Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 514.76

О ВЫСШИХ КОВАРИАНТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. В. Гаврилов

Аннотация. Получена формула для композиции высших ковариантных производных на векторном расслоении над многообразием. Она обобщает классическую формулу Лейбница для производных произведения. В качестве следствия получено обобщение теоремы автора о двойном экспоненциальном отображении на случай кратных отображений.

Ключевые слова: ковариантное дифференцирование, аффинная связность, векторное расслоение.

Пусть $\mathscr{M}$ — гладкое многообразие и $E \to \mathscr{M}$ — гладкое векторное расслоение. Будем использовать следующие обозначения: $\mathfrak{F}(\mathscr{M})$ — алгебра гладких функций на $\mathscr{M}$, $\Gamma(\mathscr{M}, E)$ — пространство гладких сечений расслоения E (рассматриваемое как $\mathfrak{F}(\mathscr{M})$-модуль), $\mathscr{V} = \mathscr{V}(\mathscr{M}) = \Gamma(\mathscr{M}, T\mathscr{M})$ — пространство гладких векторных полей, $T^n\mathscr{M} = T\mathscr{M}^{\otimes n}$ и $T_n\mathscr{M} = T^*\mathscr{M}^{\otimes n}$ – тензорные расслоения. Через $\mathrm{Diff}(\Gamma(\mathscr{M}, E)) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\Gamma(\mathscr{M}, E))$ будем обозначать алгебру дифференциальных операторов, действующих в пространстве сечений E.

По определению *ковариантной производной на расслоении* E называется оператор

$$\nabla^E : \Gamma(\mathscr{M}, E) \to \Gamma(\mathscr{M}, T^*\mathscr{M} \otimes E),$$

действующий в соответствии с правилом Лейбница:

$$\nabla^E(fu) = f\nabla^E(u) + df \otimes u, \quad f \in \mathfrak{F}(\mathscr{M}),\ u \in \Gamma(\mathscr{M}, E).$$

Имеется взаимно однозначное соответствие между ковариантными производными и связностями на расслоении (см., например, [1, § 9, теорема 1]). На практике оператор ∇^E (который следовало бы называть *ковариантным дифференциалом*) обычно используется в виде свертки с векторным полем ∇^E_v, $v \in \mathscr{V}(\mathscr{M})$. Для такой свертки

$$\nabla^E_v(fu) = f\nabla^E_v(u) + \langle v, df\rangle u.$$

Нашей целью является изучение некоторых свойств высших ковариантных производных. Основным результатом этой работы является семейство тождеств, которым такие производные удовлетворяют (формула (1)). Чтобы сформулировать его, нам понадобится ряд определений, которые будут введены далее. В качестве одного из следствий мы получим обобщение формулы (4) из [2] на случай кратных экспоненциальных отображений.

1. Высшие ковариантные производные

Одна из многих трудностей, возникающих при работе с высшими ковариантными производными, связана с отсутствием в этой области удобных и устоявшихся обозначений. Хотя высшие ковариантные производные на векторном расслоении являются стандартной и давно известной конструкцией, разные авторы до сих пор используют для нее разные обозначения. Мы будем в целом следовать подходу Пале [1, § 9] (который можно считать стандартным), но в несколько ином изложении.

Чтобы определить высшие производные на векторном расслоении, необходимо иметь связность как на расслоении, так и на самом многообразии. Поэтому мы будем далее считать многообразие $\mathscr{M}$ снабженным некоторой фиксированной аффинной связностью. Она порождает связность на кокасательном расслоении; естественным образом [1, § 9, теорема 4] вводится связность на произведении расслоений $T^*\mathscr{M}^{\otimes n} \otimes E = T_n\mathscr{M} \otimes E$. После этого мы можем рассматривать ковариантную производную как оператор, действующий в пространстве $\bigoplus\limits_{n\geq 0} \Gamma(\mathscr{M}, T_n\mathscr{M} \otimes E)$. Чтобы не усложнять обозначения, будем использовать для нее обычный символ

$$\nabla : \Gamma(\mathscr{M}, T_n\mathscr{M} \otimes E) \to \Gamma(\mathscr{M}, T^*\mathscr{M} \otimes T_n\mathscr{M} \otimes E) = \Gamma(\mathscr{M}, T_{n+1}\mathscr{M} \otimes E),\ n \geq 0;$$

как всегда, $\nabla(fu) = f\nabla(u) + df \otimes u$, $f \in \mathfrak{F}(\mathscr{M})$. Производная ∇ действует аналогично дифференцированию; например,

$$\nabla_v : \omega_1 \otimes \omega_2 \otimes u \mapsto (\nabla_v\omega_1) \otimes \omega_2 \otimes u + \omega_1 \otimes (\nabla_v\omega_2) \otimes u + \omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \big(\nabla_v^E u\big),$$

$$v \in \mathscr{V}(\mathscr{M}), \quad \omega_1, \omega_2 \in \Gamma(\mathscr{M}, T^*\mathscr{M}), \quad u \in \Gamma(\mathscr{M}, E).$$

Высшие производные, определяемые как степени этого оператора:

$$\nabla^n : \Gamma(\mathscr{M}, E) \to \Gamma(\mathscr{M}, T_n\mathscr{M} \otimes E), \quad n \geq 1,$$

и будут предметом нашего изучения.

Для полной ясности полезно рассмотреть введенную конструкцию в локальных координатах. Пусть в области $U \subset \mathscr{M}$ заданы координаты $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^d$, где $d = \dim \mathscr{M}$. Если u — сечение расслоения E, то ∇u будет сечением $T^*\mathscr{M} \otimes E$. Пользуясь тем, что формы dx^i, $1 \leq i \leq d$, образуют базис кокасательного расслоения, мы можем записать производную в виде $\nabla u = dx^i \otimes \nabla_i u$, где ∇_i — некоторые операторы, действующие в $\Gamma(U, E)$ (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, как это принято в тензорном анализе). Очевидно, $\nabla_i = \nabla_{\partial_i}$, где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathscr{V}(U)$.

Рассмотрим, каковы свойства этой производной. Прежде всего ковариантная производная, действующая на скалярные функции, совпадает с дифференциалом, т. е. $\nabla_i f = \frac{\partial}{\partial x^i} f$, $f \in \mathfrak{F}(U)$. Далее, из определений следует, что

$$\nabla_i(fu) = (\nabla_i f)u + f(\nabla_i u), \quad f \in \mathfrak{F}(U),\ u \in \Gamma(U, E).$$

Связность на произведении расслоений вводится так [1, § 9, теорема 4], что если u и v — сечения каких-то расслоений, то

$$\nabla_i(u \otimes v) = (\nabla_i u) \otimes v + u \otimes (\nabla_i v).$$

Таким образом, операторы ∇_i действуют как дифференцирования алгебры сечений всевозможных расслоений.

Пусть $e_a \in \Gamma(U, E)$ — базис расслоения E (где $1 \leq a \leq \operatorname{rank} E$). Тогда

$$\nabla_i e_a = E^b_{ia} e_b,$$

где $E^b_{ia} \in \mathfrak{F}(U)$ — некоторые функции, называемые коэффициентами связности (в духе классической дифференциальной геометрии можно ввести связность на расслоении, задав коэффициенты E^b_{ia} и потребовав, чтобы при переходе к другим локальным координатам и другому базису расслоения они преобразовывались таким образом, чтобы операция $u \mapsto \nabla u$ оставалась инвариантной). Помимо связности на E у нас имеется аффинная связность или, что то же самое, связность на касательном расслоении. Ее можно также рассматривать как связность на кокасательном расслоении; соответствующие коэффициенты связности в естественном базисе называются *символами Кристоффеля*:

$$\nabla_i \, dx^j = -\Gamma^j_{ik} \, dx^k.$$

Теперь у нас есть все, чтобы вычислить высшие ковариантные производные явно. Если $u = u^a e_a$ — сечение E, то

$$\nabla u = dx^i \otimes ((\partial_i u^a) e_a + u^a \nabla_i e_a) = \left(\partial_i u^a + u^b E^a_{ib}\right) dx^i \otimes e_a,$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \partial_j \left(\partial_i u^a + u^b E^a_{ib}\right) dx^j \otimes dx^i \otimes e_a \\ &\qquad + \left(\partial_i u^a + u^b E^a_{ib}\right) dx^j \otimes ((\nabla_j dx^i) \otimes e_a + dx^i \otimes \nabla_j e_a) \\ &= \left\{\partial_j \left(\partial_i u^a + u^b E^a_{ib}\right) - \left(\partial_k u^a + u^b E^a_{kb}\right) \Gamma^i_{jk} + \left(\partial_i u^b + u^c E^b_{ic}\right) E^a_{jb}\right\} dx^j \otimes dx^i \otimes e_a,\end{aligned}$$

и т. д. Можно видеть, что вычисления становятся весьма громоздкими уже при небольших степенях.

Высшие ковариантные производные, как и обычную, удобно использовать в сочетании со сверткой. Свертку тензорного поля $W \in \Gamma(\mathscr{M}, T^n \mathscr{M})$ с сечением $F \in \Gamma(\mathscr{M}, T_n \mathscr{M} \otimes E)$ будем обозначать просто точкой: $W \cdot F \in \Gamma(\mathscr{M}, E)$. Свертка производится в естественном порядке, т. е.

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \cdot (\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_n \otimes u) = \langle v_1, \omega_1 \rangle \dots \langle v_n, \omega_n \rangle u,$$

где $v_i \in \mathscr{V}(\mathscr{M})$, $\omega_i \in \Gamma(\mathscr{M}, T^* \mathscr{M})$, $1 \le i \le n$, $u \in \Gamma(\mathscr{M}, E)$. «Свернутые» производные

$$W \cdot \nabla^n : \Gamma(\mathscr{M}, E) \to \Gamma(\mathscr{M}, E), \quad W \in \Gamma(\mathscr{M}, T^n \mathscr{M})$$

удобны тем, что действуют в пространстве сечений E.

Очевидно, $\nabla_v = v \cdot \nabla$; в литературе автору встречалось аналогичное обозначение $\nabla^n_{v_1, \dots, v_n} = v_1 \otimes \dots \otimes v_n \cdot \nabla^n$ (правда, только для $n \le 3$). Связь с обозначениями в [3, гл. III] здесь следующая:

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_n \cdot \nabla^n u = (\nabla^n u)(; v_n; \dots; v_1).$$

В локальных координатах удобно пользоваться операторами $\nabla^n_{i_1, \dots, i_n} = \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_n}} \cdot \nabla^n$, при этом

$$\nabla^n u = dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_n} \otimes \nabla^n_{i_1, \dots, i_n} u; \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \cdot \nabla^n u = v_1^{i_1} v_2^{i_2} \dots v_n^{i_n} \nabla^n_{i_1, \dots, i_n} u.$$

Операторы $\nabla^n_{i_1, \dots, i_n}$ иногда записываются в виде $\nabla_{i_1} \nabla_{i_2} \dots \nabla_{i_n}$ (как, например, в [4]). Такая запись довольно удобна, но не вполне последовательна: необходимо отличать это выражение от композиции операторов ∇_{i_k}.

Обозначим через $T(\mathscr{M})$ формальную сумму

$$T(\mathscr{M}) = \bigoplus_{n \ge 0} \Gamma(\mathscr{M}, T^n \mathscr{M}),$$

полагая $\Gamma(\mathscr{M}, T^0\mathscr{M}) = \mathfrak{F}(\mathscr{M})$. С алгебраической точки зрения, это градуированная ассоциативная $\mathfrak{F}(\mathscr{M})$-алгебра. Определим линейный оператор

$$\mu : T(\mathscr{M}) \to \operatorname{Diff}(\Gamma(\mathscr{M}, E))$$

условием

$$\mu : W \mapsto W \cdot \nabla^n, \quad W \in \Gamma(\mathscr{M}, T^n\mathscr{M}).$$

В частности,

$$\mu(f) = f,\ f \in \mathfrak{F}(\mathscr{M}), \quad \mu(v) = \nabla^E_v, \quad \mu(v \otimes w) = \nabla^2_{v,w},\ v, w \in \mathscr{V}(\mathscr{M}).$$

Оператор μ рассматривался автором в [5, § 3] (без введения специального обозначения для него).

Заметим, что μ является гомоморфизмом $\mathfrak{F}(\mathscr{M})$-модулей, т. е.

$$\mu(fW)u = f\mu(W)u, \quad f \in \mathfrak{F}(\mathscr{M}),\ W \in T(\mathscr{M}),\ u \in \Gamma(\mathscr{M}, E).$$

Этот оператор, однако, не является гомоморфизмом алгебр: вообще говоря, $\mu(A \otimes B) \neq \mu(A)\mu(B)$. В действительности нетривиальный гомоморфизм $\mathfrak{F}(\mathscr{M})$-модулей такого вида не может быть гомоморфизмом алгебр уже потому, что $\operatorname{Diff}(\Gamma(\mathscr{M}, E))$ в отличие от $T(\mathscr{M})$ не является $\mathfrak{F}(\mathscr{M})$-алгеброй. Формула (1) из следующего пункта как раз показывает, в какой мере μ «отличается» от гомоморфизма алгебр.

2. Формула произведения

Для формулировки основного результата нам потребуется оператор

$$\mu_T = \bigoplus_{n \geq 0} \mu_{T^n\mathscr{M}},$$

аналогичный $\mu = \mu_E$, но действующий на тензорные поля:

$$\mu_T : T(\mathscr{M}) \to \operatorname{Diff}(T(\mathscr{M})) = \bigoplus_{n \geq 0} \operatorname{Diff}(\Gamma(\mathscr{M}, T^n\mathscr{M})).$$

Здесь $\operatorname{Diff}(\Gamma(\mathscr{M}, T^0\mathscr{M})) = \operatorname{Diff}(\mathfrak{F}(\mathscr{M}))$ (алгебра скалярных дифференциальных операторов на $\mathscr{M}$). Использование знака $\bigoplus$ требует оговорки: μ_T нетривиально действует на тензорные поля любого ранга, т. е. это не прямая сумма в обычном понимании. Очевидно, этот оператор в отличие от μ зависит только от связности на $\mathscr{M}$, но не на E.

Нам понадобится также коумножение в $T(\mathscr{M})$. Напомним, что *коумножением* на линейном пространстве $\mathscr{A}$ называется линейное отображение вида $\triangle : \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$. Понятие коумножения двойственно к понятию умножения, которое есть не что иное, как линейное отображение из $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$ в $\mathscr{A}$. Пространство с умножением называют *алгеброй*; как правило, умножение предполагается ассоциативным. Важнейшими примерами алгебр, где наряду с умножением определено коумножение, являются так называемые алгебры Хопфа. Гл. 1 из [6] содержит удачное введение в теорию таких алгебр. Мы не приводим общее определение алгебр Хопфа, поскольку оно нам не потребуется: здесь мы будем иметь дело исключительно с тензорными алгебрами.

Хотя тензорная алгебра является одним из классических примеров алгебр Хопфа, найти ее в учебниках довольно трудно [6, гл. I, пример 8]. Причина, возможно, заключается в том, что в данном случае приходится иметь дело с двумя разными тензорными произведениями, что почти неизбежно ведет к путанице. Чтобы избежать этого, мы будем использовать для «внешнего» умножения символ $\breve{\otimes}$.

Пусть V — линейное пространство и $T(V)$ — тензорная алгебра. Стандартное коумножение

$$\triangle : T(V) \to T(V)\breve{\otimes}T(V)$$

определяется следующими двумя условиями:

$$\triangle(v) = 1\breve{\otimes}v + v\breve{\otimes}1,\ v \in \mathscr{V}, \quad \triangle(A \otimes B) = \triangle(A) \otimes \triangle(B),\ A, B \in T(V),$$

где тензорное умножение в $T(V)\breve{\otimes}T(V)$ вводится обычным способом: $(A\breve{\otimes}B) \otimes (C\breve{\otimes}D) = (A \otimes C)\breve{\otimes}(B \otimes D)$. Несложное вычисление показывает, что

$$\triangle(v \otimes w) = 1\breve{\otimes}(v \otimes w) + v\breve{\otimes}w + w\breve{\otimes}v + (v \otimes w)\breve{\otimes}1,$$

$$\begin{aligned}\triangle\,(u\otimes v\otimes w) = 1\breve{\otimes}(u\otimes v\otimes w) + u\breve{\otimes}(v\otimes w) + v\breve{\otimes}(u\otimes w) + w\breve{\otimes}(u\otimes v) + (u\otimes v)\breve{\otimes}w \\ + (u \otimes w)\breve{\otimes}v + (v \otimes w)\breve{\otimes}u + (u \otimes v \otimes w)\breve{\otimes}1, \quad u, v, w \in V.\end{aligned}$$

Общую формулу для коумножения в тензорной алгебре нетрудно получить по индукции. Она выглядит следующим образом:

$$\triangle(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \sum (v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_m})\breve{\otimes}(v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_{n-m}}),$$

где $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ и $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-m}$, причем $i_k \neq j_l$. Сумма берется по всем 2^n подмножествам $\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$.

Пусть теперь

$$\triangle : T(\mathscr{V}) \to T(\mathscr{V})\breve{\otimes}T(\mathscr{V})$$

— стандартное коумножение в (формальной) тензорной алгебре вещественного линейного пространства $\mathscr{V} = \mathscr{V}(\mathscr{M})$. Имеется естественный гомоморфизм алгебр $\mathfrak{t} : T(\mathscr{V}) \to T(\mathscr{M})$,

$$\mathfrak{t} : v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto v_1 \underset{\mathfrak{F}(\mathscr{M})}{\otimes} \dots \underset{\mathfrak{F}(\mathscr{M})}{\otimes} v_n; \quad v_1, \dots, v_n \in \mathscr{V}(\mathscr{M}).$$

Предложение. *Существует единственное линейное отображение*

$$\triangle : T(\mathscr{M}) \to T(\mathscr{M}) \underset{\mathfrak{F}(\mathscr{M})}{\breve{\otimes}} T(\mathscr{M})$$

такое, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} T(\mathscr{V}) & \xrightarrow{\triangle} & T(\mathscr{V})\breve{\otimes}T(\mathscr{V}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{t}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{t}\otimes\mathfrak{t}} \\ T(\mathscr{M}) & \xrightarrow{\triangle} & T(\mathscr{M}) \underset{\mathfrak{F}(\mathscr{M})}{\breve{\otimes}} T(\mathscr{M}) \end{array}.$$

Действительно, согласно предложению 3.1 из [3, гл. I, § 3]

$$\Gamma(\mathscr{M}, T^n\mathscr{M}) = \mathscr{V} \underset{\mathfrak{F}(\mathscr{M})}{\otimes} \mathscr{V} \underset{\mathfrak{F}(\mathscr{M})}{\otimes} \dots \underset{\mathfrak{F}(\mathscr{M})}{\otimes} \mathscr{V}$$

(предложение сформулировано для ковариантных тензоров, но аналогичное утверждение справедливо, конечно, и для контравариантных). Другими словами, $\ker(\mathfrak{t}, T(\mathscr{V}))$ есть идеал, порожденный элементами вида $(fv) \otimes w - v \otimes (fw)$, $f \in \mathfrak{F}(\mathscr{M})$, $v, w \in \mathscr{V}$. Далее,

$$\triangle : v \otimes w \mapsto (v \otimes w)\breve{\otimes}1 + v\breve{\otimes}w + w\breve{\otimes}v + 1\breve{\otimes}(v \otimes w),$$

поэтому

$$(\mathfrak{t}\otimes\mathfrak{t})\circ\triangle: (fv)\otimes w - v\otimes(fw)\mapsto (fv)\breve{\otimes} w + w\breve{\otimes}(fv) - (fw)\breve{\otimes} v - v\breve{\otimes}(fw) \in T(\mathscr{M})\breve{\otimes} T(\mathscr{M});$$

это выражение обращается в нуль при переходе к тензорному умножению над $\mathfrak{F}(\mathscr{M})$. Поскольку $(\mathfrak{t}\otimes\mathfrak{t})\circ\triangle$ — гомоморфизм алгебр, он переводит в нуль и весь идеал.

Имея дело с коумножением, удобнее всего пользоваться обозначениями Свидлера. Если $\mathscr{A}$ — пространство с коумножением и $\psi : \mathscr{A}\times\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ — билинейное отображение в некоторое линейное пространство, то для $A\in\mathscr{A}$ выражение $\sum\limits_{(A)}\psi(A_{(1)}, A_{(2)})$ обозначает элемент $\mathscr{B}$, определяемый следующим образом. Копроизведение A всегда можно представить в виде конечной суммы вида

$$\triangle(A) = \sum_j A_{1j}\otimes A_{2j}$$

(далее нам придется использовать $\breve{\otimes}$ вместо обычного $\otimes$). По определению

$$\sum_{(A)}\psi(A_{(1)}, A_{(2)}) = \sum_j \psi(A_{1j}, A_{2j}).$$

Можно видеть, что это выражение не зависит от конкретного выбора разложения $\triangle(A)$ в сумму. В современной литературе знак суммы в обозначениях Свидлера часто опускается, например, $\triangle(A) = A_{(1)}\otimes A_{(2)}$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 1. *Пусть $A, B\in T(\mathscr{M})$. Тогда*

$$\mu(A)\mu(B) = \sum_{(A)}\mu(A_{(1)}\otimes\mu_T(A_{(2)})B). \tag{1}$$

Правая часть (1) записана в обычных обозначениях Свидлера, но следует помнить, что коумножение в $T(\mathscr{M})$ определено не над полем, а над алгеброй $\mathfrak{F}(\mathscr{M})$. Поэтому, чтобы правая часть (1) была определена корректно, она должна быть не просто линейной, а $\mathfrak{F}(\mathscr{M})$-линейной по каждой из переменных $A_{(1)}$ и $A_{(2)}$; легко видеть, что это действительно так.

Формула (1) означает, что если

$$\triangle(A) = \sum_j A_{1j}\underset{\mathfrak{F}(\mathscr{M})}{\breve{\otimes}} A_{2j},$$

то

$$\mu(A)\mu(B) = \sum_j \mu(A_{1j}\otimes\mu_T(A_{2j})B).$$

Например, если $v\in\mathscr{V}$, то $\triangle(v) = v\breve{\otimes}1 + 1\breve{\otimes}v$, так что

$$\nabla_v\mu(B) = \mu(v)\mu(B) = \mu(v\otimes\mu_T(1)B) + \mu(1\otimes\mu_T(v)B) = \mu(v\otimes B) + \mu(\nabla_v B).$$

При $B = w\in\mathscr{V}$ получаем

$$\nabla_v\nabla_w = \nabla^2_{v,w} + \nabla_{\nabla_v w}$$

(см. [3, гл. III, § 2, предложение 2.12]), при $B = w\otimes u\in\Gamma(\mathscr{M}, T^2\mathscr{M})$ имеем

$$\nabla_v\nabla^2_{w,u} = \nabla^3_{v,w,u} + \nabla^2_{\nabla_v w,u} + \nabla^2_{w,\nabla_v u}$$

(так как $\nabla_v B = (\nabla_v w)\otimes u + w\otimes(\nabla_v u)$). Полагая $A = v\otimes w$, $B = u$, получим

$$\nabla^2_{v,w}\nabla_u = \nabla^3_{v,w,u} + \nabla^2_{v,\nabla_w u} + \nabla^2_{w,\nabla_v u} + \nabla_{\nabla^2_{v,w}u}.$$

Конечно, эти равенства нетрудно получить прямым вычислением. Общее доказательство, как мы увидим, может быть сведено к комбинаторным преобразованиям.

3. Симметричный случай

Прежде чем доказывать теорему в общем виде, рассмотрим ее важный частный случай. Копроизведение $\triangle(A)$ принимает простой вид, когда тензорное поле A симметрично. В этом случае формула (1) может быть представлена в более явной форме. Как будет видно, этот вариант формулы, по существу, известен.

Прежде всего перейдем от обозначений Свидлера к мультииндексным. Пусть V — векторное пространство над полем нулевой характеристики и $\Sigma(V) \subset T(V)$ — подпространство, состоящее из симметричных тензоров. Для всякого $v \in V$ справедливо равенство

$$\triangle(v^{\otimes n}) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} v^{\otimes m} \breve{\otimes} v^{\otimes n-m}, \quad n \geq 1,$$

без труда доказываемое по индукции. Поскольку $\Sigma(V)$ является линейной оболочкой тензорных степеней, то

$$\triangle : \Sigma(V) \to \Sigma(V) \breve{\otimes} \Sigma(V).$$

Чтобы описать это отображение явно, рассмотрим некоторый базис $e_i \in V$, $1 \leq i \leq d = \dim V$ (можно для простоты считать V конечномерным). Введем обозначение

$$e_\alpha = \sigma\big(e_1^{\otimes \alpha_1} \otimes e_2^{\otimes \alpha_2} \otimes \cdots \otimes e_d^{\otimes \alpha_d}\big),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ — мультииндекс, а $\sigma : T(V) \to \Sigma(V)$ — обычный оператор симметризации (определяемый условиями $\sigma(v^{\otimes n}) = v^{\otimes n}$ и $\sigma(A \otimes (u \otimes v - v \otimes u) \otimes B) = 0$). Тогда тензоры e_α, называемые *симметризованными мультистепенями* $(e_1, \ldots, e_d)$, будут образовывать базис $\Sigma(V)$. Кроме того, можно убедиться, что для $v = v^i e_i \in V$ имеет место формула $v^{\otimes n} = \sum\limits_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} v^\alpha e_\alpha$ (мы используем здесь стандартные правила обращения с мультииндексами, как, например, в [4]). Подставив это выражение в формулу для копроизведения и приняв во внимание, что она справедлива при любых коэффициентах, придем к равенству

$$\triangle(e_\alpha) = \sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} e_\beta \breve{\otimes} e_{\alpha-\beta},$$

которое определяет действие коумножения на симметричные тензоры.

Перейдем к тензорным полям. В локальных координатах векторные поля $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ образуют базис касательного расслоения. Их симметризованные мультистепени, которые мы будем обозначать через ∂_α, образуют базис расслоения симметричных контравариантных тензоров (следует помнить, что ∂_α — это тензорные поля, а не операторы). Иначе говоря, всякое симметричное поле $A \in T(\mathscr{M})$ представимо в виде $A = A^\alpha \partial_\alpha$, где A^α — скалярные функции.

Из определения коумножения на $T(\mathscr{M})$ следует, что формула для копроизведения мультистепени переносится на тензорные поля:

$$\triangle(\partial_\alpha) = \sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} \partial_\beta \breve{\otimes} \partial_{\alpha-\beta};$$

поскольку $\triangle(A^\alpha \partial_\alpha) = A^\alpha \triangle (\partial_\alpha)$, она полностью определяет действие коумножения на симметричные тензоры.

Введем, следуя [4], обозначение $\nabla^\alpha = \mu(\partial_\alpha)$ (или $\nabla^\alpha = \mu_T(\partial_\alpha)$, если речь идет об операторе, действующем на тензорные поля). Тогда согласно (1) произведение $\mu(\partial_\alpha)\mu(B)$ можно представить в следующем виде:

$$\nabla^\alpha \mu(B) = \sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} \mu(\partial_\beta \otimes \nabla^{\alpha-\beta} B).$$

Эта формула является обобщением правила Лейбница. Действительно, если $B = f \in \mathfrak{F}(\mathscr{M})$ — скалярная функция, то $\nabla^{\alpha-\beta} f$ можно вынести из-под знака μ по линейности. Применяя $\nabla^\alpha \mu(f)$ к сечению u расслоения E, получим равенство

$$\nabla^\alpha(fu) = \sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} (\nabla^{\alpha-\beta} f) \nabla^\beta u,$$

в котором легко узнать формулу Лейбница для симметризованной ковариантной производной. По всей вероятности, эту формулу следует отнести к фольклору. Автор лишь однажды видел ее доказательство в литературе (в эквивалентной формулировке) [4, следствие 2.3]. Если связность (в соответствующих координатах) тривиальна и $E = V \otimes \mathbb{R}$, то $\nabla^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$, и имеем классическую формулу Лейбница в мультииндексной записи.

4. Доказательство: алгебраическая часть

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся некоторые алгебраические утверждения. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная (неассоциативная) алгебра над полем $\mathbb{k}$ нулевой характеристики. В [5, § 2] автором введено отображение $K : T(\mathfrak{g}) \to T(\mathfrak{g})$, названное K*-оператором*. Повторим его определение (немного в других терминах). Как и в [5], операцию в алгебре $\mathfrak{g}$ будем обозначать символом $\diamond$. Для $x \in \mathfrak{g}$ будем обозначать через τ_x дифференцирование тензорной алгебры $\tau_x \in \mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(T(\mathfrak{g}))$, однозначно определяемое условием $\tau_x y = x \diamond y$, $x, y \in \mathfrak{g}$. Тогда $K \in \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(T(\mathfrak{g}))$ — оператор, удовлетворяющий условиям $K(1) = 1$ и

$$K(x \otimes u + \tau_x u) = x \otimes K(u), \quad x \in \mathfrak{g},\ u \in T(\mathfrak{g}). \tag{2}$$

Достаточно очевидно, что K определяется этими условиями однозначно; например,

$$K(x) = K(x \otimes 1) = x, \quad K(x \otimes y) = x \otimes y - x \diamond y,$$
$$K(x \otimes y \otimes z) = x \otimes K(y \otimes z) - K((x \diamond y) \otimes z) - K(y \otimes (x \diamond z))$$

и т. д.

Нам понадобится гомоморфизм $\mathbb{k}$-алгебр

$$\hat{\tau} : T(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(T(\mathfrak{g})),$$

определяемый условием $\hat{\tau} : x \mapsto \tau_x$, $x \in \mathfrak{g}$. Основную роль в доказательстве (1) играет

Лемма 1. *Пусть $A, B \in T(\mathfrak{g})$ и $\triangle A = A_{(1)} \breve{\otimes} A_{(2)}$. Тогда*

$$K(A) \otimes K(B) = K(A_{(1)} \otimes \hat{\tau}(K(A_{(2)}))B). \tag{3}$$

Здесь $\triangle$ — стандартное коумножение в тензорной алгебре $T(\mathfrak{g})$; обозначение $\breve{\otimes}$ используется из тех же соображений, что и ранее. Формула (3) аналогична (1) с одним существенным отличием: тензорное умножение в правой части (3) —

это умножение над полем $\Bbbk$, тогда как в правой части (1) используется тензорное умножение в $T(\mathscr{M})$, т. е. над $\mathfrak{F}(\mathscr{M})$.

Для доказательства (3) применим индукцию по степени A. При $A = 1$ формула тривиальна, при $A = x \in \mathfrak{g}$ она эквивалентна (2):

$$K(x) \otimes K(B) = x \otimes K(B) = K(x \otimes \hat{\tau}(1)B) + K(1 \otimes \hat{\tau}(x)B).$$

Пусть (3) справедлива при $\deg(A) < m$ для некоторого $m \geq 2$. Покажем, что она имеет место и при $\deg(A) = m$. Для этого достаточно доказать ее для $A = x \otimes a$, $x \in \mathfrak{g}$, $a \in T(\mathfrak{g})$, $\deg(a) < m$. По определению

$$K(A) \otimes K(B) = x \otimes K(a) \otimes K(B) - K(\tau_x a) \otimes K(B).$$

Чтобы не делать вычисления слишком громоздкими, введем обозначение $\{Q\} = \hat{\tau}(K(Q))B$, $Q \in T(\mathfrak{g})$. Тогда с учетом равенства

$$\triangle(\tau_x a) = (\tau_x a_{(1)}) \breve{\otimes} a_{(2)} + a_{(1)} \breve{\otimes} (\tau_x a_{(2)})$$

и предположения индукции имеем

$$K(A) \otimes K(B) = x \otimes K(a_{(1)} \otimes \{a_{(2)}\}) - K((\tau_x a_{(1)}) \otimes \{a_{(2)}\}) - K(a_{(1)} \otimes \{\tau_x a_{(2)}\}). \quad (4)$$

С другой стороны, $\triangle(A) = a_{(1)} \breve{\otimes} (x \otimes a_{(2)}) + (x \otimes a_{(1)}) \breve{\otimes} a_{(2)}$, поэтому

$$\begin{aligned} K(A_{(1)} \otimes \{A_{(2)}\}) = K(a_{(1)} \otimes \{x \otimes a_{(2)}\}) + x \otimes K(a_{(1)} \otimes \{a_{(2)}\}) \\ - K((\tau_x a_{(1)}) \otimes \{a_{(2)}\}) - K(a_{(1)} \otimes \tau_x \{a_{(2)}\}). \quad (5) \end{aligned}$$

Из (2) следует, что

$$\{x \otimes Q\} = \tau_x \{Q\} - \{\tau_x Q\}, \quad Q \in T(\mathfrak{g}).$$

Подставив $Q = a_{(2)}$ и сравнив (4) с (5), получим

$$K(A) \otimes K(B) = K(A_{(1)} \otimes \{A_{(2)}\}),$$

что и требовалось.

5. Доказательство: геометрическая часть

Рассмотрим гомоморфизм алгебр (над $\mathbb{R}$)

$$\tau : T(\mathscr{V}) \to \mathrm{Diff}(\Gamma(\mathscr{M}, E)),$$

определяемый условием $\tau : v \mapsto \nabla_v$, $v \in \mathscr{V}$. Пространство $\mathscr{V} = \mathscr{V}(\mathscr{M})$ мы рассматриваем как неассоциативную алгебру с операцией $v \diamond w = \nabla_v w$, $v, w \in \mathscr{V}$. Соответственно имеется оператор $K : T(\mathscr{V}) \to T(\mathscr{V})$.

Лемма 2. *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} T(\mathscr{V}) & \xrightarrow{K} & T(\mathscr{V}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{t}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \tau} \\ T(\mathscr{M}) & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{Diff}(\Gamma(\mathscr{M}, E)) \end{array}.$$

Утверждение леммы можно записать в виде равенства $\mu\mathfrak{t} = \tau K$. Оно эквивалентно предложению 2 из [5]. Кроме τ нам потребуется аналогичный оператор

$$\tau_T : T(\mathscr{V}) \to \mathrm{Diff}(T(\mathscr{M})).$$

Применяя лемму к тензорным расслоениям, получим равенство $\mu_T \mathfrak{t} = \tau_T K$.

Лемма 3. *Для всякого* $a \in T(\mathscr{V})$

$$\tau_T(a)\mathfrak{t} = \mathfrak{t}\hat{\tau}(a). \tag{6}$$

Иначе говоря,

$$\tau_T(a)\mathfrak{t}(b) = \mathfrak{t}(\hat{\tau}(a)b), \quad a, b \in T(\mathscr{V}).$$

Докажем вначале частный случай (6):

$$\tau_T(v)\mathfrak{t}(b) = \nabla_v \mathfrak{t}(b) = \mathfrak{t}(\tau_v b), \quad v \in \mathscr{V},\ b \in T(\mathscr{V}). \tag{7}$$

Прежде всего $\mathfrak{t}$ действует тривиально на $\mathscr{V} \subset T(\mathscr{M})$, поэтому

$$\nabla_v \mathfrak{t}(w) = \nabla_v w = v \diamond w = \tau_v w = \mathfrak{t}(\tau_v w), \quad w \in \mathscr{V}.$$

Далее, $\nabla_v \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(T(\mathscr{M}))$; отсюда нетрудно вывести, что если (7) справедливо для некоторого $b \in T(\mathscr{V})$, то оно справедливо и для $w \otimes b$:

$$\begin{aligned}\tau_T(v)\mathfrak{t}(w \otimes b) = \nabla_v(w \otimes \mathfrak{t}(b)) &= \nabla_v w \otimes \mathfrak{t}(b) + w \otimes \nabla_v \mathfrak{t}(b) \\ &= \mathfrak{t}(\tau_v w \otimes b + w \otimes \tau_v b) = \mathfrak{t}(\tau_v(w \otimes b)).\end{aligned}$$

Отсюда (7) следует по индукции.

Аналогично если (6) выполняется для $a \in T(\mathscr{V})$, то оно выполняется и для $v \otimes a$:

$$\tau_T(v \otimes a)\mathfrak{t} = \tau_T(v)\tau_T(a)\mathfrak{t} = \tau_T(v)\mathfrak{t}\hat{\tau}(a) = \mathfrak{t}\tau_v\hat{\tau}(a) = \mathfrak{t}\hat{\tau}(v \otimes a).$$

Применяя индукцию еще раз, получаем требуемое утверждение.

Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы 1. Пусть $A = \mathfrak{t}(a)$, $B = \mathfrak{t}(b)$, $a, b \in T(\mathscr{V})$. По лемме 2

$$\mu(A)\mu(B) = \mu(\mathfrak{t}(a))\mu(\mathfrak{t}(b)) = \tau(K(a))\tau(K(b)) = \tau(K(a) \otimes K(b)).$$

По лемме 1 $K(a) \otimes K(b) = K(a_{(1)} \otimes \hat{\tau}(K(a_{(2)}))b)$, поэтому $\mu(A)\mu(B) = \mu(\mathfrak{t}(a_{(1)}) \otimes \mathfrak{t}(\hat{\tau}(K(a_{(2)}))b))$. Пользуясь леммами 2 и 3, получаем

$$\mu_T(\mathfrak{t}(a))\mathfrak{t}(b) = \tau_T(K(a))\mathfrak{t}(b) = \mathfrak{t}(\hat{\tau}(K(a))b),$$

следовательно, $\mathfrak{t}(\hat{\tau}(K(a_{(2)}))b) = \mu_T(\mathfrak{t}(a_{(2)}))B$. Тем самым $\mu(A)\mu(B) = \mu(A_{(1)} \otimes \mu_T(A_{(2)})B)$, что и требовалось. Здесь пользуемся тем, что согласно определению коумножение коммутирует с $\mathfrak{t}$, т. е.

$$\mathfrak{t}(a_{(1)}) \underset{\mathfrak{F}(\mathscr{M})}{\breve{\otimes}} \mathfrak{t}(a_{(2)}) = A_{(1)} \underset{\mathfrak{F}(\mathscr{M})}{\breve{\otimes}} A_{(2)}.$$

6. Композиция экспоненциальных отображений

Будем называть *кривой* в $\mathscr{M}$ непрерывное кусочно дифференцируемое отображение $\gamma : [0,1] \to \mathscr{M}$, рассматриваемое с точностью до параметризации, т. е. кривые $\gamma(t)$ и $\gamma(\phi(t))$, где $\phi : [0,1] \to [0,1]$ — гладкая строго монотонная функция, считаются эквивалентными. Если $\gamma \subset \mathscr{M}$ — кривая с началом x и концом y, то через

$$J(\gamma) : E_y \to E_x$$

будем обозначать оператор параллельного переноса в расслоении E вдоль этой кривой (от конца к началу). Аналогичный оператор переноса в касательном расслоении будем обозначать через J_T. Далее, если $x \in \mathscr{M}$ и $v \in T_x\mathscr{M}$, то $\gamma(x; v) = \{\exp_x(tv) : 0 \le t \le 1\}$ — геодезическая с началом в x и концом в $\exp_x(v)$.

Лемма 4. *Для $x \in \mathscr{M}$ и $u \in \Gamma(\mathscr{M}, E)$ имеет место формальное равенство*

$$J(\gamma(x;v))u(\exp_x(v)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} v^{\otimes n} \cdot \nabla^n u(x), \tag{8}$$

где правая часть понимается как ряд Тейлора левой части по переменной $v \in T_x\mathscr{M}$.

Формула (8) имеется (в эквивалентной форме) в [4, лемма 7.2]; для тривиального расслоения другое доказательство приведено в [2]. Нашей целью является обобщение этой формулы на случай кратного экспоненциального отображения.

Двойное экспоненциальное отображение определено автором в [2]; впрочем, это определение слишком естественно, чтобы его можно было считать оригинальным. Согласно этому определению

$$\exp_x(v, w) = \exp_{\exp_x(v)}\bigl(I^x_{\exp_x(v)}(w)\bigr),$$

где $v, w \in T_x\mathscr{M}$, а $I^x_{\exp_x(v)} = J_T^{-1}(\gamma(x;v)) : T_x\mathscr{M} \to T_{\exp_x(v)}\mathscr{M}$ — оператор параллельного переноса вдоль геодезической.

Простейший способ обобщения этого понятия заключается в использовании развертки [3, гл. III, § 4]. Напомним, что *разверткой кривой* $\gamma : [0,1] \to \mathscr{M}$ с началом $\gamma(0) = x$ называется кривая в касательном пространстве $\tilde\gamma : [0,1] \to T_x\mathscr{M}$, задаваемая дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}\tilde\gamma(t) = J_T(\gamma[0,t])\frac{d}{dt}\gamma(t)$$

с начальным условием $\tilde\gamma(0) = 0$. Здесь $\gamma[0,t]$ обозначает соответствующий отрезок кривой, так что $J_T(\gamma[0,t]) : T_{\gamma(t)}\mathscr{M} \to T_x\mathscr{M}$. Например, разверткой геодезической $\gamma(x;v)$ является отрезок $\{tv : 0 \le t \le 1\}$. Заметим, что в полном многообразии между кривыми и их развертками имеется взаимно однозначное соответствие.

Нетрудно видеть, что разверткой кривой, состоящей из двух геодезических отрезков, соединяющих x с $\exp_x(v)$ и $\exp_x(v)$ с $\exp_x(v,w)$, является ломаная с вершинами $0, v, v+w$. Рассмотрим несколько векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in T_x\mathscr{M}$. Обозначим через $\tilde\gamma(x; v_1, v_2, \dots, v_n)$ ломаную в $T_x\mathscr{M}$, образованную этими векторами. Точнее, $\tilde\gamma(x;v)$ есть отрезок с началом в нуле и концом в v, и

$$\tilde\gamma(x; v_1, v_2, \dots, v_n) = \tilde\gamma(x; v_1) \cup \{v_1 + \tilde\gamma(x; v_2, \dots, v_n)\}, \quad n \ge 2.$$

Кривую в $\mathscr{M}$ с началом в x, развертка которой совпадает с $\tilde\gamma(x; v_1, v_2, \dots, v_n)$, обозначим через $\gamma(x; v_1, v_2, \dots, v_n)$, а ее конец — через $\exp_x(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Тогда определение $\exp_x(v_1, v_2)$ будет совпадать с введенным ранее. Функцию

$$T_x\mathscr{M}^{\otimes n} \to \mathscr{M}, \quad (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \exp_x(v_1, v_2, \dots, v_n),$$

естественно называть *кратным экспоненциальным отображением.*

Теорема 2. *Пусть $x \in \mathscr{M}$, $u \in \Gamma(\mathscr{M}, E)$. Тогда*

$$J(\gamma(x; v_1, \dots, v_n))u(\exp_x(v_1, \dots, v_n)) = \mu(e^{\otimes v_1} \otimes \dots \otimes e^{\otimes v_n})u(x), \tag{9}$$

где правая часть понимается как ряд Тейлора левой части по переменным $v_1, v_2, \dots, v_n \in T_x\mathscr{M}$.

В правой части используем «тензорную экспоненту», полагая

$$e^{\otimes v} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} v^{\otimes n} \in \widehat{T}(T_x\mathscr{M}), \quad v \in T_x\mathscr{M}.$$

Символом $\widehat{T}$ обозначаем пополнение тензорной алгебры, т. е. пространство (некоммутативных) формальных рядов. Равенство (9) содержит формальную погрешность: аргумент оператора μ должен быть тензорным полем. Из определения, однако, очевидно, что действие этого оператора в точке x зависит лишь от значения поля в этой же точке; поэтому мы можем условно считать $v_1, \dots, v_n$ векторными полями, принимающими в x заданные значения.

Частными случаями (9) являются (8) (при $n = 1$) и формула (4) из [2] (при $n = 2$ и тривиальном расслоении). Доказательство теоремы сводится к ряду алгебраических манипуляций с рядами Тейлора. Мы пользуемся тем хорошо известным фактом, что при композиции функций с рядами Тейлора можно обращаться как с формальными.

Для наших целей удобно ввести оператор

$$\mathscr{E} : \mathscr{V}(\mathscr{M}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\Gamma(\mathscr{M}, E)),$$

действующий следующим образом:

$$(\mathscr{E}(v)u)(x) = J(\gamma(x; v(x)))u(\exp_x(v(x))), \quad x \in \mathscr{M}, v \in \mathscr{V}, u \in \Gamma(\mathscr{M}, E).$$

Аналогичный оператор, действующий в тензорных расслоениях, обозначим через

$$\mathscr{E}_T : \mathscr{V}(\mathscr{M}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(T(\mathscr{M})).$$

Если многообразие $\mathscr{M}$ не является полным, то геодезическая $\gamma(x; v(x))$ для некоторых (или даже для всех) $x \in \mathscr{M}$ может не существовать. Для нас, однако, это затруднение сугубо формально, поскольку предметом нашего рассмотрения будут ряды Тейлора по v как по переменной; в частности, нас будет интересовать поведение $\mathscr{E}(v)$ при $v \to 0$. Поэтому, избегая не относящихся к делу проблем, будем считать $\mathscr{M}$ полным, имея в виду, что на самом деле такое ограничение несущественно.

Вспомнив определение оператора μ, можем записать (8) в виде

$$\mathscr{E}(v) = \mu(e^{\otimes v}), \quad v \in \mathscr{V}(\mathscr{M}),$$

где $e^{\otimes v} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} v^{\otimes n} \in \widehat{T}(\mathscr{V})$. Аналогично $\mathscr{E}_T(v) = \mu_T(e^{\otimes v})$.

Лемма 5. *Пусть $Q \in T(\mathscr{M})$ и $v \in \mathscr{V}(\mathscr{M})$. Тогда*

$$\mathscr{E}(v)\mu(Q) = \mu(e^{\otimes v} \otimes \mathscr{E}_T(v)Q) \tag{10}$$

в смысле рядов Тейлора.

Действительно, $e^{\otimes v}$ — групповой элемент в $\widehat{T}(\mathscr{V})$, так что $\triangle e^{\otimes v} = e^{\otimes v} \check{\otimes} e^{\otimes v}$. Следовательно, по теореме 1

$$\mathscr{E}(v)\mu(Q) = \mu(e^{\otimes v})\mu(Q) = \mu(e^{\otimes v} \otimes \mu_T(e^{\otimes v})Q) = \mu(e^{\otimes v} \otimes \mathscr{E}_T(v)Q).$$

Равенство (9) доказывается индукцией по n. Для $n = 1$ оно уже доказано, поэтому достаточно доказать (9) для некоторого n в предположении, что для $(n-1)$-кратного отображения оно справедливо. Продолжим $v_i \in T_x\mathscr{M}$, $1 \le i \le n$, произвольным образом до гладких векторных полей на $\mathscr{M}$. Пусть $w_i \in \mathscr{V}$ — поля такие, что $\mathscr{E}_T(v_1)w_i = v_i$, $2 \le i \le n$. Обозначим

$$U = \mu(e^{\otimes w_2} \otimes \dots \otimes e^{\otimes w_n})u.$$

По предположению индукции

$$U(x) = J(\gamma(x; w_2(x), \ldots, w_n(x)))u(\exp_x(w_2(x), \ldots, w_n(x)))$$

для любой точки $x \in \mathscr{M}$. Параллельный перенос согласуется с тензорным умножением, поэтому

$$\mathscr{E}_T(v_1)e^{\otimes w_2} \otimes \cdots \otimes e^{\otimes w_n} = e^{\otimes v_2} \otimes \cdots \otimes e^{\otimes v_n}.$$

По лемме 5

$$\begin{aligned}\mu(e^{\otimes v_1} \otimes e^{\otimes v_2} \otimes \cdots \otimes e^{\otimes v_n})u(x) &= \mu(e^{\otimes v_1} \otimes \mathscr{E}_T(v_1)(e^{\otimes w_2} \otimes \cdots \otimes e^{\otimes w_n}))u(x) \\ &= \mathscr{E}(v_1)U(x) = J(\gamma(x; v_1(x)))U(x') \\ &= J(\gamma(x; v_1(x)))J(\gamma(x'; w_2(x'), \ldots, w_n(x')))u(\exp_{x'}(w_2(x'), \ldots, w_n(x'))),\end{aligned}$$

где $x' = \exp_x(v_1(x))$. Но из определения развертки следует, что

$$\gamma(x; v_1(x)) \cup \gamma(x'; w_2(x'), \ldots, w_n(x')) = \gamma(x; v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)),$$

тем самым

$$J(\gamma(x; v_1(x)))J(\gamma(x'; w_2(x'), \ldots, w_n(x'))) = J(\gamma(x; v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)))$$

и

$$\exp_{x'}(w_2(x'), \ldots, w_n(x')) = \exp_x(v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)).$$

Сравнивая полученные выражения, приходим к (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи — Зингера об индексе. М.: Мир, 1970. Гл. IV.
2. *Гаврилов А. В.* Двойное экспоненциальное отображение и ковариантное дифференцирование // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 68–74.
3. *Kobayashi Sh., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. New York: Jihn Wiley& Sons, 1963. V. I.
4. *Шарафутдинов В. А.* Геометрическое исчисление символов псевдодифференциальных операторов. I // Мат. труды. 2004. Т. 7, № 2. С. 159–206.
5. *Гаврилов А. В.* Алгебраические свойства ковариантного дифференцирования и композиция экспоненциальных отображений // Мат. труды. 2006. Т. 9, № 1. С. 3–20.
6. *Klimyk A., Schmudgen K.* Quantum groups and their representations. New York: Springer-Verl., 1997.

Статья поступила 18 апреля 2007 г., окончательный вариант — 3 сентября 2007 г.

Гаврилов Алексей Владимирович
Сибирский независимый институт, ул. Северная, 23/1, Новосибирск 630082
gavrilov19@gmail.com