Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 517.544.7

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ИЗ РАСШИРЕННОГО КЛАССА БЛОХА

И. Р. Каюмов

Аннотация. Построены классы аналитических в круге функций, содержащие функции, отличные от лакунарных, которые обладают свойством: если некоторая функция принадлежит одному из классов и сумма квадратов ее коэффициентов не ограничена, то найдется множество положительной меры на окружности, на котором эта функция не имеет радиальных пределов.

Ключевые слова: аналитическая функция, класс Блоха, угол Штольца, радиальный предел.

Пусть $\{a_k\}$ — последовательность комплексных чисел такая, что $\sum |a_k|^2 < \infty$. Из теоремы Фату следует, что ряд $\sum a_k z^k$ имеет почти всюду некасательные пределы на окружности $|z| = 1$. Предположим, что последовательность целых чисел λ_k лакунарна по Адамару, т. е. $\varliminf\limits_{k\to\infty} \lambda_{k+1}/\lambda_k > 1$. В [1, гл. 5, п. 6] доказано, что если $\sum |a_k|^2 = \infty$, то ряд $\sum a_k z^k$ почти всюду на окружности $|z| = 1$ не имеет даже радиальных пределов.

А. И. Маркушевич (см. [2, гл. 2, п. 10]) сформулировал следующую проблему: найти классы функций, существенно отличные от лакунарных рядов, такие, что если $\sum |a_k|^2 = \infty$, то ряд $\sum a_k z^k$ не имеет почти всюду радиальных пределов. Под существенно отличными от лакунарных рядов подразумеваются классы функций, в которых существуют функции, не представимые в виде суммы некоторого лакунарного ряда и ряда с ограниченой суммой квадратов коэффициентов.

В работе [3] найден класс функций такой, что если $\sum |a_k|^2 = \infty$, то ряд $\sum a_k z^k$ не имеет радиальных пределов на некотором множестве положительной меры. В данной работе мы расширяем класс, указанный в [3], и доказываем новые результаты о граничном поведении аналитических функций.

Прежде чем сформулировать теорему 1, введем обозначения. Через $\mathbb{N}$ обозначим множество натуральных чисел. Пусть функция $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ строго возрастает и $F(1) > 1$. Положим

$$m(k) = \min\{m : F^{m-1}(1) \geq k\}.$$

Здесь $F^{m-1}(x)$ — $(m-1)$-я итерация функции F, которая определяется по рекуррентным формулам: $F^0(x) = x$, $F^n(x) = F(F^{n-1}(x))$, $n \geq 1$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00381).

Теорема 1. *Пусть* $\{a_k\}$ *— последовательность положительных чисел,* $p \geq 1$ *и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| a_{F(k)}^{1/p} - a_k^{1/p} \right|^p m(k)^p < \infty. \tag{1}$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty. \tag{3}$$

Условие (1) *не может быть ослаблено в следующем смысле: для произвольной последовательности вещественных чисел* $\{\delta_k\}$ *такой, что* $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$, *существует последовательность* $\{a_k\}$ *такая, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \left| a_{F(k)}^{1/p} - a_k^{1/p} \right|^p m(k)^p < \infty \tag{4}$$

и справедливо (2), *но* (3) *неверно, т. е.* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$.

Доказательство. Очевидно, что из (3) следует (2). Докажем обратное. Предположим, что выполнено (2). Построим индуктивно некоторую последовательность натуральных чисел l_k. Положим $l_1 = 1$. Для $k \geq 2$ определим l_k как минимальное число, для которого не существует $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$, $j_2 \leq k-1$, таких, что $F^{j_1}(l_{j_2}) = l_k$. Если такого числа не существует, то полагаем $M = \{l_1, l_2, \dots, l_{k-1}\}$, в противном случае полагаем $M = \{l_1, l_2, \dots\}$. Множество M и функция F обладают замечательным свойством: $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} F^j(M)$, причем множества $F^i(M)$ и $F^j(M)$ не пересекаются при различных i и j. Для любого $l \in M$ имеем

$$a_{F^k(l)}^{1/p} = \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(a_{F^{j-1}(l)}^{1/p} - a_{F^j(l)}^{1/p} \right).$$

Итак,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{l\in M} \sum_{s=0}^{\infty} \left(a_{F^s(l)}^{1/p} \right)^p = \sum_{l\in M} \sum_{s=0}^{\infty} \left| \sum_{j=s+1}^{\infty} a_{F^{j-1}(l)}^{1/p} - a_{F^j(l)}^{1/p} \right|^p$$
$$= \sum_{l\in M} \sum_{s=1}^{\infty} \left| \sum_{j=s}^{\infty} a_{F^{j-1}(l)}^{1/p} - a_{F^j(l)}^{1/p} \right|^p. \tag{5}$$

Воспользуемся неравенством Копсона [4, теорема 331]:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left| \sum_{k=s}^{\infty} \alpha_k \right|^p \leq p^p \sum_{k=1}^{\infty} |k\alpha_k|^p, \quad p \geq 1,$$

где α_n — последовательность вещественных чисел. Применяя это неравенство к (5), получаем, что ряд из (5) не превосходит

$$p^p \sum_{l\in M} \sum_{j=1}^{\infty} j^p \left| a_{F^{j-1}(l)}^{1/p} - a_{F^j(l)}^{1/p} \right|^p \leq p^p \sum_{l\in M} \sum_{j=1}^{\infty} m(F^{j-1}(l))^p \left| a_{F^{j-1}(l)}^{1/p} - a_{F^j(l)}^{1/p} \right|^p$$
$$= p^p \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_{F(k)}^{1/p} - |a_k|^{1/p} \right|^p m(k)^p < \infty,$$

что и требовалось доказать. В предпоследнем неравенстве мы воспользовались очевидным свойством функции $m(k)$:

$$m(F^{j-1}(l)) \ge m(F^{j-1}(1)) = j.$$

Перейдем к доказательству неулучшаемости условия (1). В [5] показано, что существует монотонно стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\nu_k \ge \delta_k + 1/\log(k+2)$ такая, что

$$1 - \frac{\nu_{k+1}}{\nu_k} \ge 1 - \frac{\nu_{k+2}}{\nu_{k+1}}, \quad k \ge 1. \tag{6}$$

Положим

$$a_{F^k(1)}^{1/p} = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j}\left(1 - \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}\right)^{1/p}, \quad k \ge 0. \tag{7}$$

Для $m \ne F^k(1)$ полагаем $a_m = 0$. Покажем, что $a_{F^k(1)} \to 0$ при $k \to \infty$. Для этого достаточно доказать, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\left(1 - \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}\right)^{1/p} < \infty.$$

Последний ряд равен

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j\nu_j^{1/p}}(\nu_j - \nu_{j+1})^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j\nu_j^{1/p}}\right)^{p/(p-1)}\right)^{1-1/p}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\nu_j - \nu_{j+1}\right)^{1/p} < \infty,$$

так как $\nu_j \ge \log(j+2)$. Отсюда $a_k \to 0$, т. е. (2) выполнено. Покажем, что выполнено (4). Имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \left|a_{F(k)}^{1/p} - a_k^{1/p}\right|^p m(k)^p &\le \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \left|a_{F(k)}^{1/p} - a_k^{1/p}\right|^p m(k)^p \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{F^{k-1}(1)} \left|a_{F^k(1)}^{1/p} - a_{F^{k-1}(1)}^{1/p}\right|^p m(F^{k-1}(1))^p \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{F^{k-1}(1)}\left(1 - \frac{\nu_{k+1}}{\nu_k}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k\left(1 - \frac{\nu_{k+1}}{\nu_k}\right) = \nu_1 < \infty.\end{aligned}$$

В предпоследнем неравенстве мы воспользовались тем, что последовательность ν_k монотонна и $F^{k-1}(1) \ge k$ $(k \ge 1)$.

Осталось показать, что $\sum a_k = \infty$. В самом деле,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(1 - \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}\right)^{1/p}\right|^p &\ge \sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{j=k+1}^{2(k+1)}\frac{1}{j}\left(1 - \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}\right)^{1/p}\right|^p \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{j=k+1}^{2(k+1)}\frac{1}{j}\left(1 - \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p.\end{aligned}$$

В силу неравенств (6) этот ряд больше или равен

$$\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\nu_{2k+3}}{\nu_{2k+2}}\right).$$

Предположим, что последний ряд сходится. Тогда обязан сходиться и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\nu_{k+1}}{\nu_k}\right),$$

поскольку последовательность $\{1-\nu_{k+1}/\nu_k\}$ положительна и монотонна. Рассматривая частные суммы этого ряда

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(1-\frac{\nu_{k+1}}{\nu_k}\right) \geq \frac{1}{\nu_n}\sum_{k=n}^{\infty}(\nu_k-\nu_{k+1}) = 1,$$

приходим к противоречию. Теорема доказана.

Заметим, что теорема 1 фактически является критерием сходимости ряда (3). В самом деле, несложно показать, что для произвольной последовательности чисел $\{a_k\}$ такой, что ряд (3) сходится, найдется функция F такая, что выполнено (1). Отметим также, что условие (2) можно заменить более слабым: $a_{F^m(l)} \to 0$ при $m \to \infty$ для любого натурального $l \in M$.

Обозначим через $\mathbf{B}$ класс функций Блоха в единичном круге (см. [6]). Этот класс определяется условием: $f \in \mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда найдется константа C такая, что $|f'(z)| \leq C/(1-|z|)$ для всех $|z|<1$. Этот класс замечателен тем, что содержит в себе лакунарные ряды Адамара с ограниченными коэффициентами. Расширим класс Блоха следующим образом. Будем рассматривать аналитические в круге D функции, которые при некотором $\alpha > 1$ и почти всех θ удовлетворяют неравенству

$$\sup_{z\in\Gamma_\alpha(\theta)} |f'(z)|(1-|z|) < \infty, \tag{8}$$

где $\Gamma_\alpha(\theta) = \{z \in D : |z-e^{i\theta}| < \alpha(1-|z|)\}$ — угол Штольца. Условию (8) удовлетворяют, например, функции класса Неванлинны. Нетрудно показать, что для функций, удовлетворяющих (8), справедлива радиальная теорема единственности, т. е. если функция имеет радиальные нулевые пределы на множестве положительной меры, то эта функция является тождественным нулем.

Через $\mathbf{B}_1$ обозначим класс аналитических в единичном круге функций f, удовлетворяющих (8), для которых существует функция $\Phi(x)$ такая, что $\Phi(x)/x \to \infty$ при $x \to \infty$ и выполнено неравенство

$$\varlimsup_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi((1-r)|f'(re^{i\theta})|)\,d\theta < +\infty. \tag{9}$$

Очевидно, что $\mathbf{B} \subset \mathbf{B}_1$. С другой стороны, несложно показать, что класс Харди H_1 содержится в $\mathbf{B}_1$. Таким образом, $f(z) = 1/(1-z)^\gamma \in \mathbf{B}_1 \setminus \mathbf{B}$ при $\gamma \in (0,1)$. Это значит, что $\mathbf{B}$ является собственным подклассом $\mathbf{B}_1$.

Введем новый класс

$$\mathbf{B}_{Fp} = \left\{ f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \in \mathbf{B}_1 : \sum_{k=1}^{\infty} ||a_{F(k)}|^{2/p} - |a_k|^{2/p}|^p m(k)^p < \infty \right\}.$$

Теорема 2. *Если $f \in \mathbf{B}_{Fp}$, то $\sum |a_k|^2 < \infty$ тогда и только тогда, когда существуют почти всюду радиальные пределы $\lim\limits_{r\to 1-} f(re^{i\theta})$, т. е. если $\sum |a_k|^2 = \infty$, то функция f не имеет радиальных пределов на некотором множестве положительной меры из $[0, 2\pi)$.*

Замечание. Как показывает пример $f(z) = 1/(1-z)$, условие на стремление к бесконечности $\Phi(x)/x$ не может быть ослаблено.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что f имеет почти всюду радиальные пределы.

В [7] Поммеренке показал, что если $f \in \mathbf{B}$ и радиальный предел $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ существует для почти всех $\theta \in [0, 2\pi)$, то $a_k \to 0$ при $k \to \infty$ (вообще говоря, коэффициенты функций класса Блоха не обязаны стремиться к нулю). Мы докажем этот факт для класса B_1. Сначала покажем, что $\sup\limits_{z\in\Gamma_\alpha(\theta)} |f(z)| < \infty$ для почти всех θ.

Пусть $\theta \in H \cap G$, где

$$H = \{\theta : \overline{\lim_{r\to 1-}} |f(re^{i\theta})| < \infty\}, \quad G = \{\theta : \sup_{z\in\Gamma_\alpha(\theta)} |f'(z)|(1-|z|) < \infty\}.$$

Предположим, что $z \in \Gamma_\alpha(\theta)$. Пусть также для определенности $\theta < \arg z$. Тогда

$$|f(z) - f(|z|e^{i\theta})| = \left| \int\limits_{|z|e^{i\theta}}^{z} f'(\tau)\, d\tau \right| \le \int\limits_{\theta}^{\arg z} |f'(|z|e^{it})|\, dt = |\theta - \arg z||f'(|z|e^{it(\theta,\arg z)})|$$
$$\le \frac{\arg z - \theta}{1-|z|}(1-|z|)|f'(|z|e^{it(\theta,\arg z)})| \le C < \infty,$$

где $\theta \le t(\theta, \arg z) \le \arg z$, а C зависит только от θ. Переходя к верхнему пределу при $z \to e^{i\theta}$ $(z \in \Gamma_\alpha(\theta))$, убеждаемся, что $\sup\limits_{z\in\Gamma_\alpha(\theta)} |f(z) - f(|z|e^{i\theta})| < \infty$, откуда вытекает почти всюду некасательная ограниченность f в круге. По теореме Плеснера отсюда следует существование почти всюду угловых пределов для f [2]. Далее, по аналогии с [7] показывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} |f'((1-1/n)e^{i\theta})|/n = 0$ для тех θ, в которых существует угловой предел $f(e^{i\theta})$. Следовательно, это будет выполнено для почти всех θ. Таким образом,

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi n} \int\limits_{|z|=1-1/n} \frac{f'(z)}{z^{n+1}}\, dz \right| \le \frac{e}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{n} |f'((1-1/n)e^{i\theta})|\, d\theta.$$

В силу (9) по теореме Валле-Пуссена [5, гл. 6, п. 3] функции $\frac{1}{n}|f'((1-1/n)e^{i\theta})|$ имеют абсолютно равностепенно непрерывные интегралы на $[0, 2\pi]$. Переходя к пределу под знаком интеграла, на основании теоремы Витали [5, гл. 6, п. 3] получаем, что $a_n \to 0$, $n \to \infty$.

Применяя теорему к последовательности $b_k = |a_k|^2$, заключаем, что $\sum |a_k|^2 < \infty$.

Теорему 2 можно понимать как частичный ответ на вопрос, поставленный А. И. Маркушевичем. В качестве ответа мы предъявляем подпространство объединения $\mathbf{B}_{Fp}$ по всем $p \ge 1$ и F. Например, в это подпространство входят функции из $\mathbf{B}_{Fp}$, коэффициенты которых удовлетворяют неравенству

$$\sum |a_k| r^k \le C/(1-r).$$

Чтобы яснее понять условие (1), рассмотрим один частный случай. Пусть q — фиксированное натуральное число, $q \geq 2$. Положим $F(x) = qx$, $M = \{l \in \mathbb{N}$, l не делится на $q\}$. В этом случае легко показать, что $m(k) = \log_q k + 1$, если $\log_q k$ — целое число, $m(k) = [\log_q k] + 2$ в противном случае (другой пример получается, если рассмотреть функцию $F(x) = x + q$, где q — натуральное число, большее 1). В этом случае $M = \{1, 2, \dots, q\}$, $m(k) = k/q + 3/2 \pm 1/2$, но мы на нем подробно останавливаться не будем).

То, что класс $\bigcup \mathbf{B}_{Fp}$ является «существенно иным» в смысле Маркушевича, следует из результатов, полученных в [3].

Теорема 3. *Пусть $q \geq 2$, $p \geq 1$ и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||a_{kq}|^{2/p} - |a_k|^{2/p}|^p \log^p k < \infty. \tag{10}$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

$$\lim_{r \to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 r^k / \log \frac{1}{1-r} = 0, \tag{11}$$

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0, \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty, \tag{13}$$

причем для произвольной последовательности вещественных чисел $\{\delta_k\}$ такой, что $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$, существует последовательность $\{a_k\}$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \big|a_{kq}^{2/p} - a_k^{2/p}\big|^p \log^p k < \infty$$

и справедливы (11) *и* (12), *но* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \infty$.

Доказательство. Обозначим

$$\sigma^2 = \varlimsup_{r \to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^2 r^k}{\log(1/(1-r))}$$

и докажем, что (13) следует из (11). Для этого предположим, что $\sigma^2 = 0$. Пусть l — произвольное натуральное число, которое не делится на q. Покажем, что существует предел

$$A(l) = \lim_{k \to \infty} a_{lq^k}.$$

В самом деле,

$$|a_{lq^k}|^{2/p} = \sum_{j=1}^{k} (|a_{lq^j}|^{2/p} - |a_{lq^{j-1}}|^{2/p}) + |a_l|^{2/p}.$$

В силу (10)

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||a_{lq^j}|^{2/p} - |a_{lq^{j-1}}|^{2/p}|^p \log^p(lq^{j-1})$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} ||a_{lq^j}|^{2/p} - |a_{lq^{j-1}}|^{2/p}|^p (\log l + (j-1)\log q)^p < \infty.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(|a_{lq^j}|^{2/p} - |a_{lq^{j-1}}|^{2/p})$ сходится, что влечет существование предела $A(l)$. Легко показать, что $\sigma^2 \geq A^2(l)/\log q$. Следовательно, $A(l) = 0$. Таким образом,

$$|a_{lq^k}|^{2/p} = |A(l)|^{2/p} - \sum_{j=k+1}^{\infty}(|a_{lq^j}|^{2/p} - |a_{lq^{j-1}}|^{2/p}) = \sum_{j=k+1}^{\infty}(|a_{lq^{j-1}}|^{2/p} - |a_{lq^j}|^{2/p}).$$

Далее доказательство проходит аналогично доказательству теоремы 1.

В заключение отметим, что ряд, построенный при доказательстве теоремы 1, будет удовлетворять условию (11), так как он является лакунарным рядом Адамара. Для таких рядов хорошо известно, что $\sigma^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $a_k \to 0$, $k \to \infty$.

Замечание. В случае $p = 2$ теорема 3 доказана в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1.
2. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
3. *Каюмов И. Р.* Граничное поведение аналитических произведений Рисса в круге // Мат. тр. 2006. Т. 9, № 1. С. 34–51.
4. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
5. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
6. *Anderson J. M., Clunie J., Pommerenke Ch.* On Bloch functions and normal functions // J. Reine Angew. Math. 1974. Bd 270. S. 12–37.
7. *Pommerenke Ch.* On Bloch functions // J. London Math. Soc. 1970. V. 2, N 4. P. 689–695.

Статья поступила 29 января 2008 г.

Каюмов Ильгиз Рифатович
НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарёва Казанского гос. университета,
ул. Университетская, 17, Казань 420008
ikayumov@mail.ru