \le k$, $c_f = 1 \Rightarrow |\Gamma_f| \le l$. У любой принадлежащей клону $\mathscr{I}_{\infty l}$ функции g при $c_g = 0$ число существенных переменных не ограничивается, в клоне $\mathscr{I}_{k\infty}$ ту же роль играет условие $c_g = 1$, а клон $\mathscr{I}_{\infty\infty}$ содержит все функции h, у которых $\Phi_h = \varnothing$, $\Psi_h = \varnothing$.

4.1. *Эквивалентности*

$$
\begin{aligned}
f \equiv g(\varkappa^s_{\oplus 1}) &\iff (f = g) \vee (f = g \oplus 1) \& (|\Gamma_f| \le s),\\
f \equiv g(\varkappa_{\oplus 1}) &\iff (f = g) \vee (f = g \oplus 1),\\
f \equiv g(\varkappa^{st}_{\oplus 1}) &\iff (f = g) \vee (f = g \oplus 1) \& (|\Gamma_f| \le s)\\
&\qquad\qquad \vee (|\Gamma_f| \le t) \,\&\, (|\Gamma_g| \le t),\ s > t,\\
f \equiv g(\varkappa^s) &\iff (f = g) \vee (|\Gamma_f| \le s) \,\&\, (|\Gamma_g| \le s),\\
f \equiv g(\varkappa^{st}_{c_0}) &\iff (f = g) \vee (|\Gamma_f| \le t) \,\&\, (|\Gamma_g| \le t)\\
&\qquad\qquad \vee (|\Gamma_f| \le s) \,\&\, (|\Gamma_g| \le t) \,\&\, (c_f = 0)\\
&\qquad\qquad \vee (|\Gamma_f| \le t) \,\&\, (|\Gamma_g| \le s) \,\&\, (c_g = 0),\ s > t,\\
f \equiv g(\varkappa^{st}_{c_1}) &\iff (f = g) \vee (|\Gamma_f| \le t) \,\&\, (|\Gamma_g| \le t)\\
&\qquad\qquad \vee (|\Gamma_f| \le s) \,\&\, (|\Gamma_g| \le t) \,\&\, (c_f = 1)\\
&\qquad\qquad \vee (|\Gamma_f| \le t) \,\&\, (|\Gamma_g| \le s) \,\&\, (c_g = 1),\ s > t,\\
f \equiv g(\varkappa^{st}_{c}) &\iff (f = g) \vee (|\Gamma_f| \le s) \,\&\, (|\Gamma_g| \le s) \,\&\, (c_f = c_g = 0)\\
&\qquad\qquad \vee (|\Gamma_f| \le t) \,\&\, (|\Gamma_g| \le t) \,\&\, (c_f = c_g = 1),\\
f \equiv g(\varkappa^{\infty t}_{c}) &\iff (f = g) \vee (c_f = c_g = 0)\\
&\qquad\qquad \vee (|\Gamma_f| \le t) \,\&\, (|\Gamma_g| \le t) \,\&\, (c_f = c_g = 1),\\
f \equiv g(\varkappa^{s\infty}_{c}) &\iff (f = g) \vee (|\Gamma_f| \le s) \,\&\, (|\Gamma_g| \le s) \,\&\, (c_f = c_g = 0)\\
&\qquad\qquad \vee (c_f = c_g = 1),\\
f \equiv g(\varkappa^{st}_{c_0 c_1}) &\iff (f = g) \vee (|\Gamma_f| \le s) \,\&\, (|\Gamma_g| \le t) \,\&\, (c_f = 0) \,\&\, (c_g = 1)\\
&\qquad\qquad \vee (|\Gamma_f| \le t) \,\&\, (|\Gamma_g| \le s) \,\&\, (c_f = 1) \,\&\, (c_g = 0),\\
f \equiv g(\varkappa^{s}_{c_0}) &\iff (f = g) \vee (|\Gamma_f| \le s) \,\&\, (|\Gamma_g| \le s) \,\&\, (c_f = c_g = 0),\\
f \equiv g(\varkappa_{c_0}) &\iff (f = g) \vee (c_f = c_g = 0),\\
f \equiv g(\varkappa^{s}_{c_1}) &\iff (f = g) \vee (|\Gamma_f| \le s) \,\&\, (|\Gamma_g| \le s) \,\&\, (c_f = c_g = 1),\\
f \equiv g(\varkappa_{c_1}) &\iff (f = g) \vee (c_f = c_g = 1),\\
f \equiv g(\varkappa_{c}) &\iff (f = g) \vee (c_f = c_g = 0) \vee (c_f = c_g = 1)
\end{aligned}
$$

являются конгруэнциями на подклонах клона $\mathscr{L}$, не содержащих креативных функций.

Доказательство. Операции ζ и τ сохраняют эти отношения. Равенства (2.5) и (2.6) показывают, что операциями Δ и $*$ невозможно ни увеличить число существенных переменных функций рассматриваемого вида, ни избавиться от последнего слагаемого в каноническом разложении. Это доказывает стабильность отношений относительно этих операций. $\square$

4.2. *Пусть $\varkappa$ — конгруэнция на клоне $\mathscr{K} \in \{\mathscr{J}_{kl}, \mathscr{J}_{\infty l}, \mathscr{J}_{k\infty}, \mathscr{J}_{\infty\infty}\}$, f, g — сравнимые по $\varkappa$ функции из $\mathscr{K}$, имеющие одинаковую арность и не являющиеся проекциями, $f \neq g$, $\Gamma_f \neq \Gamma_g$, $|\Gamma_f| = k \geq m = |\Gamma_g|$. Если $c_f = c_g = 0$, то $\varkappa \supseteq \varkappa^k_{c_0}$, из $c_f = c_g = 1$ следует $\varkappa \supseteq \varkappa^k_{c_1}$, а $c_f \neq c_g$ при $c_f = i$ влечет $\varkappa \supseteq \varkappa^{km}_{c_i}$, $i \in \{0, 1\}$.*

Доказательство. 1. Пусть $c_f = c_g = 0$, арность функций равна n.

(i) Рассмотрим случай $\Gamma_f \supset \Gamma_g$, $\Gamma_g \neq \varnothing$. Операциями ζ и τ сравнение $f \equiv g(\varkappa)$ нетрудно превратить в $f' \equiv g'(\varkappa)$, в котором функции f' и g' имеют прежнее число существенных переменных и эти переменные предшествуют всем фиктивным переменным. Функции $e^2_1 * f'$ и $e^2_1 * g'$ отличаются от f' и g' лишь тем, что имеют на одну фиктивную переменную больше, и также конгруэнтны. Конгруэнтные функции

$$f_1 = \Delta\big((e^2_1 * f') * c^1_0\big), \quad g_1 = \Delta\big((e^2_1 * g') * c^1_0\big)$$

имеют арность n, их существенные переменные предшествуют всем фиктивным переменным, и $|\Gamma_{f_1}| = k - 1$, $|\Gamma_{g_1}| = m - 1$.

Повторив эти действия, получим функции f_2, g_2 арности n, имеющие ранги $k - 2$, $m - 2$ и т. д. Через m шагов возникнет функция f_m ранга $k - m$, конгруэнтная константе c^n_0. Применяя операции ζ, τ к обеим частям сравнения $f_m \equiv c^n_0(\varkappa)$, убеждаемся в том, что все n-арные функции из $\mathscr{J}_{kl}$, имеющие ранг $k - m$ и не содержащие в каноническом разложении единицы, сравнимы по $\varkappa$. Отсюда легко следует, что все такие функции меньшего ранга также сравнимы с c^n_0, а потому и между собой.

Осталось показать, что функции бо́льших рангов сравнимы между собой и с функциями меньших рангов. По построению имеем $f_{m-1} \equiv g_{m-1}(\varkappa)$. Используя операции ζ, τ, в левой части можно получить любую функцию арности n и ранга $|\Gamma_{f_{m-1}}|$. В правой части каждый раз будет стоять какая-то функция ранга $|\Gamma_{g_{m-1}}|$. Ранг функции g равен m, поэтому $|\Gamma_{g_{m-1}}| = 1$. Выше показано, что все существенно одноместные функции арности n сравнимы по $\varkappa$, поэтому сравнимы по $\varkappa$ между собой и с константой 0 все функции ранга $|\Gamma_{f_{m-1}}| = k - m + 1$. Повторяя снова и снова эти рассуждения, приходим к выводу, что конгруэнтными являются любые функции арности n, если их ранги не превышают k. Фиктивные переменные можно добавлять подстановками в проекции и убирать операцией Δ, поэтому утверждение справедливо и для любого $n \geq k$.

(ii) Пусть $\Gamma_f \not\supset \Gamma_g$, $\Gamma_f \not\supset \Gamma_g$, $\Gamma_f \cap \Gamma_g \neq \varnothing$. Подставляя константу c_0 вместо каждой переменной функций f и g, являющейся существенной для g, но фиктивной для f, получим сравнение $f_1 \equiv g_1(\varkappa)$, удовлетворяющее условиям $\Gamma_{f_1} \supset \Gamma_{g_1}$, $|\Gamma_{f_1}| = k$. Выше доказано, что $\varkappa \supseteq \varkappa^k_{c_0}$.

(iii) Остался случай, когда $\Gamma_f \cap \Gamma_g = \varnothing$. Подстановками константы c_0 вместо переменных функций f и g, существенных для g, получим сравнение $f \equiv c^n_0(\varkappa)$. Теперь с помощью операций ζ, τ, Δ и подстановок константы 0 нетрудно показать, что любая функция h арности n сравнима с константой, если только ее ранг не превосходит k. Приемом, указанным в (i), это утверждение распространяется на функции произвольной арности.

2. При $c_f = c_g = 1$ аналогичным образом доказывается, что $\varkappa \supseteq \varkappa^k_{c_1}$.

3. Пусть $c_f = 0$, $c_g = 1$.

(i) Пусть $\Gamma_f \supset \Gamma_g$. Способом, указанным в п. 1(i), доказываем, что любая функция u арности m конгруэнтна c^m_1, если только $c_u = 0$ и $|\Gamma_u| \le k$. Это означает, что $\varkappa \supseteq \varkappa^k_{c_0}$. По условию $f \equiv g(\varkappa)$, поэтому $g \equiv c^n_1(\varkappa)$. Отсюда легко следует, что любая функция, у которой ранг не превосходит m, сравнима с константой 1 и потому $\varkappa \supseteq \varkappa^m_{c_1}$. Так как к тому же любые две функции p и q арности m сравнимы с c^m_1, истинно включение $\varkappa \supseteq \varkappa^{km}_{c_0}$.

(ii) Случай $\Gamma_f \not\supset \Gamma_g$, $\Gamma_f \not\supset \Gamma_g$, $\Gamma_f \cap \Gamma_g \ne \varnothing$ аналогичен рассмотренному в п. 1(ii).

(iii) Рассмотрим случай, когда $\Gamma_f \cap \Gamma_g = \varnothing$. Передвигая поочередно на первое место и заменяя константой c^1_0 все переменные функций f и g, являющиеся существенными для g, но фиктивными для f, получим сравнение вида $f_1 \equiv c^n_1(\varkappa)$, где $|\Gamma_{f_1}| = |\Gamma_f| = k$. Не ограничивая общности, можно считать, что первый аргумент у $f_2 = \zeta f_1$ существенный. Верны сравнения

$$f_2 * c^2_2 \equiv c^{n+1}_1(\varkappa), \quad \tau\big(f_2 * c^2_2\big) \equiv c^{n+1}_1(\varkappa), \quad f_2 * c^2_2 \equiv \tau\big(f_2 * c^2_2\big)(\varkappa).$$

Так как $k > 0$, множества Γ_p и Γ_q, где $p = f_2 * c^2_2$, $q = \tau\big(f_2 * c^2_2\big)$, не совпадают и потому $\varkappa \supseteq \varkappa^k_{c_0}$. Аналогично доказывается включение $\varkappa \supseteq \varkappa^m_{c_1}$. Как и выше, отсюда следует, что $\varkappa \supseteq \varkappa^{km}_{c_0}$. $\square$

4.3. *Если $\varkappa$ — конгруэнция на клоне $\mathscr{K} \in \{\mathscr{J}_{kl}, \mathscr{J}_{\infty l}, \mathscr{J}_{k\infty}, \mathscr{J}_{\infty\infty}\}$, f, g — функции из $\mathscr{K}$, имеющие одинаковую арность и не являющиеся проекциями, $f \ne g$, $f \equiv g(\varkappa)$, $|\Gamma_f| = s$, то $\varkappa \supseteq \varkappa^s_{\oplus 1}$.*

Доказательство. Пусть p, q — функции из $\mathscr{K}$, имеющие одинаковую арность и не являющиеся проекциями, $p = q \oplus 1$, $|\Gamma_p| \le |\Gamma_f|$. Докажем, что $p \equiv q(\varkappa)$. Подставляя функцию h вместо существенной переменной в проекцию арности больше единицы, мы получаем функцию, отличающуюся от h лишь бо́льшим числом фиктивных переменных. Это позволяет предполагать, что функции f, g, p, q имеют одинаковую арность n. Предположим, что $\Gamma_p \subseteq \Gamma_f$ и $c_f = c_p$. Согласованным применением операций ζ, τ превращаем f и p в такие функции f' и p', что первая переменная у f' существенная, а у p' фиктивная. Очевидно, функции $f_1 = f' * c^1_0$ и $p_1 = p' * c^1_0$ обладают следующими свойствами:

$$p_1 = p', \quad c_{f_1} = c_{f'} = c_f, \quad |\Gamma_{f_1}| = |\Gamma_f| - 1.$$

Если $\Gamma_{f_1} \ne \Gamma_{p_1}$, повторим наши действия, и т. д. Через несколько шагов получим функцию f_s, совпадающую с p_s, а потому и с p'. Проделав те же операции с g, получим $g_s = f_s \oplus 1$. Очевидно, $f_s \equiv g_s(\varkappa)$, а потому и $p' \equiv p' \oplus 1(\varkappa)$. Последнее сравнение легко превратить в $p \equiv q(\varkappa)$, так как функции p', $p' \oplus 1$ отличаются от p, q только порядком переменных.

Поскольку $|\Gamma_p| \le |\Gamma_f|$, случай $\Gamma_p \not\subseteq \Gamma_f$ легко привести к рассмотренному, переставляя аргументы функции p. Если $c_f \ne c_p$, то работаем с g вместо f. $\square$

4.4. 1) $\varkappa^s_{\oplus 1} \lhd \varkappa^{s+1}_{\oplus 1}$; 2) $\varkappa^s_{c_0} \lhd \varkappa^{s+1}_{c_0}$; 3) $\varkappa^s_{c_0} \lhd \varkappa^{s0}_{c}$; 4) $\varkappa^t_{c_1} \lhd \varkappa^{0t}_{c}$; 5) $\varkappa^{st}_{c} \lhd \varkappa^{s+1t}_{c}$; 6) $\varkappa^{st}_{c} \lhd \varkappa^{st+1}_{c}$.

Доказательство. 1. Утверждение следует из 4.3.

2. Добавим к парам, входящим в $\varkappa^s_{c_0}$, пару (f, g) несовпадающих функций одинаковой арности n, обладающих свойствами $c_f = c_g = 0$, $|\Gamma_f| = s + 1$, $|\Gamma_g| \le$

$s+1$, и рассмотрим порождаемую конгруэнцию $\varkappa$. Справедливо включение $\varkappa \subseteq \varkappa_{c_0}^{s+1}$, так как порождающие пары принадлежат $\varkappa_{c_0}^{s+1}$. Если $|\Gamma_g| < s+1$, то f оказывается сравнимой со всеми функциями h арности n, обладающими свойствами $|\Gamma_h| \le |\Gamma_g|$, $c_h = 0$, в том числе и с функцией c_0^n. Пусть $|\Gamma_p| = |\Gamma_q| = |\Gamma_f|$, $c_p = c_q = 0$ и арности функций p, q равны n. Из сравнения $f \equiv c_0^n(\varkappa)$ основными операциями предитеративной алгебры легко получить сравнения $p \equiv c_0^n(\varkappa)$, $q \equiv c_0^n(\varkappa)$, означающие, что $p \equiv q(\varkappa)$. Видим, что $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_0}^{s+1}$. Если же $|\Gamma_g| = s+1$, то из $f \ne g$ следует, что $\Gamma_h \ne \Gamma_g$. В 4.2 доказано включение $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_0}^{s+1}$.

3. Конгруэнция $\varkappa_c^{s0}$ помимо пар, входящих в $\varkappa_{c_0}^{s}$, содержит пары, в которых одна из функций является константой 1. Если конгруэнция $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_0}^{s}$ содержит пару $\left(f, c_1^n\right)$, то все функции g, у которых $|\Gamma_q| \le |\Gamma_f|$, оказываются сравнимыми по $\varkappa$ с константой 1 подходящей арности. В частности, для любого $m > 0$ истинно сравнение $c_1^m \equiv c_0^m(\varkappa)$. Поскольку любая функция h, удовлетворяющая условиям $\Gamma_h \le s$, $c_h = 0$, сравнима с константой 0 той же арности, получаем требуемое утверждение.

4. Истинность соотношения $\varkappa_{c_1}^{t} \lhd \varkappa_c^{0t}$ доказывается аналогичным образом.

5. Конгруэнция $\varkappa_c^{s+1t}$ отличается от $\varkappa_c^{st}$ наличием пар (p,q), в которых $c_p = c_q = 0$ и либо $|\Gamma_p| = s+1$, либо $|\Gamma_q| = s+1$. Рассмотрим конгруэнцию $\varkappa$, порождаемую элементами из $\varkappa_c^{st}$ вместе с парой $(f,g) \in \varkappa_c^{s+1t}$, $(f,g) \notin \varkappa_c^{st}$.

(i) Пусть $|\Gamma_f| = s+1$, $|\Gamma_g| \le s$. Так как $c_g = 0$, последнее неравенство означает, что $g \equiv c_0^n(\varkappa)$, где n — арность функции f, и по транзитивности получаем сравнение $f \equiv c_0^n(\varkappa)$. Отсюда следует истинность сравнения $f' \equiv c_0^n(\varkappa)$, где f' — произвольная n-арная функция со свойством $|\Gamma_{f'}| = |\Gamma_f|$. Поскольку с константой 0 сравнима любая функция u, у которой $c_u = 0$ и $|\Gamma_u| \le s$, заключаем, что $\varkappa \supset \varkappa_c^{s+1t}$.

(ii) Если $|\Gamma_f| = |\Gamma_g| = s+1$, то согласно 4.2 $\varkappa \supset \varkappa_{c_0}^{s+1}$, откуда прямо следует нужное утверждение.

6. Этот случай аналогичен случаю 5. $\square$

4.5. *Пусть $\varkappa \supset \varkappa^s$ — конгруэнция на клоне $\mathscr{K} \in \{\mathscr{J}_{kl}, \mathscr{J}_{\infty l}, \mathscr{J}_{k\infty}, \mathscr{J}_{\infty\infty}\}$, f, g — сравнимые по $\varkappa$ функции из $\mathscr{K}$, имеющие одинаковую арность и не являющиеся проекциями,*

$$|\Gamma_f| = k \ge l = |\Gamma_g|, \quad (f,g) \notin \varkappa^s, \quad m = \max(l,s).$$

1. *Из $c_f \ne c_g$, $c_f = i$ следует $\varkappa \supset \varkappa_{c_i}^{km}$.*
2. *Если $c_f = c_g = i$, то $\varkappa \supset \varkappa_{c_i}^{ks}$.*

Доказательство. Пусть $c_f \ne c_g$, тогда согласно 4.2 $\varkappa \supset \varkappa_{c_0}^{kl}$ (при $c_f = 0$) или $\varkappa \supset \varkappa_{c_1}^{kl}$ (при $c_f = 1$). Достаточно рассмотреть первый случай, второй ему аналогичен. Из $\varkappa \supset \varkappa_{c_0}^{kl}$ следует, что любые две функции одной арности сравнимы по $\varkappa$, если только их ранги не превосходят l. Так как $\varkappa \supset \varkappa_{c_0}^{ks}$, такое же утверждение справедливо для функций ранга, не превосходящего s. Отсюда следует $\varkappa \supset \varkappa^m$, а вместе с тем и $\varkappa \supset \varkappa_{c_0}^{km}$.

Если $c_f = c_g = 0$ и $f \ne g$, то $\Gamma_f \ne \Gamma_g$ и потому согласно 4.2 $\varkappa \supset \varkappa_{c_0}^{k}$. Вместе с $\varkappa \supset \varkappa^s$ это дает $\varkappa \supset \varkappa_{c_0}^{ks}$. Случай $c_f = c_g = 0$ аналогичен рассмотренному. $\square$

4.6. Разобьем множество всех таких пар (f,g) функций из $\mathscr{Z}$, что $f \ne g$, на четыре класса по следующим признакам:

$$(1)\ f = g \oplus 1, \quad (2)\ c_f = c_g = 0, \quad (3)\ c_f = c_g = 1, \quad (4)\ f \ne g \oplus 1,\ c_f \ne c_g.$$

Будем говорить, что *функция f имеет тип i*, если $c_f = i$. Назовем конгруэнцию $\varkappa$ *ограниченной в классе i и типе j*, если $\varkappa$ содержит такую пару (u, v) из класса i, что для любой другой пары (g, h) из того же класса если типы функций g и u совпадают и равны j, то $|\Gamma_g| \leq |\Gamma_u|$. Пару (u, v) назовем максимальной типа j в классе i.

4.7. *Если подклон $\mathscr{K}$ клона $\mathscr{Z}$ не содержит креативных функций и функций φ и ψ, то все нетривиальные конгруэнции на $\mathscr{K}$ содержатся в списке* 4.1.

Доказательство. 1. Предположим, что $\mathscr{K} \in \{\mathscr{J}_{kl},\ \mathscr{J}_{\infty l},\ \mathscr{J}_{k\infty},\ \mathscr{J}_{\infty\infty}\}$. Пару $(f, g) \in \varkappa$ назовем *нетривиальной*, если $f \neq g$.

1.1. Пусть все нетривиальные пары из $\varkappa$ принадлежат классу (1). Из утверждения 4.3 следует, что если $\varkappa$ ограничена в данном классе в каком-либо типе, то $\varkappa = \varkappa^s_{\oplus 1}$ для некоторого s, в противном случае $\varkappa = \varkappa_{\oplus 1}$.

1.2. Если все пары из $\varkappa$ принадлежат классу (2), то первая функция любой пары имеет тип 0 и согласно 4.2 либо $\varkappa = \varkappa^s_{c_0}$, либо $\varkappa = \varkappa_{c_0}$.

1.3. Если все пары из $\varkappa$ принадлежат классу (3), то из 4.2 также следует, что либо $\varkappa = \varkappa^s_{c_1}$, либо $\varkappa = \varkappa_{c_1}$.

1.4. Предположим, что все нетривиальные пары из $\varkappa$ содержатся в классе (4). Пусть $(u, v) \in \varkappa$, $|\Gamma_u| = k$, $|\Gamma_v| = m$, функция u имеет тип i. Из $u \neq v \oplus 1$, $c_u \neq c_v$ следует, что $\Gamma_u \neq \Gamma_v$. Опять воспользуемся утверждением 4.2. Если $k \geq m$, то $\varkappa \supseteq \varkappa^{km}_{c_i}$. Это означает, что сравнимы по $\varkappa$ все функции одной арности, у которых ранг не превосходит m, в том числе и функции типа i. По предположению сравнимыми могут быть либо совпадающие функции, либо функции разных типов, значит, этот случай невозможен.

2. Рассмотрим теперь вариант, когда $\varkappa$ содержит лишь пары, принадлежащие двум фиксированным разным классам. Предположим, что нетривиальные пары (u_1, v_1), (u_2, v_2) функций, сравнимых по $\varkappa$, принадлежат классам (i) и (j) соответственно.

2.1. Пусть $i = 1$, $j = 2$ и функции u_1, u_2 имеют ранги s, t. Поскольку $u_1 \neq v_1$, из 4.3 получаем соотношение $\varkappa \supset \varkappa^s_{\oplus 1}$. По предположению $c_{u_2} = c_{v_2} = 0$ и $u_2 \neq v_2$, поэтому $\Gamma_{u_2} \neq \Gamma_{u_2}$, вследствие чего $\varkappa \supset \varkappa^t_{c_0}$ согласно 4.2. Возьмем три такие функции f, g и h, что ранг каждой из них не превосходит меньшего из чисел s, t, ранг функции h меньше ранга функции f и $f = g \oplus 1$. В силу сказанного выше $f \equiv g(\varkappa^s_{\oplus 1})$ и $g \equiv h(\varkappa^t_{c_0})$, следовательно, $f \equiv h(\varkappa)$. Если f имеет тип 1, то g и h имеют тип 0. Видим, что пара (f, h) принадлежит $\varkappa$ и не принадлежит классу (1), так как ранги функций f и h не совпадают, и не принадлежит классу (2), поскольку типы этих функций различны. Этот случай невозможен.

2.2. Рассуждения, подобные проведенным в п. 2.2, показывают, что случай $i = 1$, $j = 3$ также невозможен.

2.3. Предположим, что $i = 1$, $j = 4$. Пусть $(u, v) \in \varkappa$, $|\Gamma_u| = k$, $|\Gamma_v| = m$, пара (u, v) принадлежит классу (4) и функция u имеет тип l. В п. 1.4 показано, что при таких предположениях из $k \geq m$ следует истинность включения $\varkappa \supseteq \varkappa^{km}_{c_l}$ и потому имеются две конгруэнтные функции f, g, у которых ранги различны, а типы совпадают. Пара (f, g) не принадлежит классам (1) и (4), следовательно, этот случай невозможен.

2.4. Пусть $i = 2$, $j = 3$, ранги функций u_1, u_2 равны s, t и не меньше рангов функций v_1, v_2. Согласно 4.2 $\varkappa \supseteq \varkappa^s_{c_0}$, $\varkappa \supseteq \varkappa^t_{c_1}$. Это означает, что $\varkappa \supseteq \varkappa^{st}_{c}$.

Если пары (u_1, v_1), (u_2, v_2) максимальные в своем типе, то $\varkappa = \varkappa_c^{st}$. В случае, когда конгруэнция $\varkappa$ не ограничена в классе (2) и типе 0, получаем равенство $\varkappa = \varkappa_c^{\infty t}$. При неограниченности конгруэнции в классе (3) имеем $\varkappa = \varkappa_c^{s\infty}$, а если она не ограничена в обоих классах, то $\varkappa = \varkappa_c$.

2.5. Если $i = 2$, $j = 4$ и принадлежащая $\varkappa$ пара (f, g) содержится в классе (4), то $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_l}^{km}$, где k, m — ранги функций f, g, а l — тип функции f. При $l = 1$ сравнимы по $\varkappa$ все функции, у которых ранг не превосходит m, если они имеют одинаковую арность и тип 1. По предположению сравнимыми могут быть либо совпадающие функции, либо функции типа 0, либо функции разных типов, значит, этот случай невозможен. Если же $l = 0$, то поскольку пара (f, g) принадлежит классу (4), функция g имеет тип 1 и вместо (f, g) можно взять пару (g, f).

2.6. Остался случай $i = 3$, $j = 4$. Он подобен рассмотренному в п. 2.5.

3. Предположим, что нетривиальные пары из $\varkappa$ могут принадлежать трем различным классам (i), (j), (k), пары (f_i, g_i), (f_j, g_j), (f_k, g_k) выбраны в этих классах и m_s, n_s — ранги функций f_s, g_s, причем $m_s \geq n_s$, $s \in \{i, j, k\}$.

3.1. Пусть $i = 2$, $j = 3$, $k = 4$ и l — тип функции f_4, тогда $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_0}^{m_2}$, $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_1}^{m_3}$, $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_l}^{m_4 n_4}$. Введем обозначения $p = \max(m_2, m_4)$, $q = \max(m_3, n_4)$ и предположим, что $l = 0$. Из $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_0}^{m_2}$, $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_l}^{m_4 n_4}$ следует $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_0}^{p n_4}$. Отсюда при $p > q$ получаем $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_0}^{pq}$, из $p < q$ вытекает $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_1}^{pq}$, а в случае $p = q$ истинно включение $\varkappa \supseteq \varkappa^p$. Случай $l = 1$ аналогичен. Если конгруэнция $\varkappa$ не ограничена по какому-либо типу, то она совпадает с одной из конгруэнций $\varkappa_c^{z\infty}$, $\varkappa_c^{\infty z}$, $\varkappa_c$.

3.2. Предположим, что $i = 1$, $j = 3$, $k = 4$. Конгруэнция $\varkappa$ не должна содержать пар функций типа 0. Это противоречит истинному соотношению $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_l}^{m_4 n_4}$, где l — тип функции f_4. Этот случай невозможен.

3.3. Случай $i = 1$, $j = 2$, $k = 4$ аналогичен рассмотренному.

3.4. Остался случай $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$. Истинны соотношения $\varkappa \supset \varkappa_{\oplus 1}^{m_1}$, $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_0}^{m_2}$, $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_1}^{m_3}$. Два последних означают, что $\varkappa \supseteq \varkappa_c^{m_2 m_3}$. Видим, что конгруэнтны любые две функции при условии, что их арности и типы совпадают, а ранг не превосходит m_2, если функции имеют тип 0, и не превосходит m_3 в ином случае. Соотношение $\varkappa \supset \varkappa_{\oplus 1}^{m_1}$ означает, что сравнимы любые две функции одинаковой арности, если их типы противоположны, а ранги совпадают и не превосходят m_1. Отсюда следует, что если $p = \max(m_2, m_3)$, $q = \min(m_2, m_3)$, то $\varkappa \supset \varkappa_{c_l}^{pq}$ при $m_1 < p$, здесь $l = 0$, если $p = m_2$, и $l = 1$, если $p = m_3$. В случае $m_1 \geq p$ истинно соотношение $\varkappa \supset \varkappa_{\oplus 1}^{m_1 p}$. Если конгруэнция $\varkappa$ ограничена по каждому типу, то она совпадет с одной из конгруэнций указанного вида. Если же $\varkappa$ не ограничена по какому-либо типу, то она совпадает с одной из конгруэнций $\varkappa_c^{z\infty}$, $\varkappa_c^{\infty z}$, $\varkappa_c$, $\varkappa_{\oplus 1}$.

4. Если среди нетривиальные пар из $\varkappa$ есть представители всех четырех классов, то пусть пары (f_i, g_i), $i = \overline{1, 4}$, выбраны в этих классах, s_j, t_j — ранги функций f_j, g_j, причем $s_j \geq t_j$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Мы уже убедились в том, что

$$(a)\ \varkappa \supset \varkappa_{\oplus 1}^{s_1}, \quad (b)\ \varkappa \supset \varkappa_{c_0}^{s_2}, \quad (c)\ \varkappa \supset \varkappa_{c_1}^{s_3}, \quad (d)\ \varkappa \supseteq \varkappa_{c_l}^{s_4 t_4},$$

где l — тип функции f_4. В п. 3.4 выяснено, что выполнение условий (a), (b), (c) означают истинность одного из соотношений вида (e) $\varkappa \supset \varkappa_{c_l}^{pq}$, (f) $\varkappa \supset \varkappa_{\oplus 1}^{pq}$. Формулы (d) и (e) фактически означают одно и то же, поэтому рассмотрим систему, состоящую из (d) и (f). Если $m = \max(t_4, q)$, то их можно заменить на

(d_1) $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_l}^{s_4 m}$, (f_1) $\varkappa \supset \varkappa_{\oplus 1}^{pm}$. При $s_4 > p \geq m$ получаем соотношение $\varkappa \supseteq \varkappa_{c_l}^{s_4 p}$, неравенство $s_4 < p$ порождает соотношение $\varkappa \supset \varkappa_{\oplus 1}^{ps_4}$, превращающееся в $\varkappa \supset \varkappa^p$ при $s_4 = p$.

Приходим к выводу, что при ограниченности конгруэнции $\varkappa$ во всех классах и типах на клоне $\mathscr{K}$ ее вид имеет четыре варианта: $\varkappa_{\oplus 1}^{zu}$, $\varkappa_{c_0}^{zu}$, $\varkappa_{c_1}^{zu}$, $\varkappa^z$. Если $\varkappa$ не ограничена по некоторому классу или типу, на $\mathscr{K}$ могут быть конгруэнции вида $\varkappa_{\oplus 1}$, $\varkappa_c^{z\infty}$, $\varkappa_c^{\infty z}$, $\varkappa_c$. $\square$

5. Конгруэнции на клонах, содержащих функции φ или ψ

5.1. *Пусть f и g — две n-арные существенно одноместные функции, принадлежащие клону $\mathscr{K}$, $\varkappa$ — конгруэнция на $\mathscr{K}$ и $\Delta^n f(x) \notin \{\gamma(x), \delta(x)\}$ или $\Delta^n g(x) \notin \{\gamma(x), \delta(x)\}$. Если существенные переменные функций f и g имеют разные индексы и $f \equiv g(\varkappa)$, то $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathscr{E}}$.*

Доказательство. Если $f, g \in \mathscr{E}$, то согласно [3] $\varkappa = \varkappa_a$. Пусть $g \notin \mathscr{E}$. Синхронным применением операций ζ, τ из функций f, g получим такие сравнимые по $\varkappa$ функции f_1, g_1, что последняя переменная у функции f_1 существенная, а у g_1 фиктивная. Возьмем функцию $h(x_1, \dots, x_m) \in \mathscr{K}$ и подставим вместо последней переменной в функции f_1 и g_1, а затем применим $n-1$ раз операцию Δ. Получим функции

$$\Delta^{n-1}(f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_n, \dots, x_{m+n-1}))) = s(x_1, \dots, x_m),$$

$$\Delta^{n-1}(g(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_n, \dots, x_{m+n-1}))) = u(x_1, \dots, x_m).$$

Поскольку последняя переменная функции g фиктивная, функция u не зависит от h. Что же касается функции s, то тут возможны несколько вариантов.

1. Если $f \in \mathscr{E}$, то $s = h$. Это означает, что любая m-арная функция из $\mathscr{K}$ сравнима по $\varkappa$ с u, поэтому $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathscr{E}}$.

2. При $\Delta^{n-1} f \in \{\varphi, \psi\}$ и $h \notin \mathscr{E}$ также справедливо равенство $s = h$. Каждая не принадлежащая $\mathscr{E}$ m-арная функция из $\mathscr{K}$ сравнима по $\varkappa$ с u, следовательно, $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathscr{E}}$.

3. При $\Delta^{n-1} f \in \{\varphi \oplus 1, \psi \oplus 1\}$ и $h \notin \mathscr{E}$ получаем равенство $s = h \oplus 1$ и потому $u \equiv h \oplus 1(\varkappa)$. Однако вместе с h клон $\mathscr{K}$ содержит функцию $h \oplus 1$. Подставляя в функции f_1 и g_1 вместо h функцию $h \oplus 1$, получим требуемое сравнение $u \equiv h(\varkappa)$.

4. Если $\Delta^{n-1} f \in \{\gamma(x), \delta(x)\}$, то по условию $\Delta^n g \notin \{\gamma(x), \delta(x)\}$. Меняя ролями f и g и повторяя предыдущие рассуждения, получим соотношение $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathscr{E}}$. $\square$

5.2. *Пусть $\varkappa \subseteq \varkappa_a$ — конгруэнция на клоне $\mathscr{K} \subset \mathscr{Z}$, n-арная функция f существенно одноместная, $\Delta^n f(x) \in \{\varphi(x), \psi(x), \overline{\varphi}(x), \overline{\psi}(x)\}$ и $f \equiv g(\varkappa)$.*

(а) *Если индексы существенных переменных функций f и g совпадают и $\Delta^n g(x) \in \{\gamma(x), \delta(x)\}$, то $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathscr{E}}$.*

(б) *Если функция g принимает одно значение, то $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathscr{E}}$.*

Доказательство. (а) Для любой не являющейся проекцией функции $h \in \mathscr{K}$ верно сравнение $((\Delta^n f) * h) \equiv ((\Delta^n g) * h)(\varkappa)$. Функция h может принимать лишь значения 0 и 1. Поскольку $\Delta^n g \in \{\gamma, \delta\}$, функция $(\Delta^n g) * h$ является константой. При $\Delta^n f \in \{\varphi, \psi\}$ справедливо равенство $(\Delta^n f) * h = h$ и все отличные от проекций функции одной арности из $\mathscr{K}$ оказываются сравнимыми с константой той же арности. Если $\Delta^n f \in \{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}$, то вместе с h клон $\mathscr{K}$ содержит функцию $h\oplus 1$ и из $((\Delta^n f)*(h\oplus 1)) \equiv ((\Delta^n g)*(h\oplus 1))(\varkappa)$ мы получаем сравнение $h \equiv ((\Delta^n g)*(h\oplus 1))(\varkappa)$, в котором $(\Delta^n g)*(h\oplus 1)$ также является константой.

(б) Пусть функции p, q не являются проекциями, принадлежат клону $\mathscr{K}$ и имеют одинаковую арность. Если $\Delta^n f = \varphi$ и $\Delta^n g = c_0$, то

$$\varphi \equiv c_0(\varkappa), \quad \varphi * p \equiv c_0 * p(\varkappa), \quad \varphi * p = p, \quad \varphi * q = q, \quad \varphi * q \equiv c_0 * q(\varkappa), \quad p \equiv q(\varkappa).$$

Остальные случаи аналогичны. $\square$

5.3. Будем обозначать через $\varphi_i^n(x_1, \dots, x_n)$ и $\psi_i^n(x_1, \dots, x_n)$ n-арные функции с единственной существенной переменной x_i, отличающиеся соответственно от $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ лишь фиктивными переменными. Через $\mathscr{E}^{\varphi}$, $\mathscr{E}^{\psi}$ и $\mathscr{E}^{\varphi\psi}$ обозначим клоны, образованные всеми проекциями и соответственно всеми функциями вида φ_i^n, ψ_i^n или и теми и другими вместе.

5.4. *На клонах, образованных существенно одноместными функциями, имеется конгруэнция $\varkappa_{\mathrm{ind}}$, по которой сравнимы функции с совпадающими индексами существенных переменных.* $\square$

5.5. *На клонах $\mathscr{E}^{\varphi}$ и $\mathscr{E}^{\psi}$ нет конгруэнций, отличных от $\varkappa_0$, $\varkappa_{\mathrm{ind}}$, $\varkappa_{\mathscr{E}}$, $\varkappa_a$, $\varkappa_1$. На клоне $\mathscr{E}^{\varphi\psi}$ помимо указанных имеется конгруэнция $\varkappa_{\varphi\psi}$, определенная следующим образом: n-арные функции f и g сравнимы по $\varkappa_{\varphi\psi}$ тогда и только тогда, когда индексы существенных переменных этих функций совпадают и либо $f = g$, либо*

$$f \neq g, \quad \Delta^n f(x) \in \{\varphi(x), \psi(x)\}, \quad \Delta^n g(x) \in \{\varphi(x), \psi(x)\}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть $\varkappa$ — конгруэнция на клоне $\mathscr{K} \in \{\mathscr{E}^{\varphi}, \mathscr{E}^{\psi}, \mathscr{E}^{\varphi\psi}\}$. Клон $\mathscr{K}$ содержит только существенно одноместные функции. Если индексы существенных переменных каких-то функций f и g не совпадают, то $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathscr{E}}$ согласно 5.1 и потому $\varkappa \in \{\varkappa_{\mathscr{E}}, \varkappa_a, \varkappa_1\}$.

Предположим, что индексы существенных переменных любых сравнимых по $\varkappa$ функций совпадают. Принадлежащие клону $\mathscr{E}^{\varphi}$ n-арные функции имеют либо вид $\varphi_i^n(x_1, \dots, x_n)$, либо вид $e_i^n(x_1, \dots, x_n)$. Если $\varphi_i^n \equiv e_i^n(\varkappa)$ для каких-то n и i, то, очевидно, $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathrm{ind}}$. В ином случае $\varkappa = \varkappa_0$. Для $\mathscr{E}^{\varphi}$ рассуждения аналогичны.

Перейдем к клону $\mathscr{E}^{\varphi\psi}$. Если какая-то проекция e_i^n сравнима по $\varkappa$ с $g \in \{\varphi_i^n, \psi_i^n\}$, то $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathrm{ind}}$, так как если, например, $g = \varphi_i^n$, то $\varphi_i^n \equiv c_0 * q(\varkappa)$, т. е. $\psi_i^n \equiv \varphi_i^n(\varkappa)$.

Кроме отмеченного возможен случай (5.1), означающий, что $\varkappa \supseteq \varkappa_{\varphi\psi}$. Поскольку $\varkappa_{\varphi\psi} \lhd \varkappa_{\mathrm{ind}}$, справедливо соотношение $\varkappa \in \{\varkappa_{\varphi\psi}, \varkappa_{\mathrm{ind}}, \varkappa_{\mathscr{E}}, \varkappa_a, \varkappa_1\}$. $\square$

Изучим теперь конгруэнции на клонах, принадлежащих множествам Q и R, где

$$Q = \{\mathscr{J}_{im} \cup \mathscr{E}^{p} \mid i, m \in \{k, l, \infty\},\ p \in \{\varphi, \psi\}\},\ R = \{\mathscr{J}_{im} \cup \mathscr{E}^{\varphi\psi} \mid i, m \in \{k, l, \infty\}\}.$$

5.6. *Если $\varkappa$ — конгруэнция на клоне $\mathscr{K} \in Q \cup R$, n-арные функции f и g сравнимы по $\varkappa$, функция f существенно многоместная не креативная, функция g существенно одноместная и $\Delta^n g(x) \in \{\varphi(x), \psi(x), \overline{\varphi}(x), \overline{\psi}(x)\}$, то $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathscr{E}}$.*

Доказательство. Не являясь креативной, функция f имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = \gamma(x_{i_1}) \oplus \dots \oplus \gamma(x_{i_m}) \oplus c_i, \quad i \in \{0, 1\}.$$

Подставив функцию $\Delta^n g(x)$ в функции f и g вместо переменных, существенных для f, но фиктивных для g, получим сравнение $f_1 \equiv g_1(\varkappa)$.

1. Если существенные переменные функций f и g имеют разные индексы, то f_1 — константа, так как из $\Delta^n g_1(x) \in \{\varphi(x), \psi(x), \overline{\varphi}(x), \overline{\psi}(x)\}$ следует $\gamma(\Delta^n g_1(x)) = c_0(x)$. Согласно 5.2 $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathscr{E}}$.

2. Если индексы существенных переменных функций f и g совпадают, то $f_1 = \gamma$ и утверждение также следует из 5.2. $\square$

5.7. *Эквивалентность $\varkappa$ тогда и только тогда является подарностной конгруэнцией на клоне $\mathscr{J}_{im} \cup \mathscr{E}^p$, где $i, m \in \{k, l, \infty\}$, $p \in \{\varphi, \psi\}$, когда либо $\varkappa = \varkappa_{\mathscr{E}}$, либо из сравнимости по $\varkappa$ функций f и g следует, что*

$$f \in \mathscr{J}_{im} \,\&\, g \in \mathscr{J}_{im} \,\&\, f \equiv g(\varkappa_1) \vee f \notin \mathscr{J}_{im} \,\&\, g \notin \mathscr{J}_{im} \,\&\, f \equiv g(\varkappa_2),$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — конгруэнции на $\mathscr{J}_{im}$ и $\mathscr{E}^p$ соответственно, причем $\varkappa_2 \in \{\varkappa_0, \varkappa_{\mathrm{ind}}\}$.

Эквивалентность $\varkappa$ тогда и только тогда является конгруэнцией на клоне $\mathscr{J}_{im} \cup \mathscr{E}^{\varphi\psi}$, где $i, m \in \{k, l, \infty\}$, когда либо $\varkappa = \varkappa_{\mathscr{S}}$, либо из сравнимости по $\varkappa$ функций f и g следует, что

$$f \in \mathscr{J}_{im} \,\&\, g \in \mathscr{J}_{im} \,\&\, f \equiv g(\varkappa_3) \vee f \notin \mathscr{J}_{im} \,\&\, g \notin \mathscr{J}_{im} \,\&\, f \equiv g(\varkappa_4),$$

где $\varkappa_3$ и $\varkappa_4$ — конгруэнции на $\mathscr{J}_{im}$ и $\mathscr{E}^{\varphi\psi}$ соответственно и $\varkappa_4 \in \{\varkappa_0, \varkappa_{\mathrm{ind}}\}$.

Доказательство. Если эквивалентность $\varkappa$ является конгруэнцией на $\mathscr{J}_{im} \cup \mathscr{E}^p$ или $\mathscr{J}_{im} \cup \mathscr{E}^{\varphi\psi}$, то ее ограничения на множестве функций из $\mathscr{J}_{im}$ и соответственно либо на множестве $\mathscr{E}^p$, либо на множестве $\mathscr{E}^{\varphi\psi}$ являются конгруэнциями на соответствующих клонах и уже изучены. Предположим, что $f \in \mathscr{J}_{im}$, $g \in \{\varphi_i^n, \psi_i^n\}$ и $f \equiv g(\varkappa)$, тогда $\Delta^{n-1} f \equiv \Delta^{n-1} g(\varkappa)$. Очевидно, если $u = \Delta^{n-1} g$, то $u \in \{\varphi, \psi\}$, а функция $\Delta^{n-1} f$ либо является константой, либо совпадает с γ. Из $\gamma \equiv u(\varkappa)$ следует $\gamma * \gamma \equiv u * u(\varkappa)$, где $u * u$ является константой, а $g * g = g$. Из сравнимости с константой функции φ или ψ легко вытекает, что все отличные от проекций функции одной арности сравнимы с некоторой константой и потому $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathscr{S}}$. Отсюда и из лемм 5.1–5.6 получаем доказываемые утверждения. $\square$

5.8. Обозначим через $\overline{\varphi}_i^n(x_1, \dots, x_n)$ и $\overline{\psi}_i^n(x_1, \dots, x_n)$ n-арные функции с единственной существенной переменной x_i, отличающиеся соответственно от $\overline{\varphi}(x)$ и $\overline{\psi}(x)$ лишь фиктивными переменными. Через $\mathscr{E}^{\overline{\varphi}}$, $\mathscr{E}^{\overline{\psi}}$ и $\mathscr{E}^{\overline{\varphi}\overline{\psi}}$ обозначим клоны, образованные соответственно множествами функций $\{\varphi_i^n\} \cup \{\overline{\varphi}_i^n\}$, $\{\psi_i^n\} \cup \{\overline{\psi}_i^n\}$, $\{\varphi_i^n\} \cup \{\overline{\varphi}_i^n\} \cup \{\psi_i^n\} \cup \{\overline{\psi}_i^n\}$ вместе со всеми проекциями.

5.9. *На клонах $\mathscr{E}^{\overline{\varphi}}$, $\mathscr{E}^{\overline{\psi}}$ помимо уже рассмотренных имеются конгруэнции $\varkappa_{\mathrm{ind}}^0$ и $\varkappa_{\mathrm{ind}}^1$. Две функции сравнимы по $\varkappa_{\mathrm{ind}}^0$ тогда и только тогда, когда их арности совпадают, и либо они равны, либо обе имеют одинаковые индексы существенной переменной, одна из них является проекцией, а вторая принадлежит множеству $\{\varphi_i^n\}$.*

Две функции сравнимы по $\varkappa_{\mathrm{ind}}^1$ тогда и только тогда, когда их арности совпадают, и либо они равны, либо обе отличны от проекций и имеют одинаковые индексы существенной переменной. $\square$

5.10. *На клоне $\mathscr{E}^{\overline{\varphi}\overline{\psi}}$ кроме ранее рассмотренных имеются конгруэнции $\varkappa_{\mathrm{ind}}^{0\varphi}$, $\varkappa_{\mathrm{ind}}^{0\psi}$, $\varkappa_{\mathrm{ind}}^1$, $\varkappa_{\varphi\psi}$. Две функции сравнимы по $\varkappa_{\mathrm{ind}}^{0\varphi}$ тогда и только тогда, когда их арности совпадают, и либо они равны, либо обе имеют одинаковые индексы* *существенной переменной, одна из них является проекцией, а вторая принадлежит множеству* $\{\varphi_i^n\}$.

Две функции сравнимы по $\varkappa_{\mathrm{ind}}^{0\psi}$ *тогда и только тогда, когда их арности совпадают, и либо они равны, либо обе имеют одинаковые индексы существенной переменной, одна из них является проекцией, а вторая принадлежит множеству* $\{\psi_i^n\}$.

Две различные функции сравнимы по $\varkappa_{\mathrm{ind}}^1$ *тогда и только тогда, когда их арности совпадают, индексы существенных переменных этих функций также совпадают, и либо они обе принадлежит множеству* $\{\varphi_i^n, \overline{\varphi}_i^n\}$, *либо обе принадлежит множеству* $\{\psi_i^n, \overline{\psi}_i^n\}$.

Две различные функции сравнимы по $\varkappa_{\varphi\psi}$ *тогда и только тогда, когда их арности совпадают, индексы существенных переменных этих функций также совпадают, обе отличны от проекций, и если одна из них равна* φ_i^n, *то другая равна* ψ_i^n, *а если одна равна* $\overline{\varphi}_i^n$, *то другая равна* $\overline{\psi}_i^n$. □

5.11. *На клонах* $\mathscr{E}^{\overline{\varphi}}$ *и* $\mathscr{E}^{\overline{\psi}}$ *нет конгруэнций, отличных от* $\varkappa_0$, $\varkappa_{\mathrm{ind}}^0$, $\varkappa_{\mathrm{ind}}^1$, $\varkappa_{\mathrm{ind}}$, $\varkappa_{\mathscr{E}}$, $\varkappa_a$, $\varkappa_1$.

На клоне $\mathscr{E}^{\overline{\varphi}\overline{\psi}}$ *нет конгруэнций, отличных от* $\varkappa_0$, $\varkappa_{\mathrm{ind}}^{0\varphi}$, $\varkappa_{\mathrm{ind}}^{0\psi}$, $\varkappa_{\mathrm{ind}}^1$, $\varkappa_{\varphi\psi}$, $\varkappa_{\mathrm{ind}}$, $\varkappa_{\mathscr{E}}$, $\varkappa_a$, $\varkappa_1$.

Доказательство. Пусть $\varkappa$ — конгруэнция на клоне $\mathscr{K} \in \{\mathscr{E}^{\overline{\varphi}}, \mathscr{E}^{\overline{\psi}}, \mathscr{E}^{\overline{\varphi}\overline{\psi}}\}$. Клон $\mathscr{K}$ содержит только существенно одноместные функции. Если в нем найдутся сравнимые по $\varkappa$ функции f и g, у которых индексы существенных переменных не совпадают, то $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathscr{S}}$ согласно 5.1 и потому $\varkappa \in \{\varkappa_{\mathscr{S}}, \varkappa_a, \varkappa_1\}$.

Пусть индексы существенных переменных у любых сравнимых по $\varkappa$ функций совпадают. Если $\varkappa \neq \varkappa_0$, то найдутся сравнимые по $\varkappa$ несовпадающие функции f и g. Рассмотрим случай $\mathscr{K} = \mathscr{E}^{\overline{\varphi}}$, и пусть $f = \varphi_i^n$. При $g = \overline{\varphi}_i^n$ получаем сравнение $\zeta^{i-1}\varphi_i^n \equiv \zeta^{i-1}\overline{\varphi}_i^n(\varkappa)$, т. е. $\varphi_1^n \equiv \overline{\varphi}_1^n(\varkappa)$. Отсюда следует, что

$$\Delta^k\big(\varphi_1^n * \varphi_j^m\big) \equiv \Delta^k\big(\overline{\varphi}_1^n * \varphi_j^m\big)(\varkappa).$$

Варьируя m, j и k, доказываем, что $\varphi_s^p \equiv \overline{\varphi}_s^p(\varkappa)$ для любых p и s. Это означает, что $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathrm{ind}}^1$. Если никакая проекция не сравнима с функцией, не принадлежащей $\mathscr{E}$, то $\varkappa = \varkappa_{\mathrm{ind}}^1$.

Если $g = e_i^n$, то, очевидно, $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathrm{ind}}^0$. С учетом сказанного выше из $\varkappa \not\supseteq \varkappa_{\mathrm{ind}}^1$ следует $\varkappa = \varkappa_{\mathrm{ind}}^0$. Если же $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathrm{ind}}^1$ и $\varkappa \supseteq \varkappa_{\mathrm{ind}}^0$, то $\varkappa = \varkappa_a$.

Клон $\mathscr{E}^{\overline{\psi}}$ изоморфен клону $\mathscr{E}^{\overline{\varphi}}$ и не требует отдельного рассмотрения. Перейдем к клону $\mathscr{K} = \mathscr{E}^{\overline{\varphi}\overline{\psi}}$. Эквивалентность $\varkappa$ помимо диагональных с точностью до перемены местами функций φ и ψ может содержать пары следующих типов:

$$\begin{gathered} (1)\ (\varphi_i^n, e_i^n), \quad (2)\ (\varphi_i^n, \psi_i^n), \quad (3)\ (\overline{\varphi}_i^n, e_i^n), \\ (4)\ (\overline{\varphi}_i^n, \varphi_i^n), \quad (5)\ (\overline{\varphi}_i^n, \psi_i^n), \quad (6)\ (\overline{\varphi}_i^n, \overline{\psi}_i^n). \end{gathered} \tag{5.2}$$

Нетрудно заметить, что если $\varkappa$ содержит пару (i), то

$$i = 1 \Rightarrow \varkappa \supseteq \varkappa_{\mathrm{ind}}^{0\varphi}, \quad i = 2 \Rightarrow \varkappa \supseteq \varkappa_{\varphi\psi}, \quad i = 3 \Rightarrow \varkappa \supseteq \varkappa_{\mathrm{ind}},$$

$$i = 4 \Rightarrow \varkappa \supseteq \varkappa_{\mathrm{ind}}^1, \quad i = 5 \Rightarrow \varkappa \supseteq \varkappa_{\mathscr{E}}, \quad i = 6 \Rightarrow \varkappa \supseteq \varkappa_{\varphi\psi}.$$

Включение в $\varkappa$ нескольких пар из списка (5.2) приводит к аналогичным заключениям. □

5.12. *Эквивалентность $\varkappa$ тогда и только тогда является подарностной конгруэнцией на клоне $\mathscr{J}_{im} \cup \mathscr{E}^p$, где $i, m \in \{k, l, \infty\}$, $p \in \{\overline{\varphi}, \overline{\psi}\}$, когда либо $\varkappa = \varkappa_{\mathscr{E}}$, либо из сравнимости по $\varkappa$ функций f и g следует, что или*

$$f \in \mathscr{J}_{im} \,\&\, g \in \mathscr{J}_{im} \,\&\, f \equiv g(\varkappa_1) \vee f \notin \mathscr{J}_{im} \,\&\, g \notin \mathscr{J}_{im} \,\&\, f \equiv g(\varkappa_2),$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — конгруэнции на $\mathscr{J}_{im}$ и $\mathscr{E}^p$ соответственно, причем $\varkappa_2 \in \left\{\varkappa_0, \varkappa^0_{\mathrm{ind}}\right\}$, или

$$f \in \mathscr{J}_{im} \,\&\, g \in \mathscr{J}_{im} \,\&\, f \equiv g(\varkappa_3) \vee f \notin \mathscr{J}_{im} \,\&\, g \notin \mathscr{J}_{im} \,\&\, f \equiv g(\varkappa_4),$$

где $\varkappa_3$ и $\varkappa_4$ — конгруэнции на $\mathscr{J}_{im}$ и $\mathscr{E}^p$ соответственно, причем

$$\varkappa_3 \in \left\{\varkappa^s_{\oplus 1}, \varkappa_{\oplus 1}, \varkappa^{st}_{\oplus 1}\varkappa^s\right\}, \quad \varkappa_4 \in \left\{\varkappa^1_{\mathrm{ind}}, \varkappa_{\mathrm{ind}}\right\}.$$

Эквивалентность $\varkappa$ тогда и только тогда является конгруэнцией на клоне $\mathscr{J}_{im} \cup \mathscr{E}^{\overline{\varphi}\overline{\psi}}$, где $i, m \in \{k, l, \infty\}$, когда либо $\varkappa = \varkappa_{\mathscr{I}}$, либо из сравнимости по $\varkappa$ функций f и g следует, что или

$$f \in \mathscr{J}_{im} \,\&\, g \in \mathscr{J}_{im} \,\&\, f \equiv g(\varkappa_5) \vee f \notin \mathscr{J}_{im} \,\&\, g \notin \mathscr{J}_{im} \,\&\, f \equiv g(\varkappa_6),$$

где $\varkappa_5$ и $\varkappa_6$ — конгруэнции на $\mathscr{J}_{im}$ и $\mathscr{E}^{\varphi\psi}$ соответственно и $\varkappa_6 \in \left\{\varkappa_0, \varkappa^{0\varphi}_{\mathrm{ind}}, \varkappa^{0\psi}_{\mathrm{ind}}\right\}$, или

$$f \in \mathscr{J}_{im} \,\&\, g \in \mathscr{J}_{im} \,\&\, f \equiv g(\varkappa_7) \vee f \notin \mathscr{J}_{im} \,\&\, g \notin \mathscr{J}_{im} \,\&\, f \equiv g(\varkappa_8),$$

где $\varkappa_7$ и $\varkappa_8$ — конгруэнции на $\mathscr{J}_{im}$ и $\mathscr{E}^{\varphi\psi}$ соответственно и либо $\varkappa_8 = \varkappa_{\varphi\psi}$, либо $\varkappa_7 \in \left\{\varkappa^s_{\oplus 1}, \varkappa_{\oplus 1}, \varkappa^{st}_{\oplus 1}\varkappa^s\right\}$, $\varkappa_8 \in \left\{\varkappa^1_{\mathrm{ind}}, \varkappa_{\mathrm{ind}}\right\}$.

Доказательство. Необходимые рассуждения аналогичны проведенным в 5.7 , лишь к списку лемм следует добавить 5.11. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры Поста. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1976.
2. *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. 1966. Т. 5, № 2. С. 5–24.
3. *Горлов В. В.* О конгруэнциях на замкнутых классах Поста // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 5. С. 725–734.
4. *Lau D.* Kongruenzen auf gewissen Teilklassen von $P_{k,l}$ // Rostock. Math. Kolloq. 1977. N 3. P. 37–43.
5. *Мальцев И. А.* О конгруэнциях на подалгебрах итеративных алгебр Поста // Дискретный анализ. 1976. № 29. С. 39–52.
6. *Мальцев И. А.* Конгруэнции и автоморфизмы на клетках алгебр Поста // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 6. С. 666–672.
7. *Feder T., Vardi M. Y.* The computational structure of monotone monadic SNP and constraint satisfaction: A study through datalog and group theory // SIAM J. Comput. 1998. V. 28, N 1. P. 57–104.
8. *Berman J., McKenzie R.* Clones satisfying the term condition // Discrete Math. 1984. V. 52. P. 7–29.
9. *Taylor W.* Some applications of the term condition // Algebra Univers. 1982. V. 14, N 1. P. 11–24.
10. *Bagyinszki J., Demetrovics J.* The structure of linear classes in prime-valued logics // Discrete Mathematics. Warsaw,: Banach Center Publ., 1982. P. 105–123.
11. *Scendrei A.* On closed sets of linear operations over a finite set of square-free cardinality // Elektron. Informationsverarb. Kybernet. 1978. V. 14. P. 547.
12. *Бурле Г. А.* Классы k-значной логики, содержащие все функции одной переменной // Дискретный анализ. 1967. № 10. С. 3–7.

13. *Demetrovics J., Malcev I. A.* Essentially minimal TC-clones on three-element base set // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1986. V. 8, N 3. P. 191–196.

14. *Деметрович Я., Мальцев И. А.* О существенно минимальных TC-клонах на трехэлементном множестве // Közlemények. 1984. N 31. P. 115–151.

15. *Lau D.* Klassen quasilinearen Funktionen von P_3 // Rostock. Math. Kolloq. 1985. N 28. P. 33–45.

16. *Марченков С. С.* О замкнутых классах квазилинейных функций в P_3. М., 1986. (Препринт / ИПМ АН СССР; № 17).

Статья поступила 12 декабря 2006 г.

Мальцев Иван Анатольевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
malcev@math.nsc.ru

Тугылбаева Балжан Геннадьевна
Восточно-Казахстанский гос. университет им. С. Аманжолова,
ул. 30-й Гвардейской дивизии, 34, Усть-Каменогорск 070002, Казахстан
baljan-2121964@mail.ru