Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 517.956

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. Г. Пятков, Б. Н. Цыбиков

Аннотация. Рассматривается задача об определении вместе с решением одного или нескольких коэффициентов в нелинейном параболическом уравнении второго порядка. Неизвестные коэффициенты входят как в главную часть, так и в нелинейное слагаемое. В качестве условий переопределения рассматриваются условия типа данных Дирихле на семействе плоскостей произвольной размерности. Доказано, что поставленная задача разрешима в пространствах Гёльдера локально по времени. Когда неизвестные функции входят в правую часть уравнения, а само уравнение линейно, доказана теорема существования и единственности решений в целом по времени.

Ключевые слова: обратная задача, условие переопределения, параболическое уравнение второго порядка, начально-краевая задача.

Введение

Мы рассматриваем задачу об определении вместе с решением одного или нескольких коэффициентов в параболическом уравнении вида

$$r(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = a(x,t,u,\nabla u), \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T). \tag{0.1}$$

Уравнение (0.1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{0.2}$$

$$u|_S = \varphi(x,t), \quad S = \Gamma \times (0,T),\ \Gamma = \partial G. \tag{0.3}$$

Условие Дирихле (0.3) также может быть заменено условием

$$\frac{\partial u}{\partial l} + l_0(x,t)u|_S = \varphi(x,t), \tag{0.4}$$

где l — гладкое некасательное векторное поле на Γ. Пусть $x' = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$ $(0 \le m \le n-1)$, $S_i = \{(x,t) \in Q : x'' = x''_i\}$, $i = 1, 2, \dots, s$, где $\{x''_i\}$ — набор фиксированных различных точек в $\mathbb{R}^{n-m}$. В качестве условий переопределения для нахождения вместе с решением коэффициентов уравнения (0.1), которые зависят от переменных x', t, мы рассматриваем условия на семействе плоскостей вида

$$u|_{S_i} = \varphi_i(x', t), \quad i = 1, 2, \dots, s, \tag{0.5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00439) и интеграционного гранта СО РАН № 48.

$$u_{x_{k_{ir}}}|_{S_i} = \varphi_{ir}(x', t), \quad m < k_{ir} \leqslant n \ \forall r = 1, 2, \dots, s_i, \ s_i \leq n - m, \ i = 1, 2, \dots, s. \tag{0.6}$$

В частности, возможно, что $s_i = 0$; в этом случае дополнительные условия (0.6) на S_i отсутствуют. Такие обратные задачи возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов распространения примесей и т. п. (см. библиографию и результаты в [1–8]). Среди близких работ отметим работы [4, 9–13], посвященные случаю $m = n - 1$, и работы [3, 14–16], посвященные случаю $m = 0$ (в этом случае $x'' = x$ и неизвестные коэффициенты зависят только от переменной t). Однако результаты данной работы, состоящие в том, что мы доказываем локальную по времени корректность поставленных обратных задач в пространствах Гёльдера, являются новыми даже в случаях $m = n - 1$ или $m = 0$, поскольку мы рассматриваем достаточно общую ситуацию. Ранее изучались в основном линейные или самые простые квазилинейные случаи, зачастую рассматриваемые уравнения были одномерны и их коэффициенты, как правило, не зависели от переменных x'' (см., например, [9–13]).

В разд. 1 работы содержатся точные постановки задач, условия на данные задачи и формулировка основных результатов (теоремы 1, 2), доказательство которых приведено в разд. 2.

1. Формулировка задачи и основные результаты

Мы используем пространства Гёльдера $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$ (см. определения в [17, 18]). С соответствующими уточнениями все результаты переносятся и на пространства Соболева $W_p^{s,s/2}(Q)$. Для $\beta, \gamma \in (0,1)$ положим

$$\langle v \rangle_{\beta,0} = \sup_{x_1,x_2 \in G, t \in (0,T)} |v(x_1,t) - v(x_2,t)|/|x_1 - x_2|^{\beta},$$

$$\langle v \rangle_{0,\gamma} = \sup_{t_1,t_2 \in (0,T), x \in G} |v(x,t_1) - v(x,t_2)|/|t_1 - t_2|^{\gamma},$$

$$\langle v \rangle_{\beta,\gamma} = \langle v \rangle_{\beta,0} + \langle v \rangle_{0,\gamma}, \quad \|v\|_{C^{\beta,\gamma}(\overline{Q})} = \|v\|_{C(\overline{Q})} + \langle v \rangle_{\beta,\gamma}.$$

Тогда норму в $C^{2+\beta,1+\gamma}(\overline{Q})$ можно определить так:

$$\|v\|_{C^{2+\beta,1+\gamma}(\overline{Q})} = \|v_t\|_{C^{\beta,\gamma}(\overline{Q})} + \sum_{|\alpha|=2} \|D^{\alpha} v\|_{C^{\beta,\gamma}(\overline{Q})} + \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{C^{1+\beta,\frac{1+\gamma}{2}}(\overline{Q})} + \|v\|_{C^{\beta,\gamma}(\overline{Q})}.$$

Рассмотрим функцию $a(x,t,u,p)$, где $(x,t) \in Q$ и $(u,p) \in U^R = (-R,R)^{n+1}$ ($u \in (-R,R), p \in (-R,R)^n$). Положим $Q^R = Q \times U^R$. По аналогии определяем нормы в $C^{\beta,\gamma,\delta}(\overline{Q^R})$, где параметр β отвечает гладкости по переменной x, параметр γ — гладкости по переменной t и, наконец, δ — гладкости по переменным $(u,p) \in U^R$. Для $\beta, \gamma, \delta \in (0,1)$ имеем

$$\langle v \rangle_{\beta,\gamma,\delta} = \langle v \rangle_{\beta,0,0} + \langle v \rangle_{0,\gamma,0} + \langle v \rangle_{0,0,\delta}, \quad \|v\|_{C^{\beta,\gamma,\delta}(\overline{Q^R})} = \|v\|_{C(\overline{Q^R})} + \langle v \rangle_{\beta,\gamma,\delta},$$

где полунормы $\langle v \rangle_{0,0,\delta}$, $\langle v \rangle_{\beta,0,0}$, $\langle v \rangle_{0,\gamma,0}$ определены по аналогии с вышеприведенными, в частности,

$$\langle a \rangle_{0,0,\delta} = \sup_{\substack{(u_1,p_1),(u_2\, p_2) \in U_R, \\ (x,t) \in Q}} |a(x,t,u_1,p_1) - a(x,t,u_2,p_2)|/(|u_1 - u_2|^2 + |p_1 - p_2|^2)^{\delta/2}.$$

Положим $s_0 = \sum\limits_{i=1}^{s} s_i + s$. Далее считаем, что L и $a(x,t,u,p)$ имеют следующую структуру:

$$Lu = \sum_{i=k+1}^{s_1'} q_i(x',t)L_i u + L_{s_1'+1}u,\ L_i u = \sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha^i(x,t)D^\alpha u(x,t), \quad k+1 \le i \le s_1'+1,$$

$$a(x,t,u,p) = \sum_{i=1}^{k} q_i(x',t)a_i(x,t,u,p) + a_0(x,t,u,p), \quad 0 \le k \le s_1',$$

где $s_1' = s_0$, если коэффициент $r(x,t)$ в уравнении известен (в этом случае полагаем, что $r(x,t)\equiv 1$), и $s_1' = s_0 - 1$, если коэффициент r неизвестен (в этом случае считаем, что он не зависит от переменной x'', положим $r(x',t) = q_{s_0}(x',t)$). В частности, если $m = 0$, то все коэффициенты q_i зависят только от t. Если $k = 0$, то $a = a_0$ и функция a не содержит неизвестных коэффициентов. Аналогично если $k = s_1'$, то $L = L_{s_1'+1}$ и тогда оператор L не содержит неизвестных коэффициентов. Сформулируем исследуемую задачу.

Задача I. *Найти коэффициенты* $q_i(x',t)$ $(i = 1,2,\dots,s_0)$ *и решение* u *уравнения* (0.1), *удовлетворяющее начально-краевым условиям* (0.2), (0.3) (*или* (0.2), (0.4)) *и условиям переопределения* (0.5), (0.6).

Область G и ее граница могут быть как конечными, так и бесконечными. Фиксируем $\alpha \in (0,1)$.

Предположение (A). В каждой точке $x_0 \in \Gamma$ граница имеет касательную плоскость и, более того, существует число $d > 0$ такое, что в локальной системе координат, полученной путем поворота и переноса начала координат из исходной таким образом, что ось y_n направлена по нормали к Γ в x_0, уравнение Γ имеет вид $y_n = \omega(y')$, где $y' = (y_1,\dots,y_{n-1})$ и $\omega \in C^{2+\alpha}(\overline{B_d})$ $(B_d = \{y' :\ |y'| < d\})$. При этом нормы всех функций ω в $C^{2+\alpha}(\overline{B}_d)$ ограничены одной и той же постоянной. В этом случае мы говорим (см. [17]), что Γ *принадлежит классу* $C^{2+\alpha}$.

Пусть $\{x_i\}$ — набор точек из (0.5), (0.6), $U_{\delta i} = \{x'' \in \mathbb{R}^{n-m} : |x'' - x_i''| < \delta\}$ $(i = 1,\dots,s)$.

Предположение (B). Существуют постоянная $\delta_0 > 0$ и область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с границей класса $C^{2+\alpha}$ такие, что $G \subset \Omega \times \mathbb{R}^{n-m}$, $\Omega \times U_{\delta_0 i} \subset G$ $\forall i$.

В случае $m = 0$ условие (B) выполнено, если все точки $x_i = x_i''$ — внутренние точки области G. Легко увидеть, что данных (0.5), (0.6) не хватает для определения коэффициентов, если условие (B) нарушено.

Положим $G_{\delta i} = \Omega\times U_{\delta i}$, $Q_\tau = G\times(0,\tau)$, $Q_{\delta i} = G_{\delta i}\times(0,T)$, $Q_{\delta i\tau} = G_{\delta i}\times(0,\tau)$, $Q_{\delta i}^R = Q_{\delta i}\times U^R$, $\Gamma_{\delta i} = \partial\Omega\times U_{\delta i}$, $S_{\delta i} = \Gamma_{\delta i}\times(0,T)$, $S_{\delta it} = \Gamma_{\delta i}\times(0,t)$, $\Gamma^0 = \partial\Omega$, $S^0 = \Gamma^0\times(0,T)$, $Q_\tau^0 = \Omega\times(0,\tau)$, $Q_\tau^R = Q_\tau\times U^R$, $S_\tau = \Gamma\times(0,\tau)$, $S_\tau^0 = \Gamma^0\times(0,\tau)$, $\nabla_{x''} = \big(\frac{\partial}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial}{\partial x_{m+2}},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\big)$. Символами ∂_{x_i}, $\partial^l_{x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_l}}$ обозначаем частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^l}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_l}}$ соответственно.

Предположение (C). Для всех $\delta < \delta_0$, $j = 1,2,\dots,s$, $p = 1,\dots,s_j$, $h = m+1,\dots,n$, $r,l = 1,\dots,n$, $i = 0,\dots,k$ и $\gamma = k+1,\dots,s_1'+1$ имеют место включения:

$$a_\beta^\gamma \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}), \quad \nabla_{x''}a_\beta^\gamma, \partial^2_{x_h x_{r_{jp}}} a_\beta^\gamma \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_{\delta j}}) \quad (|\beta| \le 2);$$

$$u_0 \in C^{2+\alpha}(\overline{G}), \quad \nabla_{x''} u_0, \partial^2_{x_h x_{r_{jp}}} u_0 \in C^{2+\alpha}(\overline{G_{\delta j}});$$

$$\forall R > 0 \quad a_i, a_{iu}, a_{ip_r} \in C^{\alpha,\alpha/2,\alpha}(\overline{Q^R}), \quad \nabla_{x''} a_i, \partial^2_{x_h x_{r_{jp}}} a_i \in C^{\alpha,\alpha/2,\alpha}\big(\overline{Q^R_{\delta j}}\big);$$

$$\forall R > 0 \quad a_{iuu}, a_{ip_r p_l}, a_{iup_r}, a_{x_h u}, a_{x_h p_r} \in C^{\alpha,\alpha/2,\alpha}\big(\overline{Q^R_{\delta j}}\big);$$

в случае краевого условия (0.3)

$$\varphi \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{S}), \quad \nabla_{x''}\varphi, \partial^2_{x_h x_{r_{jp}}}\varphi \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{S_{\delta j}});$$

в случае краевого условия (0.4)

$$l_0(x,t), \varphi \in C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{S}),\ \nabla_{x''}\varphi, \nabla_{x''} l_0(x,t), \partial^2_{x_h x_{r_{jp}}} l_0(x,t) \in C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{S_{\delta j}}),$$

и единичное некасательное на Γ векторное поле $l(x,t) = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ обладает тем свойством, что $l_i \equiv 0$ для $i \geq m+1$, для некоторой постоянной $\delta_1 > 0$ справедливо неравенство $\big|\sum\limits_i l_i(x,t) n_i\big| \geq \delta_1$ $\forall (x,t) \in S$ ($\vec{n} = (n_1, \dots, n_n)$ — единичная внешняя нормаль к S) и

$$l(x,t) \in C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{S}), \quad \nabla_{x''} l(x,t), \partial^2_{x_h x_{r_{jp}}} l(x,t) \in C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{S}_{\delta j}).$$

Приведем условия корректности. Пусть функции $u, q_i(x',t)$ таковы, что выполнено уравнение (0.1). Используя начальные и краевые условия и условия переопределения (0.5), (0.6), полагая $t=0,\ x''=x''_i$ (соответственно дифференцируя (0.1) и полагая $t=0,\ x''=x''_i$), получим при $s'_1 = s_0 - 1$, что

$$\begin{aligned}(-L_{s_0} u_0 - a_0(x,0,u_0,\nabla u_0))|_{x''=x''_i} &= -q_{s_0}(x',0)\varphi_{it}(x',0)\\ &+ \left(\sum_{p=k+1}^{s_0-1} q_p(x',0) L_p u_0 + \sum_{p=1}^{k} q_p(x',0) a_p(x,0,u_0,\nabla u_0)\right)\Bigg|_{x''=x''_i},\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}\partial_{x_{r_{il}}}(-L_{s_0} u_0 - a_0(x,0,u_0,\nabla u_0))|_{x''=x''_i} &= -q_{s_0}(x',0)\varphi_{ilt}(x',0)\\ &+ \partial_{x_{r_{il}}}\left(\sum_{p=k+1}^{s_0-1} q_p(x',0) L_p u_0 + \sum_{p=1}^{k} q_p(x',0) a_p(x,0,u_0,\nabla u_0)\right)\Bigg|_{x''=x''_i},\end{aligned} \tag{1.2}$$

и при $s'_1 = s_0$, что

$$\begin{aligned}\varphi_{it}(x',0) &- (L_{s_0+1} u_0 + a_0(x,0,u_0,\nabla u_0))|_{x''=x''_i}\\ &= \left(\sum_{p=k+1}^{s_0} q_p(x',0) L_p u_0 + \sum_{p=1}^{k} q_p(x',0) a_p(x,0,u_0,\nabla u_0)\right)\Bigg|_{x''=x''_i},\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{ilt}(x',0) &- \partial_{x_{r_{il}}}(L_{s_0+1} u_0 + a_0(x,0,u_0,\nabla u_0))|_{x''=x''_i}\\ &= \partial_{x_{r_{il}}}\left(\sum_{p=k+1}^{s_0} q_p(x',0) L_p u_0 + \sum_{p=1}^{k} q_p(x',0) a_p(x,0,u_0,\nabla u_0)\right)\Bigg|_{x''=x''_i}\end{aligned} \tag{1.4}$$

$(i = 1, 2, \dots, s,\ l = 1 \dots, s_i,\ x' \in \Omega)$.

Очевидно, что разрешимость систем (1.1), (1.2) (или соответственно (1.3), (1.4)) при $x' \in \Omega$ относительно величин $q_p(x',0) = q_{0p}(x')$ $(p = 1, \dots, s_0)$ есть необходимое условие разрешимости исходной обратной задачи. Правая часть систем (1.1), (1.2) (или соответственно (1.3), (1.4)) может быть записана в виде матрицы $A_0(x')$ с элементами $\{\alpha_{ij}(x')\}_{ij=1,\ldots,s_0}$, примененной к вектору $\vec{q_0} = (q_{01}, q_{02}, \ldots, q_{0s_0})$, соответственно сами системы могут быть записаны в виде

$$A_0(x')\vec{q_0} = \vec{g}, \tag{1.5}$$

где $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_{s_0})$ — левая часть в системах (1.1), (1.2) (или (1.3), (1.4)).

Положим $l(i) = i - s$ при $s+1 \le i \le s+s_1$ и $l(i) = i - s - \sum\limits_{r=1}^{p-1} s_r$ при $s + \sum\limits_{r=1}^{p-1} s_r + 1 \le i \le s + \sum\limits_{r=1}^{p} s_r$, $p = 2, \ldots, s$. Если $s_1' = s_0 - 1$, то матрица A_0 может быть записана в виде

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a_j(x,0,u_0,\nabla u_0)|_{x''=x_i''}, & 1 \le j \le k,\ 1 \le i \le s, \\ L_j u_0(x', x_i''), & k < j \le s_0 - 1,\ 1 \le i \le s, \\ -\varphi_{it}(x', 0). & j = s_0,\ 1 \le i \le s, \\ \partial_{x_{r_{1l(i)}}} a_j(x,0,u_0,\nabla u_0)|_{x''=x_1''}, & 1 \le j \le k,\ s+1 \le i \le s+s_1, \\ \partial_{x_{r_{1l(i)}}} L_j u_0(x)|_{x''=x_1''}, & k < j \le s_0 - 1,\ s+1 \le i \le s+s_1, \\ -\varphi_{1l(i)t}(x', 0), & j = s_0,\ s+1 \le i \le s+s_1, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \partial_{x_{r_{sl(i)}}} a_j(x,0,u_0,\nabla u_0)|_{x''=x_s''}, & 1 \le j \le k,\ s_0 - s_s + 1 \le i \le s_0, \\ x_{r_{sl(i)}} L_j u_0(x)|_{x''=x_s''}, & k < j \le s_0 - 1,\ s_0 - s_s + 1 \le i \le s_0, \\ -\varphi_{sl(i)t}(x', 0), & j = s_0,\ s_0 - s_s + 1 \le i \le s_0, \end{cases} \tag{1.6}$$

соответственно если $s_1' = s_0$, то

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a_j(x,0,u_0,\nabla u_0)|_{x''=x_i''}, & 1 \le j \le k,\ 1 \le i \le s, \\ L_j u_0(x', x_i''), & k+1 \le j \le s_0,\ 1 \le i \le s, \\ \partial_{x_{r_{1l(i)}}} a_j(x,0,u_0,\nabla u_0)|_{x''=x_1''}, & 1 \le j \le k,\ s+1 \le i \le s+s_1, \\ \partial_{x_{r_{1l(i)}}} L_j u_0|_{x''=x_1''}, & k+1 \le j \le s_0,\ s+1 \le i \le s+s_1, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \partial_{x_{r_{sl(i)}}} a_j(x,0,u_0,\nabla u_0)|_{x''=x_s''}, & 1 \le j \le k,\ s_0 - s_s + 1 \le i \le s_0, \\ \partial_{x_{r_{sl(i)}}} L_j u_0|_{x''=x_s''}, & k+1 \le j \le s_0,\ s_0 - s_s + 1 \le i \le s_0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Если $s_1' = s_0 - 1$, то правая часть в (1.5) может быть записана в виде

$$g_i = \begin{cases} (-L_{s_0} u_0 - a_0(x,0,u_0,\nabla u_0))|_{x''=x_i''}, & 1 \le i \le s, \\ \partial_{x_{r_{1l(i)}}} (-L_{s_0} u_0 - a_0(x,0,u_0,\nabla u_0))|_{x''=x_1''}, & s+1 \le i \le s+s_1, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \partial_{x_{r_{sl(i)}}} (-L_{s_0} u_0 - a_0(x,0,u_0,\nabla u_0))|_{x''=x_s''}, & s_0 - s_s + 1 \le i \le s_0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Соответственно, если $s_1'=s_0$, то

$$g_i=\begin{cases}\varphi_{it}(x',0)-(L_{s_0+1}u_0+a_0(x,0,u_0,\nabla u_0))|_{x''=x_i''}, & 1\le i\le s,\\ \varphi_{1l(i)t}(x',0)-\partial_{x_{r_{1l(i)}}}(L_{s_0+1}u_0+a_0(x,0,u_0,\nabla u_0))|_{x''=x_1''}, & \\ & s+1\le i\le s+s_1\\ \vdots & \vdots\\ \varphi_{sl(i)t}(x',0)-\partial_{x_{r_{sl(i)}}}(L_{s_0+1}u_0+a_0(x,0,u_0,\nabla u_0))|_{x''=x_s''}, & \\ & s_0-s_s+1\le i\le s_0.\end{cases}\tag{1.9}$$

Решение системы (1.5) должно существовать, и, кроме того, естественно потребовать, чтобы наша задача при $t=0$ была параболической.

Предположение (D). Существуют $m_0,M_0>0$ такие, что $m_0\le|\det A_0(x')|\le M_0$ для любого $x'\in\Omega$; если $s_1'=s_0-1$, то найдутся $m_1,M_1>0$ такие, что $m_1\le q_{0s_0}(x')\le M_1$ для любого $x'\in\Omega$; существуют $m_2,M_2>0$ такие, что

$$m_2|\xi|^2\le\sum_{p=k+1}^{s_1'+1}q_{0p}\sum_{|\beta|=2}a^p_\beta\xi^\beta\le M_2|\xi|^2$$

для любых $\xi\in\mathbb{R}^n$, $(x,t)\in Q$, где функции $q_{0p}(x')$ $(p=k+1,\dots,s_1')$ образуют решение системы (1.5) и $q_{0s_1'+1}\equiv 1$.

Нам осталось записать условия согласования. Пусть

$$B_0u=\sum_{i=k+1}^{s_1'}q_{0i}(x')L_iu+L_{s_1'+1}u,\ \ b_0(x,t,u,p)=\sum_{i=1}^{k}q_{0i}(x')a_i(x,t,u,p)+a_0(x,t,u,p).$$

Предположение (E). Для всех $j=1,\dots,s$, $p=1,\dots,s_j$ и $l=m+1,\dots,n$ в случае краевых условий (0.3)

$$r\varphi(x,0)=u_0|_\Gamma,\quad \varphi_j(x',t)|_{S^0}=\varphi(x',x_j'',t)|_{S^0},\quad \varphi_j(x',0)=u_0(x',x_j''),\tag{1.10}$$

$$r\varphi_{jp}(x',t)|_{S^0}=\partial_{x_{r_{jp}}}\varphi(x',x_j'',t)|_{S^0},\quad \varphi_{jp}(x',0)=\partial_{x_{r_{jp}}}u_0(x)|_{x''=x_j''},\tag{1.11}$$

$$r\varphi_t(x,0)=B_0u_0|_\Gamma+b_0(x,0,u_0,\nabla u_0)|_\Gamma,\tag{1.12}$$

$$r\varphi_{tx_l}(x,0)|_{\Gamma_{\delta_0 j}}=\partial_{x_l}(B_0u_0+b_0(x,0,u_0,\nabla u_0))|_{\Gamma_{\delta_0 j}},\tag{1.13}$$

$$r\varphi_{tx_lx_{r_{jp}}}(x,0)|_{\Gamma_{\delta_0 j}}=\partial^2_{x_lx_{r_{jp}}}(B_0u_0+b_0(x,0,u_0,\nabla u_0))|_{\Gamma_{\delta_0 j}}\tag{1.14}$$

и в случае краевых условий (0.4)

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_0}{\partial l}+l_0u_0|_\Gamma=\varphi(x,0)|_\Gamma,\quad \frac{\partial\varphi_j}{\partial l}+l_0\varphi_j(x',t)|_{S^0}=\varphi(x',x_j'',t)|_{S^0},\\ \varphi_j(x',0)=u_0(x',x_j''),\end{gathered}\tag{1.15}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi_{jp}}{\partial l}+\frac{\partial\varphi_j}{\partial l'}+l_0\varphi_{jp}(x',t)+l_{0x_{r_{jp}}}\varphi_j|_{S^0}=\varphi_{x_{r_{jp}}}(x',x_j'',t)|_{S^0},\\ \varphi_{jp}(x',0)=\partial_{x_{r_{jp}}}u_0(x)|_{x''=x_j''},\end{gathered}\tag{1.16}$$

где l' — вектор с координатами $(l_{1x_{r_{jp}}},l_{2x_{r_{jp}}},\dots,l_{nx_{r_{jp}}})$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A)–(E). *Тогда для некоторого числа* $t^* > 0$ *такого, что* $t^* \le T$, *на промежутке* $[0, t^*]$ *существует единственное решение* $u(x,t)$, $q_1(x',t), \ldots, q_{s_0}(x',t)$ *задачи* I *такое, что*

$$u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{t^*}}), \quad \nabla_{x''}u, \partial^2_{x_l x_{r_{ip}}} u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i t^*}}),\ q_j \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q^0_{t^*}})$$

$$\forall \delta_1 < \delta_0, \quad i = 1,2,\ldots,s,\ p = 1,\ldots,s_i,\ l = m+1,\ldots,n,\ j = 1,2,\ldots,s_0.$$

Рассмотрим далее линейную ситуацию $s_1' = s_0$, $k = s_0$, $Lu = L_{s_0+1}u = B_0 u$,

$$a_i(x,t,u,\nabla u) = a_i(x,t)\ (i = 0,1,\ldots,s_0), \quad a = \sum_{i=1}^{s_0} a_i(x,t) q_i(x',t) + a_0(x,t). \quad (1.17)$$

Чтобы получить разрешимость в целом, усилим условие (D). Определим матрицу $A = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{s_0}$ с элементами

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a_j(x', x_i'', t), & 1 \le i \le s,\ 1 \le j \le s_0, \\ \partial_{x_{r_{1,l(i)}}} a_j(x,t)|_{x''=x_1''}, & s+1 \le i \le s+s_1,\ 1 \le j \le s_0, \\ \partial_{x_{r_{2,l(i)}}} a_j(x,t)|_{x''=x_2''}, & s+1+s_1 \le i \le s+s_1+s_2,\ 1 \le j \le s_0, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \partial_{x_{r_{s,l(i)}}} a_j(x,t)|_{x''=x_s''}, & s_0 - s_s + 1 \le i \le s_0,\ 1 \le j \le s_0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Нетрудно увидеть, что $A(x',0) = A_0(x')$.

Предположение ($\mathbf{D'}$). Существуют $m_0', M_0' > 0$ такие, что $m_0' \le |\det A(x',t)| \le M_0'$ для любого $(x',t) \in \overline{Q^0_T}$.

Теорема 2. *Пусть* $s_1' = s_0 = k$, $L = L_{s_0+1}$ *и функция* a *определена равенством* (1.17). *Предположим также, что выполнены условия* (A)–(E), *причем вместо первых двух условий в* (D) *потребуем, чтобы было выполнено* (D′). *Тогда существует единственное решение* $u(x,t)$, $q_1(x',t), \ldots, q_{s_0}(x',t)$ *задачи* I *такое, что*

$$u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}), \quad \nabla_{x''}u, \partial^2_{x_l x_{r_{ip}}} u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i}}), \quad q_j \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q^0_T})$$

$$\forall \delta_1 < \delta_0,\ i = 1,2,\ldots,s,\ p = 1,\ldots,s_i,\ l = m+1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,s_0.$$

2. Доказательство основных результатов

Приведем некоторые вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть* $v(x,t) \in C^{\beta,\beta/2}(\overline{Q_\gamma})$ $(\beta \in (0,1))$ *и* $v(x,0) = 0$. *Тогда существует постоянная* $c(\alpha,\beta)$ *такая, что при* $0 \le \alpha < \beta$

$$\|v\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\gamma})} \le c(\alpha,\beta)\gamma^{(\beta-\alpha)/2}\|v\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{Q_\gamma})}.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из интерполяционных неравенств и определения нормы в пространстве Гёльдера.

Лемма 2. *Пусть* $\tilde{g}(x,t,u,\nabla u) = g(x,t,u+\Phi,\nabla(u+\Phi)) - g(x,t,\Phi,\nabla\Phi)$, *где* $u,\Phi \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_\gamma})$ $(\alpha \in (0,1))$, $u(x,0)=0$ *и функция* $g(x,t,u,\nabla u)$ *удовлетворяет тем же условиям, что и функции* a_i *в* (C). *Тогда существует постоянная* $c(\alpha)$ *такая, что*

$$\|\tilde{g}\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\gamma})} \le c(\alpha)\Bigg[\langle g_u\rangle_{\alpha,\alpha/2,0} + \sum_{i=1}^{n}\langle g_{p_i}\rangle_{\alpha,\alpha/2,0}\Bigg(\langle g_u\rangle_{0,0,\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\langle g_{p_i}\rangle_{0,0,\alpha}\Bigg) \times \big(\|u\|^{\alpha}_{C^{2,1}(\overline{Q_\gamma})} + \|\Phi\|^{\alpha}_{C^{2,1}(\overline{Q_\gamma})}\big)\Bigg]\gamma^{1/2}\|u\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_\gamma})}. \quad (2.1)$$

Доказательство. Для доказательства используем представление

$$\tilde{g} = \int_0^1 \Bigg[g_u(x,t,\Phi+\tau u,\nabla\Phi+\tau\nabla u)u + \sum_{i=1}^{n} g_{p_i}(x,t,\Phi+\tau u,\nabla\Phi+\tau\nabla u)u_{x_i}\Bigg]\,d\tau,$$

лемму 1 и определение нормы в пространстве Гёльдера.

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$u_t - Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \quad (2.2)$$

где L — эллиптический оператор с коэффициентами класса $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$.

Лемма 3 (см. [17, 18]). *Пусть* $\Gamma \in C^{2+\alpha}$, $u_0 \in C^{2+\alpha}(\overline{G})$, $\varphi \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{S})$, $f \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$ *и выполнены соответствующие условия согласования (первое из равенств* (1.10) *и равенство* (1.12), *где в правой части стоит* $Lu_0 + f(x,0)$, *в случае краевых условий* (0.3) *и первое из равенств* (1.15) *в случае условия* (0.4)). *Тогда существует единственное решение* u *задачи* (2.2), (0.2), (0.3) ((2.2), (0.2), (0.4)) *из класса* $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})$ *такое, что для некоторой постоянной* c, *не зависящей от параметра* t_0, *справедлива оценка*

$$\|u\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{t_0}})} \le c(\|f\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_{t_0}})} + \|u_0\|_{C^{2+\alpha}(\overline{G})} + \|\varphi\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{S_{t_0}})})$$

$$(\|u\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{t_0}})} \le c(\|f\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_{t_0}})} + \|u_0\|_{C^{2+\alpha}(\overline{G})} + \|\varphi\|_{C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{S_{t_0}})})).$$

Предполагая, что условия теоремы 1 выполнены, рассмотрим уравнение

$$r(x')\Phi_t - B_0\Phi = b_0(x,t,\Phi,\nabla\Phi), \quad (x,t) \in Q, \quad (2.3)$$

где оператор B_0 и функция b_0 определены перед условием (E), $r(x') \equiv 1$, если $s_1' = s_0$, и $r(x',t) = q_{0s_0}(x')$, если $s_1' = s_0 - 1$. В силу второго соотношения в (D) $r(x') \ge m_1$ в Ω и нетрудно убедиться, что

$$r(x'), q_{0i}(x') \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}), \quad i = 1,\dots,s_0. \quad (2.4)$$

Лемма 4. *При выполнении условий теоремы* 1 *найдется число* t_1^* *такое, что при* $t \le t_1^*$ *существует единственное решение задачи* (2.3), (0.2), (0.3) *(или* (0.4)) *из класса* $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{t_1^*}})$ *такое, что при* $j = 1,2,\dots,s$ *и* $\delta < \delta_0$

$$\nabla_{x''}\Phi \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{\delta j t_1^*}}), \quad \partial^2_{x_h x_{r_{jp}}}\Phi \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{\delta j t_1^*}}),$$

$$h = m+1,\dots,n, \quad p = 1,\dots,s_j.$$

Доказательство. Первая часть утверждения фактически получена в классических работах П. Е. Соболевского, Э. Гальярдо, А. Фридмана, М. Жевре и ряда других авторов. Достаточно полная библиография и описание результатов имеются в книге [17]. Вторая половина утверждения о дополнительной гладкости решений вытекает из результатов внутренней гладкости решений параболических уравнений, изложенных в [17].

Доказательство теоремы 1. (а) Построение системы уравнений для функций q_i. Рассмотрим случай $s_0' = s_0$, т. е. $r(x,t) \equiv 1$. Второй случай рассматривается аналогично. Пусть q_{0i} — решения системы (1.5) и Φ — функция, построенная в лемме 4. Функция Φ определена на некотором промежутке $[0, t_1^*]$, зависящем от данных задачи. Поэтому далее считаем, что $t \le t_1^*$. Ищем решение задачи I в виде

$$u(x,t) = \Phi(x,t) + v(x,t), \quad \vec{q} = \vec{q}_0 + \vec{q}_1, \ \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_{s_0}), \ \vec{q}_1 = (q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1s_0}). \tag{2.5}$$

Подставляя разложение (2.5) в (0.1)–(0.4), получим

$$v_t - B_0 v = B_1 v + \tilde{b}_0(x,t,v,\nabla v) + \tilde{b}_1(x,t,v,\nabla v) + B_1\Phi + b_1(x,t,\Phi,\nabla\Phi), \tag{2.6}$$

где $\tilde{b}_i = b_i(x,t,v+\Phi,\nabla v + \nabla\Phi) - b_i(x,t,\Phi,\nabla\Phi)$ $(i = 0,1)$ и

$$B_1 v = \sum_{i=k+1}^{s_0} q_{1i}(x',t) L_i v, \quad b_1(x,t,u,p) = \sum_{i=1}^{k} q_{1i} a_i(x,t,u,p), \qquad (x,t) \in Q, \quad u \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{R}^n. \tag{2.7}$$

Кроме того, имеем

$$v|_{t=0} = 0, \quad v|_S = 0 \quad (\text{или} \quad \frac{\partial v}{\partial l} + l_0(x,t) v|_S = 0), \tag{2.8}$$

$$v|_{S_i} = \varphi_i - \Phi(x', x_i'', t) = \widetilde{\varphi}_i, \tag{2.9}$$

$$v_{x_{k_{ir}}}|_{S_i} = \varphi_{ir}(x',t) - \Phi_{x_{k_{ir}}}(x', x_i'', t) = \widetilde{\varphi}_{ir} \quad \forall r = 1,2,\dots,s_i, \ i = 1,2,\dots,s. \tag{2.10}$$

Пусть операторы B_0, B_1 имеют вид

$$B_p v = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^p(x,t) v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i^p v_{x_i} + a_0^p v, \quad p = 0,1.$$

Положим

$$B_p^1 v = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^p(x,t) v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} a_i^p v_{x_i} + a_0^p v, \quad B_p^2 v = B_p v - B_p^1 v, \quad p = 0,1.$$

По аналогии определим также операторы L_j^1, L_j^2 $(j = k+1, \dots, s_0+1)$; по построению операторы L_j^1 содержат производные только по переменным x'. Перепишем (2.6) в виде

$$v_t - B_0^1 v - B_0^2 v - \tilde{b}_0(x,t,v,\nabla v) - \tilde{b}_1(x,t,v,\nabla v) - B_1^2 v = B_1^1(\Phi + v) + B_1^2\Phi + b_1(x,t,\Phi,\nabla\Phi). \tag{2.11}$$

Положим в (2.11) $x'' = x_i''$ $(i = 1,2,\dots,s)$. Получим

$$\widetilde{\varphi}_{it} - B_0^1 \widetilde{\varphi}_i - \big(B_0^2 v + \tilde{b}_0(x,t,v,\nabla v) + \tilde{b}_1(x,t,v,\nabla v) + B_1^2 v\big)\big|_{x''=x_i''} = B_1^1 \varphi_i + \big[B_1^2\Phi + b_1(x,t,\Phi,\nabla\Phi)\big]\big|_{x''=x_i''}. \tag{2.12}$$

Дифференцируя (2.11) по переменной $x_{r_{ip}}$ и полагая $x'' = x''_i$, имеем

$$\widetilde{\varphi}_{ipt} - B_0^1\widetilde{\varphi}_{ip} - B^1_{0x_{r_{ip}}}\widetilde{\varphi}_i - \partial_{x_{r_{ip}}}\big(B_0^2 v + \tilde{b}_0(x,t,v,\nabla v) + \tilde{b}_1(x,t,v,\nabla v) + B_1^2 v\big)\big|_{x''=x''_i}$$
$$= B_1^1\varphi_{ip} + B^1_{1x_{r_{ip}}}\varphi_i + \partial_{x_{r_{ip}}}\big(B_1^2\Phi + b_1(x,t,\Phi,\nabla\Phi)\big)\big|_{x''=x''_i}, \quad (2.13)$$

где $B^1_{0x_{r_{ip}}}, B^1_{1x_{r_{ip}}}$ — операторы B_0^1, B_1^1, все коэффициенты которых продифференцированы по переменной $x_{r_{ip}}$. Правая часть в равенствах (2.12), (2.13) может быть записана в виде $A(x',t)\vec{q}_1$, где $A = \{\beta_{ij}(x',t)\}$ — некоторая матрица, зависящая от известных функций $\Phi, \varphi_i, \varphi_{ip}$. Имеем

$$\beta_{ij} = \begin{cases} a_j(x,t,\Phi,\nabla\Phi)|_{x''=x''_i}, & 1 \le j \le k,\ 1 \le i \le s, \\ L_j^1\varphi_i(x',t) + L_j^2\Phi(x',x''_i,t), & k+1 \le j \le s_0,\ 1 \le i \le s, \\ (a_j(x,t,\Phi,\nabla\Phi))_{x_{r_{1l(i)}}}|_{x''=x''_1}, & 1 \le j \le k,\ s+1 \le i \le s+s_1, \\ L_j^1\varphi_{1l(i)} + L^1_{jx_{r_{1l(i)}}}\varphi_i + \big(L_j^2\Phi\big)_{x_{r_{1l(i)}}}|_{x''=x''_1}, & \\ & k+1 \le j \le s_0,\ s+1 \le i \le s+s_1, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ (a_j(x,t,\Phi(x,t),\nabla\Phi(x,t)))_{x_{r_{sl(i)}}}|_{x''=x''_s}, & \\ & 1 \le j \le k,\ s_0 - s_s + 1 \le i \le s_0, \\ L_j^1\varphi_{sl(i)} + L^1_{jx_{r_{sl(i)}}}\varphi_i + \big(L_j^2\Phi\big)_{x_{r_{sl(i)}}}|_{x''=x''_s}, & \\ & k+1 \le j \le s_0,\ s_0 - s_s + 1 \le i \le s_0. \end{cases}$$

Левая часть представляется в виде суммы векторов $\vec{r}_1(x',t) + B(\vec{q}_1)$ с координатами

$$r_{1i} = \begin{cases} \widetilde{\varphi}_{it} - B_0^1\widetilde{\varphi}_i, & 1 \le i \le s, \\ \widetilde{\varphi}_{1l(i)t} - B_0^1\widetilde{\varphi}_{1l(i)} - B^1_{0x_{r_{1l(i)}}}\widetilde{\varphi}_1, & s+1 \le i \le s+s_1, \\ \widetilde{\varphi}_{2l(i)t} - B_0^1\widetilde{\varphi}_{2l(i)} - B^1_{0x_{r_{2l(i)}}}\widetilde{\varphi}_2, & s+1+s_1 \le i \le s+s_1+s_2, \\ \vdots, & \vdots, \\ \widetilde{\varphi}_{sl(i)t} - B_0^1\widetilde{\varphi}_{sl(i)} - B^1_{0x_{r_{sl(i)}}}\widetilde{\varphi}_s, & s_0+1-s_s \le i \le s_0, \end{cases}$$

$$(B(\vec{q}_1))_i = \begin{cases} -\big((B_0^2 + B_1^2)v + (\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1)(x,t,v,\nabla v)\big)\big|_{x''=x''_i}, & 1 \le i \le s, \\ -\partial_{x_{r_{1l(i)}}}\big((B_0^2 + B_1^2)v + (\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1)(x,t,v,\nabla v)\big)\big|_{x''=x''_1}, & \\ & s+1 \le i \le s+s_1, \\ -\partial_{x_{r_{2l(i)}}}\big((B_0^2 + B_1^2)v + (\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1)(x,t,v,\nabla v)\big)\big|_{x''=x''_2}, & \\ & s+1+s_1 \le i \le s+s_1+s_2, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ -\partial_{x_{r_{sl(i)}}}\big((B_0^2 + B_2^2)v + (\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1)(x,t,v,\nabla v)\big)\big|_{x''=x''_s}, & \\ & s_0+1-s_s \le i \le s_0. \end{cases}$$

Полагая в (2.12), (2.13) $t = 0$ и используя условия согласования, получим

$$B_1^1\varphi_i + B_1^2\Phi + b_1(x,t,\Phi,\nabla\Phi)|_{x''=x''_i,t=0} = B_1 u_0 + b_1(x,0,u_0,\nabla u_0)|_{x''=x''_i},$$

$$\partial_{x_{r_{ip}}}\big(B_1^1\varphi_i+B_1^2\Phi+b_1(x,t,\Phi,\nabla\Phi)\big)\big|_{x''=x_i'',t=0}=\partial_{x_{r_{ip}}}(B_1u_0+b_1(x,0,u_0,\nabla u_0))|_{x''=x_i''}.$$

Сравнивая полученные выражения с правой частью системы (1.3), (1.4), видим, что $A(x',0)=A_0$. Элементы матрицы $A(x',t)-A_0(x')$ допускают оценку вида $ct^{1/2}$, причем постоянная c не зависит от x'. В силу условия (D) существует $t_2^*\le t_1^*$ такое, что

$$m_0/2\le|\det A(x',t)|\le 2M_0\quad\forall x'\in\Omega\ \forall t\in[0,t_2^*]. \tag{2.14}$$

Кроме того, в силу условий согласования и определения величин q_{0i} будет $\vec r_1(x',0)=0$. Таким образом, равенства (2.12), (2.13) можем записать в виде системы

$$A(x',t)\vec q_1(x',t)=\vec g_1=\vec r_1+B(\vec q_1)(x',t),\quad \vec g_1|_{t=0}=0,\quad (x',t)\in Q^0_{t_2^*}, \tag{2.15}$$

или в виде системы

$$\vec q_1=A^{-1}(\vec r_1(x',t))+A^{-1}B(\vec q_1)=C(\vec q_1),\quad (x',t)\in Q^0_{t_2^*}. \tag{2.16}$$

(b) Разрешимость системы (2.16). Для простоты предполагаем, что G — ограниченная область. В общем случае теорема Шаудера, использованная ниже, заменяется теоремой о неподвижной точке и рассуждения немного усложняются. Положим $r(t^*)=\|A^{-1}(\vec r_1(x',t))\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q^0_{t^*}})}$. Вектор-функцию $\vec q_1$ ищем в шаре $B(t_3^*)=\big\{\vec q_1\in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{Q^0_{t_3^*}}\big):\vec q_1(x',0)=0,\ \|\vec q_1\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q^0_{t_3^*}})}\le 2r(t^*)\big\}$, где параметры t_3^*,t^* ($t_3^*\le t^*\le t_2^*$) определим позже. В силу леммы 3 найдется постоянная c_0 такая, что

$$\|v_t-B_0v\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\tau})}\ge c_0\|v\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_\tau})} \tag{2.17}$$

для всех v, удовлетворяющих краевым условиям (2.8) и $\tau\in(0,T]$. В силу леммы 1 оператор B_1v допускает оценку

$$\|B_1v\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\tau})}\le c_1\|v\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_\tau})}\tau^{\alpha/2}\|\vec q_1\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q^0_\tau})}, \tag{2.18}$$

где без ограничения общности считаем, что постоянная c_1 не зависит от $\tau\le T$. Выберем постоянную t^* исходя из условия

$$2c_1r(t^*)(t^*)^{\alpha/2}\le c_0/2 \tag{2.19}$$

и таким образом, чтобы

$$m_2|\xi|^2/2\le\sum_{p=k+1}^{s_1'+1}(q_{0p}+q_{1p})\sum_{|\beta|=2}a^p_\beta\xi^\alpha\le 2M_2|\xi|^2\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^n,\quad q_{0s_1'+1}=q_{1s_1'+1}\equiv1, \tag{2.20}$$

для всех $\vec q_1\in B(t^*)$. В этом случае в силу теоремы о неподвижной точке оператор $Lv=v_t-B_0v-B_1v$ с областью определения $D(L)$, состоящей из функций из $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_\tau})$, удовлетворяющих (2.8), обратим при всех $\tau\le t^*$ и $\vec q_1\in B(\tau)$ и справедлива оценка

$$\|v_t-B_0v-B_1v\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\tau})}\ge\frac{c_0}{2}\|v\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_\tau})}.$$

Тогда уравнение (2.6) может быть переписано в виде

$$v=L^{-1}(\tilde b_0(x,t,v,\nabla v)+\tilde b_1(x,t,v,\nabla v)+B_1\Phi+b_1(x,t,\Phi,\nabla\Phi))=C_1(v). \tag{2.21}$$

Для доказательства разрешимости уравнения (2.21) используем теорему Шаудера. Приведем оценки для функции v. Имеем

$$\|L^{-1}(B_1\Phi + b_1(x,t,\Phi,\nabla\Phi))\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_\tau})}$$
$$\le \frac{2}{c_0}(\|B_1\Phi\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\tau})} + \|b_1\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\tau})}) \le c_2\|\vec{q}_1\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q^0_\tau})} \le 2c_2 r(t^*) = r_0, \tag{2.22}$$

где постоянная c_2 не зависит от τ. Ищем решение уравнения (2.21) в классе $B_\tau = \{v \in D(L) : \|v\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_\tau})} \le 2r_0\}$, где параметр τ мы подберем ниже. В силу леммы 2 имеем

$$\|\tilde{b}_0(x,t,v,\nabla v)\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\tau})} \le c_3(r_0)\tau^{1/2}\|v\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_\tau})} \le c_4(r_0)\tau^{1/2}. \tag{2.23}$$

Можно считать, что постоянные c_3, c_4 не зависят от $\tau \le t^*$. Аналогично

$$\|\tilde{b}_1(x,t,v,\nabla v)\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\tau})} \le \tau^{1/2}c_5(r_0)r_0 r(t^*) = \tau^{1/2}c_6(r_0). \tag{2.24}$$

Используя (2.23), (2.24), получим оценку

$$\|C_1(v)\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_\tau})} \le \tau^{1/2}c_7 + r_0 \le 2r_0,$$

если

$$\tau \le t_4^* = \min((r_0/c_7)^2, t^*). \tag{2.25}$$

Тогда оператор $C_1(v)$ будет переводить шар B_τ в себя и вполне непрерывен. Следовательно, уравнение (2.21) имеет решение из этого шара при всех $\vec{q}_1 \in B(\tau)$. Единственность решения очевидна в силу известных свойств параболических уравнений. Таким образом, при выполнении (2.19), (2.20) и (2.25) уравнение (2.21) имеет единственное решение из шара B_τ на промежутке $[0,\tau]$ при всех $\vec{q}_1 \in B(\tau)$. Решение v удовлетворяет оценке

$$\|v\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_\tau})} \le 4c_2 r(t^*) = 2r_0. \tag{2.26}$$

Далее считаем, что $\tau \le t_4^*$. Дифференцируя (2.6) по x_j с $j \ge m+1$ и затем по $x_{r_{ip}}$ и используя свойства локальной гладкости решений параболических уравнений (см. [17]), получим, что при $\delta_1 < \delta_0$, $l = m+1,\dots,n$ и $i = 1,\dots,s$

$$\nabla_{x''}v \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i\tau}}),\quad \partial^2_{x_l x_{r_{ip}}}v \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i\tau}}),\quad p = 1,\dots,s_i, \tag{2.27}$$

$$\|\nabla_{x''}v\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i\tau}})} \le c_8(r_0), \tag{2.28}$$

$$\left\|\partial^2_{x_l x_{r_{ip}}}v\right\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i\tau}})} \le c_9(r_0). \tag{2.29}$$

Покажем, что при подходящем выборе τ оператор $C(\vec{q}_1)$ переводит множество $B(\tau)$ в себя. Используя полученные оценки (2.26), (2.28), (2.29), при $\tau \le t_4^*$ имеем

$$\|C(\vec{q}_1)\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q^0_\tau})} \le r(t^*) + \|A^{-1}B(\vec{q}_1)\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q^0_\tau})} \le r(t^*) + c_{10}\|B(\vec{q}_1)\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q^0_\tau})}, \tag{2.30}$$

где c_{10} — постоянная. Оценим величину $\|B(\vec{q}_1)\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q^0_\tau})}$. Фиксируем $\delta_1 < \delta$. Тогда

$$\left\|(B_0^2 + B_1^2)v(x', x_i'', t)\right\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q^0_\tau})}$$
$$\le (c_{11} + c_{12}r(t^*))\left(\sum_{h=1}^{n}\sum_{p=m+1}^{n}\|v_{x_h x_p}(x,t)\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i\tau}})}\right.$$
$$\left. + \sum_{p=m+1}^{n}\|v_{x_p}(x,t)\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i\tau}})}\right),\quad 1 \le i \le s. \tag{2.31}$$

В силу принадлежности $\nabla_{x''}v \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i\tau}})$ для $i = 1,\dots,s$ получим, что $v_{x_h x_p} \in C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q_{\delta_1 i\tau}})$. По лемме 1

$$\begin{aligned}\|v_{x_h x_p}(x,t)\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i\tau}})} &\le c_{12}\tau^{1/2}\|v_{x_h x_p}(x,t)\|_{C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q_{\delta_1 i\tau}})}\\ &\le c_{13}\tau^{1/2}\|\nabla_{x''}v\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i\tau}})} \le c_{14}\tau^{1/2},\end{aligned} \tag{2.32}$$

где c_{14} — постоянная, зависящая от величин $r(t^*), r_0$. Аналогично

$$\|v_{x_p}(x,t)\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i\tau}})} \le c_{15}\tau^{1/2}\|v\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i\tau}})} \le 2c_{15}\tau^{1/2}. \tag{2.33}$$

Из (2.31)–(2.33) заключаем, что

$$\big\|\big(B_0^2 + B_1^2\big)v(x', x_i'', t)\big\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\tau^0})} \le c_{16}\tau^{1/2}. \tag{2.34}$$

В силу оценок (2.23), (2.24), (2.32), (2.33) имеем

$$\|(B(\vec{q}_1))_i\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\tau^0})} \le c_{17}\tau^{1/2}. \tag{2.35}$$

Пусть $i \ge s+1$. Аналогично, поскольку $\nabla_{x''}v \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i\tau}})$, $v_{x_p x_{r_{jl}}} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 i\tau}})$ ($p = m+1,\dots,n$, $j = 1,\dots,s$, $l = 1,2,\dots,s_j$), в силу леммы 1, (2.28) и (2.29)

$$\begin{aligned}\big\|\partial_{x_{r_{jl}}}(B_0^2+B_1^2)v\big|_{x''=x_j''}\big\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\tau^0})} &\le c_{18}\Bigg(\sum_{h=1}^{n}\sum_{p=m+1}^{n}\|v_{x_h x_p x_{r_{jl}}}(x,t)\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 j\tau}})}\\ &+\sum_{h=1}^{n}\sum_{p=m+1}^{n}\|v_{x_h x_p}(x,t)\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 j\tau}})} + \sum_{p=m+1}^{n}\|v_{x_p}(x,t)\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_{\delta_1 j\tau}})}\Bigg) \le c_{19}\tau^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.36}$$

Используя (2.28), (2.29), леммы 1 и 2, получим

$$\|\partial_{x_{r_{jl}}}(\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1)(x,t,v,\nabla v)\big|_{x''=x_j''}\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\tau^0})} \le c_{20}\tau^{1/2}, \quad j = 1,\dots,s,\ l = 1,\dots,s_j. \tag{2.37}$$

Из (2.35)–(2.37) вытекает оценка $\|B(\vec{q}_1)\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\tau^0})} \le c_{21}\tau^{1/2}$, а из (2.30) —

$$\|C(\vec{q}_1)\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\tau^0})} \le r(t^*) + c_{10}c_{21}\tau^{1/2}. \tag{2.38}$$

Выберем $t_3^* \le t_4^*$ таким образом, чтобы $c_{10}c_{21}(t_3^*)^{1/2} \le r(t^*)$. Тогда в силу (2.38) оператор $C(\vec{q}_1)$ переводит множество $B(t_3^*)$ в себя. При получении оценок (2.32) и других выше мы видели, что $B(\vec{q}_1) \in C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}\big(\overline{Q_\tau^0}\big)$ при $\vec{q}_1 \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{Q_\tau^0}\big)$ и в силу компактности вложения $C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}\big(\overline{Q_\tau^0}\big) \subset C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{Q_\tau^0}\big)$ операторы $B(\vec{q}_1)$ и $C(\vec{q}_1)$ компактны и непрерывны и, значит, система (2.16) разрешима на промежутке $[0, t_3^*]$.

(c) Разрешимость исходной задачи. Пусть $\vec{q}_1$ — решение (2.16). Определим функцию v как решение параболической задачи (2.6), (2.8). Покажем, что функция v удовлетворяет условиям (2.9), (2.10). Вначале рассмотрим случай краевых условий (0.3). Полагая в (2.11) $x'' = x_i''$, имеем

$$\begin{aligned}v_t(x', x_i'', t) - B_0^1 v(x', x_i'', t) &- \big(B_0^2 v + \tilde{b}_0(x,t,v,\nabla v) + \tilde{b}_1(x,t,v,\nabla v) + B_1^2 v\big)\big|_{x''=x_i''}\\ &= B_1^1 v(x', x_i'', t) + \big(B_1^1\Phi + B_1^2\Phi + b_1(x,t,\Phi,\nabla\Phi)\big)\big|_{x''=x_i''}.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Вычитая (2.39) из (2.12) и полагая, что $v(x', x_i'', t) - \widetilde{\varphi}_i(x', t) = \varphi_{0i}$, получим, что

$$\varphi_{0it}(x', t) - \left(B_0^1 + B_1^1\right)\varphi_{0i}(x', t) = 0, \quad \varphi_{0i}(x', 0) = 0, \ \varphi_{0i}|_{S^0_{t_3^*}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \tag{2.40}$$

где $(x', t) \in Q^0_{t_3^*}$. В силу единственности решений первой начально-краевой задачи $\varphi_{0i} = 0 \ \forall i$, т. е. $v(x', x_i'', t) = \widetilde{\varphi}_i(x', t)$ при всех (x', t) и, значит, выполнено условие (2.9). Дифференцируя (2.11) по переменной $x_{r_{ip}}$ и полагая $x'' = x_i''$ и $\partial_{x_{r_{ip}}} v(x', x_i'', t) = \widehat{\varphi}_{ip}$, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{ipt} - B_0^1\widehat{\varphi}_{ip} - B^1_{0x_{r_{ip}}}\widetilde{\varphi}_i - \partial_{x_{r_{ip}}}\left(B_0^2 v + \tilde{b}_0(x, t, v, \nabla v) + \tilde{b}_1(x, t, v, \nabla v) + B_1^2 v\right)\big|_{x''=x_i''} \\ = B_1^1\widehat{\varphi}_{ip} + B^1_{1x_{r_{ip}}}\widetilde{\varphi}_i + \partial_{x_{r_{ip}}}\left(B_1^1\Phi + B_1^2\Phi + b_1(x, t, \Phi, \nabla\Phi)\right)\big|_{x''=x_i''}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Вычитая (2.41) из (2.13), получим, что функция $\widehat{\varphi}_{ipt} - \widetilde{\varphi}_{ip}(x', t) = \varphi_{0ip}$, равно как и функция φ_{0i}, есть решение задачи (2.40) и тем самым $\varphi_{0ip} = 0 \ \forall i, p$. Это означает, что выполняется условие (2.10). Перейдем к условию (0.4). В этом случае условие Дирихле в (2.40) заменяется условием

$$\frac{\partial\varphi_{0i}}{\partial l} + l_0(x, t)\varphi_{0i}|_{S^0_{t_3^*}} = 0$$

и вновь ввиду единственности выполняется условие (2.9). Дифференцируя (2.11) по переменной $x_{r_{ip}}$ и полагая $x'' = x_i''$, снова придем к уравнению (2.41) относительно функции $\widehat{\varphi}_{ip}$. Вместо условий Дирихле получим условие

$$\frac{\partial\widehat{\varphi}_{ip}}{\partial l} + l_0(x, t)\widehat{\varphi}_{ip}|_{S^0_{t_3^*}} = 0,$$

в силу которого выполнено (2.10). Сделав в (2.6) обратную замену $v = u - \Phi$, получим решение u исходной задачи I.

Доказательство теоремы 2 проводится с использованием той же самой схемы. В отличие от системы для нахождения коэффициентов, полученной в теореме 1, данная система оказывается линейной. Как и в теореме, легко показать применимость теоремы Лерэ — Шаудера, а из оценок, аналогичным тем, которые использовались в теореме 1, получить единственность решений системы, откуда и вытекает разрешимость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
2. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. Berlin: Springer-Verl., 1998.
3. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: WNTL Publ., 2003. (Math. Studies. Monograph Ser.; V. 10).
4. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
5. *Prilepko A. I. , Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
6. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 840–853.
7. *Безнощенко Н. Я.* Некоторые задачи определения коэффициентов при младших членах параболических уравнений // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 6. С. 1135–1167.
8. *Безнощенко Н. Я.* О существовании решения задачи определения коэффициента q в уравнении $s_t - \Delta u + qu = F$ // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 30–17.
9. *Anikonov Yu. E., Belov Yu. Ya.* Determining of two unknown coefficients of parabolic type equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2001. V. 9, N 5. P. 469–488.
10. *Belov Yu. Ya., Shipina T. N.* The problem of determining a coefficient in the parabolic equation and some properties of its solution // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2001. V. 9, N 1. P. 31–48.

11. *Баранов С. Н., Белов Ю. Я.* О проблеме идентификации коэффициентов с неоднородными условиями переопределения // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2002. С. 11–22.
12. *Полынцева С. В.* О задачах идентификации трех коэффициентов многомерного параболического уравнения // Материалы конф. «Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования». Ханты-Мансийск: ГП «Полиграфист», 2005. С. 52–57.
13. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for parabolic equations // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1993. V. 1, N 4. P. 283–301.
14. *Гольдман Н. А.* Об одном классе обратных задач для квазилинейного параболического уравнения с локальным условием // Вычисл. математика и программирование. 2005. Т. 6, № 5. С. 128–146.
15. *Yamamoto M.* Conditional stability in determination of densities of heat sources in a bounded domain // Estimation and control of distributed parameter systems. Basel: Birkhäuser Verl., 1994. P. 359–370.
16. *Ефременкова О. В.* О разрешимости параболической обратной задачи для нахождения коэффициента поглощения специального вида // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13, № 1. С. 72–79.
17. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
18. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера. Новосибирск: Научная книга, 1998.

Статья поступила 6 июля 2007 г., окончательный вариант — 26 ноября 2007 г.

Пятков Сергей Григорьевич, Цыбиков Баир Номоевич
Югорский гос. университет, кафедра высшей математики,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
pyatkov@math.nsc.ru, s_pyatkov@ugrasu.ru, b_tsybikov@ugrasu.ru