Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 512.542

ХАРАКТЕРИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СПОРАДИЧЕСКИХ ПРОСТЫХ ГРУПП

Ч. Хань, Г. Чэнь, С. Го

Аннотация. Доказано, что каждая спорадическая простая группа может быть однозначно определена по множеству порядков ее максимальных абелевых подгрупп.

Ключевые слова: спорадическая простая группа, максимальная абелева подгруппа, порядковая компонента.

1. Введение

В теории групп есть способ получения информации о структуре группы G, исходя из изучения ее подгрупп. В [1] доказано, что если G — одна из групп $PSL(2,\ 2^n)$, $Sz(2^{2m+1})$, A_n $(n \leq 10)$, K_3-групп, групп Матье или групп Янко, то G однозначно определяется множеством порядков ее максимальных абелевых подгрупп. В [2] доказано, что знакопеременные группы, граф простых чисел которых имеет три связные компоненты, могут быть однозначно определены множеством порядков их максимальных абелевых подгрупп. Данная работа продолжает [2]. Здесь доказано, что каждая спорадическая простая группа с точностью до изоморфизма может быть определена множеством порядков ее максимальных абелевых подгрупп.

Обозначения. Если G — конечная группа, то через $\Gamma(G)$ обозначается граф простых чисел G; $t(\Gamma(G))$ — число компонент $\Gamma(G)$; π_i $(1\leq i \leq t(\Gamma(G)))$ — множество вершин $\Gamma(G)$. Если G четного порядка, то через π_1 обозначается четная компонента $\Gamma(G)$. Через $\pi(G)$ будем обозначать множество простых делителей $|G|$; $M(G)$ — множество порядков максимальных абелевых подгрупп G. Если p простое и a целое, то $p^n \parallel a$ означает, что $p^n|a$ и $p^{n+1} \nmid a$.

Пусть $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_t$ — все компоненты $\Gamma(G)$. Тогда $|G| = m_1 m_2 \dots m_t$, где $\pi(m_i) = \pi_i$, $i = 1, 2, \dots, t$. Положительные числа $m_1, m_2, \dots, m_t$ называют *компонентами порядка группы* G (см. [3]). Компоненты порядка конечных простых групп с несвязным графом простых чисел перечислены в [4, табл. 1–4]. Здесь в табл. 1 укажем для удобства такие компоненты для спорадических простых групп.

Следующая лемма вытекает из определения компоненты порядка, теоремы А и леммы 3 в [5].

Лемма 1.1. *Пусть G — конечная группа с несвязным графом простых чисел. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:*

(a) *G — фробениусова или 2-фробениусова группа;*

This work is supported by NSFC (N 10771172).

(b) *G обладает нормальным рядом $H \lhd K \lhd G$ таким, что H и G/K — π_1-группы, K/H — неабелева простая группа и H — нильпотентная группа. Кроме того, каждая нечетная компонента G является также компонентой порядка K/H.*

Замечание. Группу G называют 2-*фробениусовой группой*, если G имеет нормальный ряд $H \lhd K \lhd G$ такой, что K — фробениусова группа с фробениусовым ядром H и G/H также фробениусова группа с ядром K/H. Нам будет полезен следующий результат о структуре фробениусовых групп.

Лемма 1.2 [6]. *Пусть G — фробениусова группа четного порядка. Если H и K — фробениусовы ядро и дополнение G соответственно, то $t(\Gamma(G)) = 2$ и компонентами графа простых чисел группы G являются $\pi(H)$ и $\pi(K)$.*

Лемма 1.3 [6]. *Пусть G — 2-фробениусова группа четного порядка. Тогда*
(a) *$t(\Gamma(G)) = 2$, $\pi_1 = \pi(G/K) \cup \pi(H)$ и $\pi(K/H) = \pi_2$;*
(b) *G/K и K/H циклические, $|G/K| \mid |\operatorname{Out}(K/H)|$ и $(|G/K|, |K/H|) = 1$;*
(c) *H — нильпотентная группа.*

Следующая лемма вытекает непосредственно из определения $M(G)$.

Лемма 1.4. *Пусть G — конечная группа, M — неабелева простая группа с несвязным графом простых чисел. Пусть $M(G) = M(M)$. Тогда*
(1) *G и M имеют один и тот же граф простых чисел;*
(2) *если граф простых чисел M имеет изолированные точки и силовские подгруппы, соответствующие таким точкам, простых порядков, то в G есть нормальный ряд, как в лемме 1.1, и соответствующие нечетные компоненты порядка M суть нечетные компоненты порядка K/H.*

Доказательство. (1) Вытекает из определений.
(2) По лемме 1.1 и (1) G имеет нормальный ряд $H \lhd K \lhd G$ такой, что H и G/K являются π_1-группами, а K/H — простой группой. Согласно предположению для изолированной точки p графа простых чисел M p-силовская подгруппа M имеет порядок p. Тем самым соответствующие нечетные компоненты порядка K/H должны быть степенями p. Если они не равны p, то K/H содержит абелеву подгруппу порядка p^2; противоречие с тем, что $M(G) = M(M)$.

Лемма [4]. *Пусть $t(\Gamma(G)) \geq 2$ и $N \trianglelefteq G$. Если N — π_1-группа и $a_1, a_2, \dots, a_r$ — компоненты порядка G, то каждое из $a_1, a_2, \dots, a_r$ является делителем $|N| - 1$.*

2. Основной результат

Покажем теперь, что любая спорадическая группа характеризуется множеством порядков ее максимальных абелевых подгрупп.

Теорема 2.1. *Пусть G — конечная группа и M — спорадическая простая группа. Если $M(G) = M(M)$, то $G \cong M$.*

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько лемм по количеству компонент в $\Gamma(M)$. Так как все спорадические простые группы имеют несвязный граф простых чисел, из леммы 1.1 вытекает, что G — фробениусова группа, или 2-фробениусова группа, или G имеет нормальный ряд $1 \lhd H \lhd K \lhd G$ такой, что H и G/K суть π_1-группы и K/H — простая группа. В [1] доказано, что $G \cong M$, если M — одна из групп Матье или Янко. Тем самым можно считать, что M — спорадическая группа, отличная от групп Матье или Янко. В таком случае $t(\Gamma(M)) \leq 4$. Поскольку нечетные компоненты

Таблица 1.

Спорадические простые группы и порядки их компонент

M_{11}	$2^4 \cdot 3^2$	5	11			
M_{12}	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5$	11				
M_{22}	$2^7 \cdot 3^2$	5	7	11		
M_{23}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	11	23			
M_{24}	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	11	23			
J_1	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	7	11	19		
J_2	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$	7				
J_3	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5$	17	19			
J_4	$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3$	23	29	31	37	43
HS	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3$	7	11			
Ru	$2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$	29				
Sz	$2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7$	11	13			
He	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$	17				
McL	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7$	11				
ON	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3$	11	19	31		
Ly	$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11$	31	37	67		
Co_1	$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$	23				
Co_2	$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7$	11	23			
Co_3	$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$	23				
F_{22}	$2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	13				
F_{23}	$2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	17	23			
F'_{24}	$2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13$	17	23	29		
$M = F_1$	$2^{46} \cdot 3^{30} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 47$	41	59	71		
B	$2^{41} \cdot 3^{31} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	31	47			
Th	$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13$	19	31			
HN	$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11$	19				

M — простые числа, соответствующие нечетные компоненты группы G также простые по лемме 1.4.

В следующей лемме приведем некоторые факты о K/H, часто используемые ниже.

Лемма 2.1. *Пусть G — конечная группа и M — спорадическая простая группа. Если $M(G) = M(M)$ и G имеет нормальный ряд $1 \lhd H \lhd K \lhd G$ такой, что G/K и H — π_1-группы, то*

(1) *если $t(M) \geqq 3$, то существуют две нечетные компоненты порядка K/H, разности которых равны 2, 4, 6, 8, 12 или 16;*

(2) *если $t(M) \geqq 2$, то K/H не может быть изоморфна $E_8(q)$;*

(3) *если $t(M) \geqq 2$, $H \neq 1$, то произведение нечетных компонент порядка делит $|Z| - 1$, где Z изоморфна центру силовской подгруппы H;*

(4) *если $t(M) \geqq 2$ и $H = 1$, то $K \trianglelefteq G \trianglelefteq \mathrm{Aut}(K)$.*

Доказательство. (1) Так как все нечетные компоненты порядка спорадической простой группы простые, таковыми будут и все нечетные компоненты порядка G ввиду леммы 1.4. Нечетные компоненты порядка группы G являются также нечетными компонентами порядка K/H по лемме 1.1, откуда (1) вытекает согласно табл. 1.

(2) Из табл. 1 видно, что нечетная компонента порядка M всегда $\leqslant 71$, но $E_8(q)$ всегда > 71, тем самым K/H не может быть изоморфна $E_8(q)$.

(3) Если Z — центр силовской подгруппы в H, то $Z \lhd G$, так что произведение нечетных порядков компонент делит $|Z|-1$ по лемме 1.5.

(4) Если $t(M) \geqq 2$ и $H \neq 1$, то $C_G(K) = 1$. Поскольку K — неабелева простая группа, получаем (4).

Лемма 2.2. *Если* $t(\Gamma(M)) = 4$, *то* $G \cong M$.

Доказательство. Если $t(\Gamma(M)) = 4$, то M может быть изоморфна только ON, Ly, F'_{24} или F_1. По леммам 1.2–1.4 и 1.6 G имеет нормальный ряд $1 \lhd H \lhd K \lhd G$ такой, что $t(\Gamma(K/H)) \geq 4$ и некоторые нечетные компоненты порядка K/H равны нечетным компонентам порядка M, которые являются простыми числами. Согласно [4, табл. 1–4] и лемме 2.1 K/H изоморфна одной из групп M_{22}, J_1, J_4, ON, Ly, F'_{24}, F_1, ${}^2E_6(2)$, $A_2(4)$ и ${}^2B_2(2^{2m+1})(m \geq 1)$. Поскольку нечетные компоненты порядка M с $t(\Gamma(M)) \geq 4$ суть простые, большие чем 11, имеем $K/H \ncong A_2(4)$. Так как 43 делит порядок J_4, но не порядок других спорадических простых групп, то $K/H \ncong J_4$. Если $K/H \cong^2 E_6(2)$, то G и M должны иметь абелеву подгруппу порядка 19, а это означает, что M изоморфно $\cong J_1$ или ON. Но тогда M содержит элементы порядка 17, а он не делит порядок $K/H \cong^2 E_6(2)$; противоречие.

Если $K/H \cong^2 B_2(2^{2m+1})$, то K/H и M имеют одинаковые нечетные компоненты порядков. Получаем систему уравнений

$$a = 2^{2m+1} - 2^{m-1} + 1, \quad b = 2^{2m+1} - 1, \quad c = 2^{2m+1} + 2^{m-1} + 1,$$

где значения a, b и c следующие: $a = 11$, $b = 19$, $c = 31$, если $M \cong O'N$; $a = 31$, $b = 37$, $c = 67$, если $M \cong Ly$; $a = 17$, $b = 23$, $c = 29$, если $M \cong F'_{24}$; $a = 41$, $b = 59$, $c = 71$, если $M \cong F_1$. Легко показать, что эта система неразрешима, так что $K/H \ncong^2 B_2(2^{2m+1})$. Отсюда вытекает, что K/H может быть только одной из следующих групп: M_{22}, J_1, J_4, $O'N$, Ly, F'_{24} или F_1. В силу [1] и табл. 1 получаем, что $K/H \cong M$.

Докажем, что $H = 1$. Если $K/H \cong O'N$ и Z — центр силовской подгруппы H, то ввиду того, что каждая четная компонента $O'N$ есть $2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3$, порядок $|Z|$ делит одно из 2^9, 3^4, 5 и 7^3. Однако $11 \cdot 19 \cdot 31$ делит $|Z|-1$ по лемме 2.1(3), а это невозможно. Отсюда $H = 1$ и $K/H \cong O'N$. Аналогично можно показать, что $H = 1$ для $K/H \cong Ly$, F'_{24} и F_1.

Мы доказали, что $K \lhd G \lhd \mathrm{Aut}(K)$ по лемме 2.1(4). Если $K \cong O'N$, то, поскольку в $\mathrm{Aut}(K)$ есть элемент порядка 22, а в M таковых нет, имеем $G = K \cong O'N \cong M$. Если $K \cong Ly$, F_1 или F'_{24}, то $|\mathrm{Out}(K)|$ равно 1 или 2. Из первых двух случаев вытекает, что $G = K \cong M$. В последнем случае можно сравнить нечетные компоненты порядка и увидеть, что $M \cong F'_{24}$. С другой стороны, $\mathrm{Aut}(F'_{24})$ имеет элемент порядка 54, но в F'_{24} такого нет, тем самым G не может быть изоморфна $\mathrm{Aut}(F'_{24})$, ибо $M(G) = M(M)$. Итак, $G = K \cong M$.

Лемма 2.3. *Если* $t(\Gamma(M)) = 3$, *то* $G \cong M$.

Доказательство. Если $t(\Gamma(M) = 3$, то по леммам 1.1–1.3 и 1.6 G имеет нормальный ряд $1 \lhd H \lhd K \lhd G$ такой, что $t(\Gamma(K/H) \geq 3$ и K/H изоморфна одной из следующих групп: $A_1(q)$, $A_2(2)$, $A_2(4)$, ${}^2A_5(2)$, $E_7(2)$, $E_7(3)$, ${}^2E_6(2)$, ${}^2D_{p+1}(2)$ ($p = 2^n - 1$, $n \geq 2$), ${}^2D_p(3)$ ($p = 2^n + 1$, $n \geq 1$), $F_4(2^n)$, ${}^2F_4(2^{2m+1})$ ($m \geq 1$), ${}^2B_2(2^{2m+1})$ ($m \geq 1$), ${}^2E_6(2)$, $A_1(q)$, ${}^2G_2(3^{2m+1})$, $G_2(q)$ $(3 \mid q)$, A_p (p, $p-2$ простые), и спорадической простой группе, имеющей по крайней мере три компоненты порядка.

Согласно табл. 1 и лемме 2.1(1) K/H не может быть изоморфна $A_2(2)$, $A_2(4)$, $E_7(2)$, $E_7(3)$ или ${}^2E_6(2)$.

Случай (i). Докажем, что K/H не может быть изоморфна ${}^2A_5(2)$.

Если $K/H \cong {}^2A_5(2)$, то ввиду того, что нечетные компоненты K/H суть 7 и 11, $M \cong HS$. Если $H \neq 1$, то получаем противоречие по лемме 2.1(3). Отсюда $H = 1$ и $K \cong^2 A_5(2)$. Ввиду леммы 2.1(4) $K \lhd G \lhd \mathrm{Aut}(K)$. Но M имеет подгруппу порядка 5^2, а $\mathrm{Aut}(K)$ не имеет таковой; противоречие. Случай доказан.

Случай (ii). Докажем, что K/H не может быть изоморфно ${}^2B_2(2^{2m+1})$, ${}^2D_{p+1}(2)$ ($p = 2^n - 1$, $n \geq 2$) или ${}^2D_p(3)$ ($p = 2^n + 1$, $n \geq 1$).

Пусть $K/H \cong^2 D_{p+1}(2)$. Так как разность между двумя нечетными компонентами порядков K/H равна 2^p, где p простое и ≥ 3, M должна иметь две нечетные компоненты порядка с одной и той же разностью согласно лемме 2.1(1). Но M их не имеет; противоречие. Если $K/H \cong {}^2D_p(3)$, то разность между двумя нечетными компонентами K/H равна $(3^{p-1} - 1)/4$ для $p \geq 5$, а это противоречит лемме 2.1(1). Аналогично $K/H \ncong^2 B_2(2^{2m+1})$.

Случай (iii). Докажем, что K/H не может быть изоморфна $G_2(q)$ $(3 \mid q)$, ${}^2G_2(3^{2m+1})$, $F_4(q)$ или ${}^2F_4(2^{2m+1})$.

Пусть $K/H \cong G_2(q)(3 \mid q)$. Поскольку разность нечетных компонент порядка K/H равна $2q$, $2q = 6$, по лемме 2.1(1) ввиду табл. 1 $M \cong F_{23}$ или F'_{24}. Сравним их нечетные компоненты порядка с K/H и получим, что $q^2+q+1 = 17$ и $q^2 - q + 1 = 23$; противоречие. Отсюда $K/H \ncong G_2(q)$. Если $K/H \cong F_4(q)$, то разность нечетных компонент порядка K/H равна q^2, т. е. 4 или 16 по лемме 2.1(1), откуда M изоморфна HS или B; противоречие.

Вычислим разности между нечетными порядками компонент ${}^2G_2(3^{2m+1})$ и ${}^2F_4(q)$ и придем к $2 \cdot 3^{m+1}$ и $2(2^{3m+1} + 2^{m+2})$ соответственно, но оба эти числа > 16. Это невозможно по лемме 2.1(1).

Случай (iv). Покажем, что K/H не может быть изоморфна $A_1(q)$.

Предположим, что это не так. Поскольку графы простых чисел $A_1(q)$ и M имеют три компоненты, нечетные компоненты порядка равны. Отсюда при $4|(q \pm 1)$ получаются следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} q &= 19 \\ (q-1)/2 &= 17 \end{aligned} \text{ или } \begin{matrix} 11 \\ 7 \end{matrix} \text{ или } \begin{matrix} 13 \\ 11 \end{matrix} \text{ или } \begin{matrix} 23 \\ 17 \end{matrix} \text{ или } \begin{matrix} 47 \\ 17 \end{matrix} \text{ или } \begin{matrix} 31 \\ 19 \end{matrix}.$$

Все эти системы не имеют решений. Если $2|q$, то нечетные компоненты порядка K/H суть $q \pm 1$ и их разность равна 2. Взяв M с $t(\Gamma(M)) = 3$ в табл. 1, видим, что $q + 1 = 19$, $q - 1 = 17$, или $q + 1 = 13$, $q - 1 = 11$, что не выполняется для обеих возможностей M.

Случай (v). Докажем, что K/H не может быть изоморфна A_p, где p и $p - 2$ простые.

Допустим, что это не так. Тогда разность нечетных компонент порядков K/H равна 2. Взяв M с $t(\Gamma(M)) = 3$ в табл. 1, находим, что M может быть изоморфна только Sz по лемме 2.1(1). В таком случае $p = 13$. Ввиду того, что A_{13} имеет элементы порядка 35, а M нет, получаем противоречие.

Итак, K/H изоморфна некоторой спорадической простой группе, имеющей три компоненты порядка.

Случай (vi). Докажем, что $G \cong M$.

Утверждается, что $K/H \cong M$. По лемме 1.4 $K/H \cong M$ с возможным исключением $M \cong Co_2$, где K/H изоморфна одной из групп M_{23} и M_{24}. Допустим, что $M \cong Co_2$ и K/H изоморфна M_{23} или M_{24}. Если Z — центр силовской подгруппы в H, то $|Z|$ делит 2^{18}, 3^6, 5^3 или 7 ввиду того, что $M(G) = M(Co_2)$ и $11 \cdot 13$ делит $|Z| - 1$ по лемме 1.5, отсюда $|Z| = 1$ и $H = 1$. Таким образом, $K \trianglelefteq G \trianglelefteq \mathrm{Aut}(K)$ по лемме 2.1(4). В случае $K \cong M_{23}$ M_{24} группа G не имеет абелевой подгруппы порядка 25, а M имеет, и получаем противоречие с равенством $M(G) = M(M)$. Тем самым $K \cong Co_2$, а это доказывает, что $G \cong Co_2 \cong M$ так как $\mathrm{Out}(Co_2) = 1$. Утверждение доказано.

Из $K/H \cong M$ вытекает, что $H = 1$ по лемме 2.1(4). Поэтому $K \trianglelefteq G \trianglelefteq \mathrm{Aut}(K)$. Если $K \cong M \cong F_{23}$, B или Th, то $\mathrm{Aut}(K) = K$ ввиду того, что $G \cong M$. Если $M \cong HS$, то $HS \lhd G \lhd \mathrm{Aut}(HS)$. Поскольку $\mathrm{Aut}(HS)$ имеет абелеву подгруппу порядка 14, а M не имеет, то $G = K \cong M$. В случае $M \cong Sz$ будет $G = K \cong M$, так как $|\mathrm{Out}(Sz)| = 2$ и $\mathrm{Aut}(Sz)$ имеет абелеву подгруппу порядка 40, а M не имеет.

Лемма 2.4. *Если* $t(\Gamma(M)) = 2$, *то* $G \cong M$.

Доказательство. Если $t(\Gamma(M)) = 2$, то $M \cong Ru, He, McL, Co_1, Co_3, F_{22}, HN$. Разобьем доказательство на несколько утверждений.

Предложение 2.1. *G не может быть фробениусовой группой.*

Если группа G фробениусова, то $G = HK$, H нормальна и компоненты графа простых чисел G суть $\pi(K)$ и $\pi(H)$ ввиду леммы 1.2. Если $2 \in \pi(H)$, то H нильпотентна и $|K|$ — нечетная компонента порядка. Отсюда H содержит силовскую подгруппу N в G такую, что $|N| < |K|$ согласно табл. 1, а это невозможно по лемме 1.5. Тем самым $2 \in \pi(K)$ и по лемме 1.3 H — циклическая подгруппа порядка, равного нечетной компоненте порядка M. Итак, $|H|$ простое и $< |K|$ (см. табл. 1), что невозможно также по лемме 1.5. Предложение доказано.

Предложение 2.2. *G не может быть 2-фробениусовой группой.*

Если G — 2-фробениусова группа, то по лемме 1.3 G имеет нормальный ряд $H \lhd K \lhd G$ такой, что $|K/H|$ — нечетная компонента порядка. Отсюда $|G/K| \cdot |H|$ — четная компонента порядка G и $|G/K| \mid (|K/H| - 1)$. Анализ четных компонент порядка $M \cong Ru, He, McL, Co_1, Co_3$, F_{22}, HN в табл. 1 показывает, что G имеет нормальную подгруппу, содержащуюся в H, порядок которой равен 13, 27, 7, 13, 17, 11 или 11 соответственно. Однако ввиду леммы 1.5 это невозможно. Предложение доказано.

В силу предложений 1, 2 и леммы 1.1 G имеет нормальный ряд $H \lhd K \lhd G$ такой, что $\pi(H) \cup \pi(G/K) \subseteqq \pi_1(G)$, где H — нильпотентная группа, K/H — неабелева простая группа и $t(\Gamma(K/H)) \geqq t(\Gamma(G)) = 2$.

Предложение 2.3. $t(\Gamma(K/H)) \leq 3$.

Доказательство. Допустим, что утверждение предложения неверно. По лемме 2.1(4) $K/H \ncong E_8(q)$.

Так как ${}^2E_6(2)$ содержит абелеву подгруппу порядков 19 и 17, а M не содержит, имеем $K/H \ncong {}^2E_6(2)$. Поскольку нечетные компоненты порядков $A_2(4)$ суть 5, 7, 9 и нечетные компоненты порядка M не меньше 11, то $K/H \ncong A_2(4)$.

Группа ${}^2B_2(2^{2m+1})$ имеет три нечетные компоненты порядка $2^{2m+1}-1$, $2^{2m+1}+2^{m-1}+1$ $2^{2m+1}-2^{m-1}+1$, поэтому если $K/H \cong^2 B_2(2^{2m+1})$, то одна из этих компонент равна единственной нечетной компоненте порядка M и мы приходим к одному из следующих уравнений:

одно из $2^{2m+1}-1$, $2^{2m+1}+2^{m-1}+1$ или $2^{2m+1}-2^{m-1}+1$	$=$	29 $M \cong Ru$ 11 $M \cong McL$ 17 $M \cong He$ 23 $M \cong Co_1$ или Co_3 13 $M \cong F_{22}$ 19 $M \cong HN$

Легко проверить, что решений не имеют все эти уравнения, кроме $13 = 2^{2m+1}+2^{m-1}+1$, $m=1$. В этом случае $M \cong F_{22}$. Это приводит к тому, что K/H изоморфна ${}^2B_2(2^3)$, у которой нечетные компоненты порядка равны 5, 7, 13. Хотя в этом случае мы не можем доказать, что $H=1$, однако рассуждениями, аналогичными проведенным при обсуждении центра силовской подгруппы в H, можно доказать, что H — 2-группа и $t(\Gamma(G/H)) \geq 2$. Отсюда $K/H \leqq G/H \leqq \mathrm{Aut}(K/H)$. Поскольку $\mathrm{Out}({}^2B_2(2^3)) = Z_3$, получаем $G/H = K/H$ или $G/H = K/H : Z_3$. Но ${}^2B_2(2^3)$ и $\mathrm{Aut}({}^2B_2(2^3))$ обе имеют максимальные подгруппу порядка 5, поэтому $5 \in M(G)$. Однако M имеет максимальную абелеву подгруппу порядка 25, а это противоречит равенству $M(G) = M(M)$. Тем самым $K/H \ncong^2 B_2(2^{2m+1})$

Предположим, что K/H — спорадическая простая группа по крайней мере с четырьмя компонентами. Так как $\pi(K/H) \subseteqq \pi(M)$, то $K/H \cong J_1$ и $M \cong HN$ или $K/H \cong M_{22}$ и $M \cong McL$. В первом случае M имеет абелеву подгруппу порядка 5^2, тем самым $5^2 \mid |G|$ ввиду того, что $M(G) = M(M)$. В силу того, что $5 \parallel |K/H|$ и $5 \nmid |\mathrm{Out}(K/H)|$, будет $5 \mid |H|$, так как порядок центра Z 5-силовской подгруппы в H делит 5^5 и $|Z|-1$ является делителем 19 по лемме 1.5, что невозможно. Таким же путем можно доказать, что второй случай также невозможен.

Замечание. Способ доказательства соотношения $K/H \ncong^2 B_2(2^3)$ довольно типичен. Он будет часто использован в дальнейших обсуждениях. В таком случае для удобства мы будем упоминать о нем как об «отмеченном подходе».

Предложение 2.4. $t(\Gamma(K/H)) \neq 3$.

Согласно [5, 7] простые группы с тремя компонентами порядка таковы: $E_7(2)$, $E_7(3)$, $A_2(2)$, ${}^2A_5(2)$, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_3, HS, Suz, Co_2, F_{23}, B, Th, A_p (p, $p-2$ простые), $A_1(q)$, ${}^2G_2(3^{2m+1})$, ${}^2D_p(3)$ ($p = 2^n+1$, $n \geq 2$), ${}^2D_{p+1}(2)$ ($p = 2^n - 1$, $n \geq 2$), $F_4(q)$, ${}^2F_4(2^{2m+1})$ ($m \geq 1$), и $G_2(q)$ $(3|q)$.

С помощью отмеченного подхода легко удалить $E_7(2)$, $E_7(3)$, $A_2(2)$. Докажем, что K/H — не спорадическая простая группа. Действительно, иначе ввиду $\pi(K/H) \subseteqq \pi(M)$ имеем $M \cong HN$, и $K/H \cong J_3$ согласно табл. 1. То, что $M \cong HN$ имеет абелеву подгруппу порядка 5^2, дает $5^2 \mid |G|$ в силу $M(G) = M(M)$. Тем не менее $5 \parallel |K/H \cong J_3|$ и $5 \nmid |\mathrm{Out}(K/H)|$, тем самым должно быть $5 \mid |H|$. Отсюда порядок нетривиального центра Z 5-силовской подгруппы в H делит 5^5. Но $|Z|-1$ делится на 19 по лемме 1.5; противоречие. Это удаляет спорадические простые группы.

Шаг за шагом мы удалим и оставшиеся возможности для K/H.

Шаг 1. Докажем, что $K/H \ncong A_p$. Если $K/H \cong A_p$, то $K/H \cong A_{13}$ и $M \cong F_{22}$ ввиду того, что $\pi(K/H) \subsetneqq \pi(M)$. Так как A_{13} имеет абелеву подгруппу порядка 35, а M такой подгруппы не имеет, получили противоречие с равенством $M(G) = M(M)$.

Шаг 2. Докажем, что $K/H \ncong^2 A_5(2)$. Действительно, в противном случае $M \cong McL$ по лемме 1.4 и $\pi(K/H) \subsetneqq \pi(M)$. Используя отмеченный подход, приходим к противоречию.

Шаг 3. Докажем, что $K/H \ncong A_1(q)$. Если $K/H \cong A_1(q)$, то $q = 11, 16, 17, / 29, 37$ ввиду того, что $\pi(K/H) \subsetneqq \pi(M)$.

Если $q = 11$, то $M \cong McL$, и получаем противоречие с учетом отмеченного подхода. Для $q = 16$ или 17, $q = 19$ или 37 и $q = 23$ имеем $M \cong He$, $M \cong HN$ и $M \cong Co_1$ или Co_3 соответственно. В этих случаях по отмеченному подходу приходим к противоречию. Наконец, для $q = 29$ и $q = 13$ или 25, или 27 имеем $M \cong Ru$ и $M \cong F_{22}$ соответственно. Тем же путем приходим к противоречию.

Шаг 4. Докажем, что $K/H \ncong G_2(q)(3|q)$, ${}^2G_2(3^{2m+1})$, ${}^2D_p(3)$, ${}^2D_{p+1}(2)$, $F_4(q)$ и ${}^2F_4(2^{2m+1})$.

Если $K/H \cong G_2(q)(3|q)$, то по лемме 1.4 получаем одно из следующих уравнений:

одно из $q^2 - q + 1$ или $q^2 + q + 1$	=	29	$M \cong Ru$
		17	$M \cong He$
		11	$M \cong McL$
		23	$M \cong Co_1$ или Co_3
		13	$M \cong F_{22}$
		19	$M \cong HN$

Отсюда $q = 3$ и $K/H \cong G_2(3)$, $M \cong F_{22}$ ввиду того, что $\pi(K/H) \subsetneqq \pi(M)$. Подставляя 11 вместо 5 в отмеченном подходе, приходим к противоречию. Отсюда $K/H \ncong G_2(q)$.

Аналогично $K/H \ncong {}^2G_2(3^{2m+1})$, ${}^2D_p(3)$, ${}^2D_{p+1}(2)$, $F_4(q)$ и ${}^2F_4(2^{2m+1})$. Предложение доказано.

Предложение 2.5. *Если* $t(\Gamma(K/H)) = 2$, *то* $G \cong M$.

Докажем предложение в несколько шагов.

Шаг 1. Докажем, что $K/H \ncong A_n$ ($n \neq 5$, 6; $n = p, p+1$ или $p+2$, хотя бы одно из n и $n-2$ не простое).

Если $K/H \cong A_n$, то $n = 11$ или 12 и $M \cong McL$ ввиду того, что $\pi(K/H) \subsetneqq \pi(M)$. Поскольку $C_G(K/H) = 1$, имеем $K/H \lhd G/H \lhd \mathrm{Aut}(K/H)$. Так как A_{11} и A_{12} содержат абелеву подгруппу порядка 20, а McL таковой не обладает, получаем противоречие.

Шаг 2. Докажем, что K/H не может быть изоморфна $A_{p-1}(q)$, $A_p(q)$ $(q-1|p-1)$, ${}^2A_{p-1}(q)$, ${}^2A_p(q)$ $(q+1|p+1)$.

Если $K/H \cong A_{p-1}(q)$, то ввиду $\pi(K/H) \subsetneqq \pi(M)$ получаем следующие уравнения:

$\frac{q^p-1}{(q-1)(p,q-1)}$	$=$	29	$M \cong Ru$
		17	$M \cong He$
		11	$M = McL$
		23	$M \cong Co_1$ или Co_3
		13	$M \cong F_{22}$
		19	$M \cong HN$

Отсюда $\frac{q^p-1}{(q-1)(p,q-1)} = 13$, $p = q = 3$, следовательно, $K/H \cong A_2(3)$ и $M \cong F_{22}$. Используя отмеченный подход, приходим к противоречию. Значит, $K/H \ncong A_{p-1}(q)$.

Оставшиеся случаи K/H могут быть удалены аналогично.

Шаг 3. Докажем, что K/H не может быть изоморфна $B_n(q)$ ($n = 2^m$, $m \geq 2$), $C_n(q)$ ($n = 2^m, m \geq 1$) и ${}^2D_n(q)$ ($n = 2^m, m \geq 1$).

Докажем, например, что $K/H \ncong B_n(q)$, остальные случаи аналогичны. Если $K/H \cong B_n(q)$, то по леммам 1.4 и 2.1 приходим к следующим уравнениям:

$\frac{q^n+1}{(2,q-1)}$	$=$	29	$M \cong Ru$
		17	$M \cong He$
		11	$M \cong McL$
		23	$M \cong Co_1$ или Co_3
		13	$M \cong F_{22}$
		19	$M \cong HN$

Получаем $q = 5$ и $n = 2$, откуда $K/H \cong B_2(5)$ и $M \cong F_{22}$. Используя отмеченный подход, получаем противоречие. Значит, $K/H \ncong B_n(q)$.

Подобные рассуждения могут быть использованы для доказательства соотношений $K/H \ncong C_n(q)$ ($n = 2^m$, $m \geq 1$) и ${}^2D_n(q)$ ($n = 2^m$, $m \geq 1$).

Шаг 4. Докажем, что K/H не может быть изоморфна $B_p(3)$, $C_p(3)$, $D_{p+1}(3)$ ($p \geq 3$), ${}^2D_p(3)$ ($p \geq 5$, $p \neq 2^n + 1$), ${}^2D_n(3)$ ($n = 2^m + 1$), ${}^2D_{p+1}(2)$ ($p \neq 2^m - 1$) и ${}^2F_4'(2)$.

Удалим $K/H \cong B_p(3)$ или $C_p(3)$. Так как эти две группы имеют одинаковые компоненты порядков, получаем для них следующие уравнения:

$\frac{3^p-1}{2}$	$=$	29	$M \cong Ru$
		17	$M \cong He$
		11	$M \cong McL$
		23	$M \cong Co_1$ или Co_3
		13	$M \cong F_{22}$
		19	$M \cong HN$

Тогда $p = 3$, откуда $K/H \cong B_3(3)$ или $C_3(3)$ и $M \cong F_{22}$. Вновь опираясь на отмеченный подход, можем сказать, что этот случай невозможен и тем самым $K/H \ncong B_p(3)$.

Аналогично можно доказать, что $K/H \ncong^2 D_{p+1}(3)$ ($p \geq 3$), ${}^2D_p(3)$ ($p \geq 5$, $p \neq 2^n + 1$), ${}^2D_n(3)$ ($n = 2^m + 1$), ${}^2D_{p+1}(2)$ ($p \neq 2^m - 1$).

Шаг 5. Докажем, что K/H не может быть изоморфна $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $F_4(q)$ (q odd), ${}^3D_4(q)$ и $G_2(q)$ $(3|q \pm 1)$.

Если $K/H \cong E_6(q)$, тогда нечетная компонента $E_6(q)$ равна одной из нечетных компонент M по леммам 1.1 и 1.4, т. е. $\frac{q^6+q^3+1}{(3,q-1)} = 29, 17, 11, 23, 13, 19$, что невозможно. Итак, $K/H \ncong E_6(q)$. Если $K/H \cong {}^2E_6(q)$, то по тем же соображениям $\frac{q^6+q^3+1}{(3,q+1)} = 29, 17, 11, 23, 13, 19$. Отсюда $q = 2$, $K/H \cong {}^2E_6(2)$ и $M \cong HN$. Так как четная компонента порядка HN равна $2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11$, можно увидеть, что порядок центра Z силовской подгруппы H делит 2^{14}, 3^6, 5^6, 7 или 11. Но $|Z| - 1$ должно быть кратно 19 по лемме 1.5, поэтому $|Z| = 1$. Отсюда $H = 1$ и $K \cong^2 E_6(2)$. Имеем $K \lhd G \lhd \mathrm{Aut}(K)$. Тем самым G включаем абелеву подгруппу порядка 257, а M не включает, а это противоречит равенству $M(G) = M(M)$.

Если $K/H \cong F_4(q)$ или ${}^3D_4(q)$, то $q^4 - q^2 + 1 = 29, 17, 11, 23, 13, 19$, откуда $q = 2$, $K/H \cong {}^3D_4(2), M \cong F_{22}$. К противоречию можно прийти теми же рассуждениями, которые было использованы для случая $K/H \cong {}^2B_2(2^3)$.

Если $K/H \cong G_2(q)(3|q \pm 1)$, то $q^2 \pm q + 1 = 29, 17, 11, 23, 13, 19$, откуда $q = 4$, значит, $K/H \cong G_2(4)$ и $M \cong F_{22}$. Ввиду отмеченного подхода такое невозможно.

Шаг 6. Докажем, что K/H не может быть изоморфна ${}^2F_4(2)'$.

Если $K/H \cong {}^2F_4(2)'$, то M должна быть изоморфна F_{22} для $\pi(K/H) \subsetneqq \pi(M)$. Так как $11 \nmid {}^2F_4(2)'$, имеем $11 \nmid |\mathrm{Aut}({}^2F_4(2)')|$, ибо $|\mathrm{Out}({}^2F_4(2)')| = 6$. Но $11 \in \pi(M)$, так что $11 \in \pi(G)$, откуда $11 \mid |H|$. Поскольку $|F_{22}|$ не делится на 11^2, 11-силовская подгруппа в H порядка 11 и нормальна в G, что противоречит лемме 1.5.

Шаг 7. Докажем, что $G \cong M$.

Из шагов 1–6 вытекает, что K/H не может быть изоморфна спорадической простой группе с двумя компонентами из шагов 1–6, т. е. $K/H \cong M_{11}$, Ru, He, McL, Co_1, Co_3, F_{22} или HN. Поскольку $t(\Gamma(K/H)) = t(\Gamma(M)) = 2$, нечетные компоненты порядка у них одинаковые. Согласно табл. 1 $K/H \cong M$ с возможным исключением:

(i) $M \cong McL$, $K/H \cong McL$ или M_{11};

(ii) $M \cong Co_1$ или Co_3, $K/H \cong Co_1$ или Co_3.

Если $M \cong Ru, He, McL, Co_1, Co_3$ или HN, то, рассуждая, как в случае (vi) леммы 2.2, получаем $H = 1$. Если $M \cong F_{22}$, то легко доказать, что H должна быть 2-группой. Так как $F_{22} > {}^2F_4'(2)$, имеем $H = 1$ по лемме 8.4 в [8].

Покажем теперь, что $G \cong M$.

Поскольку $t(\Gamma(G)) = 2$, имеем $K \lhd G \lhd \mathrm{Aut}(K)$. Если $M \cong Ru$, то $K \cong M \cong Ru$ и, следовательно, $\mathrm{Out}(K) = 1$, откуда $G \cong M \cong K$. Если $M \cong Co_1$, то $K \cong Co_1$ или Co_3, и так как эти группы имеют тривиальные внешние группы автоморфизмов, имеем $G = K \cong Co_1$ или Co_3. В связи с тем, что Co_1 обладает абелевой подгруппой порядка 13, а Co_3 нет, получаем $G = K \cong Co_1$. Аналогично $G \cong Co_3$, хотя $M \cong Co_3$. Поскольку $\mathrm{Aut}(He)$ имеет абелеву подгруппу порядка 30, $G = K \cong M$, если $M \cong He$. Аналогично $G = K \cong M$, если $K \cong McL$, F_{22}, HN. Это показывает справедливость предложения.

Результат теоремы следует из предложений 2.2–2.5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wang Linhong*. A characterization of some classes of finite simple groups: Thes. for Master of Science. Southwest China Normal Univ., 2000. (in Chinese).

2. *Чэнь Г.* Характеризация знакопеременных групп с помощью множества порядков их максимальных абелевых подгрупп // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 718–720.

3. *Chen G. Y.* On Thompson's conjecture // J. Algebra. 1996. V. 185, N 1. P. 184–193.

4. *Chen G. Y.* A new characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1996. V. 3, N 1. P. 49–58.

5. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.

6. *Chen G. Y.* On Frobenius and 2-Frobenuis group // J. Southwest China Normal Univ. 1995. V. 20, N 5. P. 485–487. (in Chinese).

7. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.

8. *Shi W. J.* The characterization of the sporadic simple groups by their element orders // Algebra Colloq. 1990. V. 1, N 2. P. 159–166.

Статья поступила 7 февраля 2007 г.

Han Zhangjia (Хань Чжандзя)
Department of mathematics of Shanghai University,
200444, P. R. China
hzjmm11@yahoo.com.cn

Chen Guiyun (Чэнь Гуйюнь)
Corresponding Author
School of Mathematics and Statistics, Southwest University, 400715, Chongqing, P. R. China
gychen@swu.edu.cn

Guo Xiuyun (Го Сююнь)
Department of mathematics of Shanghai University, 200444, P. R. China
xyguo@staff.shu.edu.cn