Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 512.54

ЗАМЕЧАНИЕ О ТЕОРЕМЕ СКИБЫ

Я. Ли, Ш. Цяо, Я. Ван

Аннотация. Подгруппу H группы G называют *слабо s-перестановочной* в G, если существует субнормальная подгруппа T в G такая, что $G = HT$ и $H \cap T \leq H_{sG}$, где H_{sG} — максимальная s-перестановочная подгруппа в G, содержащаяся в H. Замечательный результат А. Н. Скибы улучшает

Теорема. *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая класс всех сверхразрешимых групп $\mathscr{U}$, и G — группа с E в качестве нормальной подгруппы в G такая, что $G/E \in \mathscr{F}$. Предположим, что каждая нециклическая силовская p-подгруппа P в $F^*(E)$ имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$ слабо s-перестановочны в G для любого $p \in \pi(F^*(E))$. Кроме того, предположим, что все циклические подгруппы в P порядка 4 слабо s-перестановочны в G, если P — неабелева 2-группа и $|D| = 2$. Тогда $G \in \mathscr{F}$.*

Ключевые слова: слабо s-перестановочная подгруппа, обобщенная фиттингова подгруппа, p-нильпотентная группа, насыщенная формация.

1. Введение

Все рассматриваемые группы конечны. Мы используем стандартные понятия и обозначения из [1]. Через G всегда обозначается конечная группа, $|G|$ — порядок G, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей $|G|$, G_p — силовская p-подгруппа в G для некоторого $p \in \pi(G)$.

Множество $\mathscr{F}$ групп, обладающее свойствами: (i) если $G \in \mathscr{F}$ и $H \triangleleft G$, то $G/H \in \mathscr{F}$, (ii) если G/M и G/N в $\mathscr{F}$, то $G/(M \cap N)$ также в $\mathscr{F}$ для нормальных подгрупп M, N в G называют *формацией*. Формацию $\mathscr{F}$ называют *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathscr{F}$ следует, что $G \in \mathscr{F}$. Через $\mathscr{U}$ будем обозначать класс всех сверхразрешимых групп. Очевидно, что $\mathscr{U}$ — насыщенная формация (см. [1, с. 713, п. 8.6]).

Подгруппу H в G называют *s-перестановочной* (*или s-квазинормальной, π-квазинормальной*) [2] в G, если H перестановочна с каждой силовской подгруппой в G; говорят, что H *c-нормальна* [3] в G, если G обладает нормальной подгруппой T такой, что $G = HT$ и $H \cap T \leq H_G$, где H_G — нормальное ядро H в G. Недавно А. Н. Скиба в [4] ввел следующее понятие, вобравшее в себя понятия s-перестановочности и c-нормальности.

Определение 1.1. Подгруппу H группы G называют *слабо s-перестановочной в G*, если существует нормальная подгруппа T в G такая, что $G = HT$ и $H \cap T \leq H_{sG}$, где H_{sG} — максимальная s-перестановочная подгруппа в G, содержащаяся в H.

Project supported in part by NSFC(10871210), NSF of Guangdong (06023728) and ARF(GDEI).

При изучении структуры G обычно налагают условия либо на минимальные подгруппы (и циклические подгруппы порядка 4 при $p = 2$), либо на максимальные подгруппы некоторых типов подгрупп в G. В статье [4] А. Н. Скиба выработал единую точку зрения на ряд похожих задач.

Для удобства формулировок введем следующее понятие.

Пусть P — p-подгруппа в G при некотором $p \in \pi(G)$. Будем говорить, что P *обладает свойством* $(*)$ ((∇_1), (∇_2) соответственно), если

$(*)$: P имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$ и порядка $|H| = 2|D|$ (если P — неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$) слабо s-перестановочны в G.

(∇_1) В P есть подгруппа D такая, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$ слабо s-перестановочны в G; кроме того, все циклические подгруппы в P порядка 4 слабо s-перестановочны в G, если P — неабелева 2-группа и $|D| = 2$.

(∇_2) P обладает подгруппой D такой, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H в P порядка $|H| = |D|$ s-перестановочны в G; кроме того, все циклические подгрупп в P порядка 4 s-перестановочны в G, если P — неабелева 2-группа и $|D| = 2$.

Замечание. Сравним предположения в $(*)$ и (∇_1).

1. Случай $p > 2$.

Предположения в $(*)$ и (∇_1) одинаковы: каждая подгруппа в P порядка $|D|$ слабо s-перестановочна в G.

2. Случай $p = 2$.

Предположение в $(*)$ следующее:

(a) если P абелева, то каждая подгруппа в P порядка $|D|$ слабо s-перестановочна в G;

(b) если $[P : D] = 2$, то каждая подгруппа в P порядка $|D|$ слабо s-перестановочна в G;

(c) если P неабелева и $[P : D] > 2$, то все подгруппы в P порядка $|D|$ или $2|D|$ слабо s-перестановочны в G.

Вместе с тем предположения в (∇_1) таковы:

(d) если $|D| > 2$, то каждая подгруппа P порядка $|D|$ слабо s-перестановочна в G;

(e) если $|D| = 2$ и P абелева, то каждая подгруппа в P порядка 2 слабо s-перестановочна в G;

(f) если $|D| = 2$ и P неабелева, то все циклические подгруппы в P порядка 2 или 4 слабо s-перестановочны в G.

Напомним основной результат статьи [4].

Теорема 1.1 [4, теорема 1.3]. *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathscr{U}$, класс всех сверхразрешимых групп и группу G, в которой E — нормальная подгруппа такая, что $G/E \in \mathscr{F}$. Допустим, что каждая нециклическая силовская подгруппа P в $F^*(E)$ удовлетворяет условию $(*)$ в G, где $F^*(E)$ — обобщенная фиттингова подгруппа в E. Тогда $G \in \mathscr{F}$.*

В настоящей работе мы покажем, что условия теоремы 1.1 слишком жесткие и не являются необходимыми в случае $p = 2$. Точнее говоря, будет доказана

Теорема 1.2. *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathscr{U}$, и G — группа с E в качестве нормальной подгруппой в G такая, что $G/E \in \mathscr{F}$. Если* *каждая нециклическая силовская подгруппа в $F^*(E)$ обладает свойством (∇_1) в G, то $G \in \mathscr{F}$.*

Следующий результат, касающийся p-нильпотентности группы, является важным шагом в доказательстве теоремы 1.2.

Теорема 1.3. *Пусть G — группа и P — силовская p-подгруппа в G, где p — наименьший простой делитель $|G|$. Если P удовлетворяет условию (∇_1) в G, то G p-нильпотентна.*

2. Предварительные сведения

Лемма 2.1 [2]. (a) *Любая s-перестановочная подгруппа в G субнормальна в G.*

(b) *Если $H \leq K \leq G$ и H s-перестановочна в G, то H s-перестановочна в K.*

(c) *Если H — s-перестановочная холлова группа в G, то $H \lhd G$.*

(d) *Пусть $K \lhd G$; если H s-перестановочна в G, то HK/K s-перестановочна в G/K.*

Лемма 2.2 [5, лемма A]. *Пусть H — p-подгруппа в группе G для некоторого простого p. Тогда H S-квазинормальна в G тогда и только тогда, когда $O^p(G) \leq N_G(H)$.*

Лемма 2.3 [4, лемма 2.10]. *Пусть G — группа и $H \leq K \leq G$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(a) *Если H слабо s-перестановочна в G, то H слабо s-перестановочна в K.*

(b) *Допустим, что H нормальна в G. Тогда K/H слабо s-перестановочна в G/H тогда и только тогда, когда K слабо s-перестановочна в G.*

(c) *Пусть H нормальна в G. Тогда подгруппа HE/H слабо s-перестановочна в G/H для любой слабо s-перестановочной подгруппы E в G такой, что $(|H|, |E|) = 1$.*

(d) *Пусть H — p-группа для некоторого простого p и H не s-перестановочна в G. Пусть H слабо s-перестановочна в G. Тогда G имеет нормальную подгруппу M такую, что $|G : M| = p$ и $G = MH$.*

Лемма 2.4 [4, лемма 2.11]. *Пусть N — элементарная абелева нормальная подгруппа группы G. Предположим, что в N есть подгруппа D такая, что $1 < |D| < |N|$ и каждая подгруппа H в N такая, что $|H| = |D|$, слабо s-перестановочна в G. Тогда некоторая максимальная подгруппа в N нормальна в G.*

Лемма 2.5. *Пусть p простое и G — минимальная не p-нильпотентная группа, т. е. G не является p-нильпотентной группой, но все ее собственные подгруппы p-нильпотентны. Тогда*

(a) *G обладает нормальной силовской p-подгруппой P при некоторых простом p и $G = PQ$, где Q — не нормальная циклическая q-подгруппа при некотором простом $q \neq p$;*

(b) *$P/\Phi(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi(P)$;*

(c) *если P неабелева и $p > 2$, то $\mathrm{Exp}(P) = p$;*

(d) *если P неабелева и $p = 2$, то $\mathrm{Exp}(P) = 4$;*

(e) *если P абелева, то $\mathrm{Exp}(P) = p$.*

Доказательство утверждений (a)–(d) см. в [1, III, 5.2; IV, 5.4].

(e) Если $\Omega_1(P) < P$, то $\Omega_1(P)Q$ — собственная подгруппа в G. Тогда согласно предположениям $\Omega_1(P)Q = \Omega_1(P) \times Q$. Поэтому $G = PQ = P \times Q$ ввиду [6, теорема 5.2.4]; противоречие. Следовательно, $\Omega_1(P) = P$. Тем самым (e) выполнено.

Лемма 2.6 [7, A, 1.2]. *Пусть U, V и W — подгруппы в G. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) $U \cap VW = (U \cap V)(U \cap W)$,

(b) $UV \cap UW = U(V \cap W)$.

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть G — группа и P — силовская p-подгруппа в G, где p — наименьший простой делитель $|G|$. Если все максимальные подгруппы в P слабо s-перестановочны в G, то G p-нильпотентна.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна и G — контрпример минимального порядка. Придем к противоречию за несколько шагов.

Шаг 1. G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N такую, что G/N p-нильпотентна и $\Phi(G) = 1$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G. Рассмотрим G/N и покажем, что она удовлетворяет условиям теоремы. Пусть M/N — максимальная подгруппа в $(PN)/N$. Легко увидеть, что $M = P_1N$ для некоторой максимальной подгруппы P_1 в P. Следовательно, $P \cap N = P_1 \cap N$ — силовская подгруппа в N. По предположению существует субнормальная подгруппа K_1 в G такая, что $G = P_1K_1$ и $P_1 \cap K_1 \leq (P_1)_{sG}$. Тогда

$$G/N = M/N \cdot K_1N/N = P_1N/N \cdot K_1N/N.$$

Заметим, что K_1N/N субнормальна в G/N. Поскольку $(|N : P_1 \cap N|, |N : K_1 \cap N|) = 1$, имеем

$$(P_1 \cap N)(K_1 \cap N) = N = N \cap G = N \cap (P_1K_1).$$

По лемме 2.6 $(P_1N) \cap (K_1N) = (P_1 \cap K_1)N$. Из леммы 2.1(d) вытекает, что

$$(P_1N)/N \cap (K_1N)/N = (P_1 \cap K_1)N/N \leq (P_1)_{sG}N/N \leq (M/N)_{s\overline{G}}.$$

Отсюда M/N слабо s-перестановочна в G/N. Поэтому G/N удовлетворяет условиям теоремы. Ввиду выбора G такова, что G/N p-нильпотентна. Единственность N и равенство $\Phi(G) = 1$ очевидны.

Шаг 2. $O_{p'}(G) = 1$. Если $O_{p'}(G) \neq 1$, то $N \leq O_{p'}(G)$ согласно шагу 1. По лемме 2.3(c) G/N удовлетворяет условиям, так что G/N p-нильпотентна. Теперь p-нильпотентность G/N влечет p-нильпотентность G; противоречие.

Шаг 3. $O_p(G) = 1$. Тогда N не p-нильпотентна. Если $O_p(G) \neq 1$, то из шага 1 вытекает, что $N \leq O_p(G)$ и $\Phi(O_p(G)) \leq \Phi(G) = 1$. Поэтому G обладает максимальной подгруппой M такой, что $G = MN$ и $M \cap N = 1$. Поскольку $O_p(G) \cap M$ нормализуется посредством N и M, она нормализуется и посредством G, и из единственности N вытекает, что $N = O_p(G)$. Очевидно, $P = N(P \cap M)$. Возьмем максимальную подгруппу P_1 в P такую, что $P \cap M \leq P_1$. Тогда $P = NP_1$. Согласно условиям найдется субнормальная подгруппа T в G такая, что $G = P_1T$ и $P_1 \cap T \leq (P_1)_{sG}$. Очевидно, что $(P_1)_{sG} \leq O_p(G) = N \leq O^p(G)$, ибо N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Так как $T \trianglelefteq G$ и $|G : T|$ — степень p, имеем $O^p(G) \leq T$. Отсюда

$$P_1 \cap T \leq (P_1)_{sG} \leq O^p(G) \cap P_1 \leq T \cap P_1,$$

тем самым $P_1 \cap T = (P_1)_{sG} = O^p(G) \cap P_1$. Следовательно, из $G = PO^p(G)$ вытекает, что $(P_1)_{sG} \trianglelefteq G$. Ввиду нормальности N имеем $(P_1)_{sG} = N$ или $(P_1)_{sG} = 1$. Если $(P_1)_{sG} = N$, то $N \leq P_1$ и $P = NP_1 = P_1$; противоречие. Итак, $P_1 \cap T = (P_1)_{sG} = 1$, и, значит, $|T|_p = p$. Тогда T p-нильпотентна ввиду [1, IV, гл. 2.8]. Пусть $T_{p'}$ — нормальное p-дополнение в T. Тогда $T_{p'} \trianglelefteq G$ и $T_{p'} \in \mathrm{Hall}(G)$, $T_{p'}$ — нормальное p-дополнение в G; противоречие.

Если N p-нильпотентна, ввиду $N_{p'} \operatorname{char} N \triangleleft G$ имеем $N_{p'} \leq O_{p'}(G) = 1$ согласно шагу 2. Итак, N — p-группа. Тогда $N \leq O_p(G) = 1$; противоречие. Шаг 3 исчерпан.

Шаг 4. Окончательное противоречие. Если $N \cap P \leq \Phi(P)$, то N p-нильпотентна по теореме Тейта [1, разд. 4.7, с. 431]; противоречие с шагом 3. Следовательно, найдется максимальная подгруппа P_1 в P такая, что $P = (N \cap P)P_1$. Поскольку P_1 слабо s-перестановочна в G, согласно предположениям существует субнормальная подгруппа T в G такая, что $G = P_1T$ и $P_1 \cap T \leq (P_1)_{sG}$. Тем самым $P_1 \cap T \leq (P_1)_{sG} \leq O_p(G) = 1$ в силу шага 3. Отсюда

$$|P \cap T| = |P \cap T : P_1 \cap T| \leq |P : P_1| = p.$$

По [1, IV, разд. 2.8] T p-нильпотентна. Пусть $T_{p'}$ — нормальное p-дополнение к T. Тогда $T_{p'} \trianglelefteq G$ и $T_{p'} \in \mathrm{Hall}(G)$, $T_{p'}$ — нормальное p-дополнение в G; окончательное противоречие.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.3. Предположим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Получим противоречие в несколько шагов.

Шаг 1. $O_{p'}(G) = 1$. Если $O_{p'}(G) \neq 1$, то лемма 2.3(c) гарантирует, что $G/O_{p'}(G)$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда $G/O_{p'}(G)$ p-нильпотентна ввиду минимальности G. Отсюда G p-нильпотентна; противоречие.

Шаг 2. $|D| > p$. Допустим, что $|D| = p$. Так как G не p-нильпотентна, в G есть минимальная не p-нильпотентная подгруппа G_1. По лемме 2.5(a) $G_1 = [P_1]Q$, где $P_1 \in \mathrm{Syl}_p(G_1)$ и $Q \in \mathrm{Syl}_q(G_1)$, $p \neq q$. Положим $\Phi = \Phi(P_1)$. Пусть X/Φ — подгруппа в P_1/Φ порядка p, $x \in X \setminus \Phi$ и $L = \langle x \rangle$. Если P абелева, то P_1 абелева, откуда L порядка p по лемме 2.5(e); если P неабелева, то L порядка p или 4 по лемме 2.5(c)–(e). В любом случае L слабо s-перестановочна в G по условиям, а значит, и в G_1 по лемме 2.3(a). Если L не s-перестановочна в G_1, то по лемме 2.3(d) G_1 имеет нормальную подгруппу T такую, что $G_1 = LT$ и $|G_1 : T| = p$. Поскольку G_1 — минимальная не p-нильпотентная группа, T p-нильпотентна. Тогда $T_q \operatorname{char} T \triangleleft G_1$ и $T_q \triangleleft G_1$. Поэтому G_1 p-нильпотентна; противоречие. Отсюда L s-*перстановочна в G_1. Тем самым $X/\Phi = L\Phi/\Phi$ s-перестановочна в G_1/Φ. В силу лемм 2.4 и 2.5(b) получаем, что $|P_1/\Phi| = p$. Следовательно, P_1 циклическая. Значит, G_1 p-нильпотентна ввиду [1, IV, разд. 2.8]; противоречие с выбором G_1.

Шаг 3. $|P : D| > p$. Вытекает из теоремы 3.1.

Шаг 4. P удовлетворяет (∇_2) в G; более того, $O_p(G) \neq 1$. Допустим, что существует подгруппа $H \leq P$ такая, что $|H| = |D|$ и H не s-перестановочна в G. Согласно лемме 2.3(d) найдется нормальная подгруппа в G такая, что $|G : M| = p$. Так как $|P : D| > p$, то M удовлетворяет условиям теоремы. Выбор G влечет p-нильпотентность M. Легко видеть, что G p-нильпотентна; противоречие с выбором G. Значит, P удовлетворяет условию (∇_2) в G. Любая подгруппа H порядка $|H| = |D|$ s-перестановочна в G. Тем самым $1 < H \leq O_p(G)$.

Шаг 5. Если $N \leq P$ и N минимальная нормальная в G, то $|N| \leq |D|$. Предположим, что $|N| > |D|$. Поскольку $N \leq O_p(G)$, группа N элементарная абелева. По лемме 2.4 N обладает максимальной подгруппой, нормальной в G; противоречие с минимальностью N.

Шаг 6. Допустим, что $N \leq P$ и N минимальная нормальная в G. Тогда G/N p-нильпотентна. Пусть $p > 2$. Если $|N| < |D|$, не уменьшая общности, можно считать, что, $N \leq D$. Тогда P/N обладает подгруппой D/N такой, что $1 < |D/N| < |P/N|$ и каждая подгруппа H/N в P/N с $|H/N| = |D/N|$ s-перестановочна в G/N по лемме 2.1. Значит, P/N удовлетворяет условию (∇_2) в G/N, и G/N удовлетворяет условиям теоремы. Тем самым G/N p-нильпотентна ввиду минимальности выбора G. Итак, можно считать, что $|N| = |D|$ согласно шагу 5. Покажем, что каждая подгруппа в P/N порядка p s-перестановочна в G/N. Пусть $K \leq P$ и $|K/N| = p$. Ввиду шага 2 N нециклическая, а тогда таковыми будут все подгруппы, содержащие N. Следовательно, существует максимальная подгруппа $L \neq N$ в K такая, что $K = NL$. Разумеется, $|N| = |D| = |L|$. Так как L s-перестановочна в G в силу шага 4, $K/N = LN/N$ s-перестановочна в G/N по лемме 2.1. Значит, P/N удовлетворяет условию (∇_2) в G. Тем самым G/N p-нильпотентна ввиду минимальности выбора G.

Пусть $p = 2$. Разберем следующие три случая.

Случай (a). $|D| = |N|$. На основании шага 2 N нециклическая. Рассуждая, как и выше, получаем, что каждая подгруппа в P/N порядка 2 s-перестановочна в G/N. Если P/N абелева, то условия выполнены для G/N. Значит, G/N p-нильпотентна ввиду минимальности выбора G. Предположим, что P/N неабелева. Убедимся в том, что каждая циклическая подгруппа в P/N порядка 4 s-перестановочна в G/N, поэтому P/N удовлетворяет условию (∇_2) в G/N. Тем самым G/N 2-нильпотентна ввиду минимальности выбора G.

Пусть $X/N \leq P/N$ циклическая порядка 4. Так как N нециклическая, X нециклическая. Следовательно, существует максимальная подгруппа X_1 такая, что $X = X_1N$. Если X_1 нециклическая, то X_1 имеет по крайней мере две максимальные подгруппы X_{11}, X_{12} порядка $|D|$, s-перестановочные в G согласно шагу 4. Тогда $X_1 = X_{11}X_{12}$ s-перестановочна в G, а значит, $X/N = X_1N/N$ s-перестановочна в G. Предположим теперь, что X_1 циклическая. Тогда $|X_1 \cap N| \leq 2$, ибо N элементарная абелева. Вычисляя $|X| = |X_1||N|/|X_1 \cap N|$, заключаем, что $|N|$ равен 2 или 4. Поскольку N нециклическая, имеем $|N| = 4$ и $|D| = 4$. В силу предположений все подгруппы порядка 4 в P s-перестановочны в G. Покажем теперь, что существует подгруппа в $Z(P)$ порядка 2, которая s-перестановочна в G, для доказательства того, что все подгруппы порядка 2 в P s-перестановочны в G.

Если период P равен 2, то P абелева в противоречие с предположением о неабелевости P/N. Тем самым в P есть элемент x порядка 4. Тогда $\langle x \rangle$ s-перестановочна в G. Отсюда $N_G(\langle x \rangle) \geq O^p(G)$ по лемме 2.2. Так как $\langle x^2 \rangle$ — характеристика в $\langle x \rangle$, имеем $N_G(\langle x^2 \rangle) \geq O^p(G)$. Следовательно, $\langle x^2 \rangle$ s-перестановочна в G по лемме 2.2. Более того, $O^p(G) \leq C_G(\langle x^2 \rangle)$. Если $\langle x^2 \rangle \in Z(P)$, то $\langle x^2 \rangle$ — искомая подгруппа. Допустим теперь, что $\langle x^2 \rangle$ не лежит в $Z(P)$. Возьмем подгруппу A в $Z(P)$ порядка 2. Тогда $A\langle x^2 \rangle = A \times \langle x^2 \rangle$ s-перестановочна в G. По лемме 2.2 $N_G(A \times \langle x^2 \rangle) \geq O^p(G)$. Так как $O^p(G) \leq C_G(\langle x^2 \rangle)$, анализируя группу автоморфизмов в $A \times \langle x^2 \rangle$, получаем, что $O^p(G) \leq C_G(A) \leq N_G(A)$, тем самым A s-перестановочна по лемме 2.2. Для любой подгруппы $B \neq A$ в P порядка 2 группа $AB = A \times B$ s-перестановочна в G, поэтому

$O^p(G) \leq N_G(AB)$ по лемме 2.2. Поскольку $O^p(G) \leq C_G(A)$, вновь анализируя группу автоморфизмов в $A \times B$, приходим к тому, что $O^p(G) \leq C_G(B) \leq N_G(B)$. Значит, B s-перестановочна в G по лемме 2.2.

Следовательно, все подгруппы в P порядков 2 и 4 s-перестановочны в G. Легко показать, что G 2-нильпотентна; противоречие.

Случай (b). $|D| = 2|N|$. Если N циклическая, то $|N| = 2$ и $|D| = 4$. Рассуждая, как и выше, можно доказать, что все подгруппы в P порядков 2 и 4 s-перестановочны в G. Тогда G 2-нильпотентна; противоречие. Предположим, что N нециклическая. Такими же рассуждениями, как и прежде, можно прийти к тому, что каждая подгруппа в P/N порядка 2 s-перестановочна в G/N. Если P/N абелева, то G/N удовлетворяет условиям, а значит, G/N 2-нильпотентна ввиду минимальности выбора G. Пусть P/N неабелева. Каждая циклическая подгруппа в P/N порядка 4 s-перестановочна в G/N. Поэтому G/N удовлетворяет условиям теоремы для P/N и G/N 2-нильпотентна ввиду минимальности выбора G.

Возьмем теперь $X/N \leq P/N$ циклическую порядка 4. Если $N \leq \Phi(X)$, то X циклическая и N циклическая; противоречие. Следовательно, существует максимальная подгруппа X_1 в P такая, что $X = X_1N$. Поскольку $|X_1| = |D|$, подгруппа X_1 s-перестановочна согласно шагу 4. Тем самым $X = X_1N$ s-перестановочна в G. По лемме 2.1 X/N s-перестановочна в G/N.

Случай (c). $|D| > 2|N|$. Не уменьшая общности, можно считать, что $N \leq D$. Тогда в P/N есть подгруппа D/N такая, что $2 < |D/N| < |P/N|$ и каждая подгруппа H/N в P/N с $|H/N| = |D/N|$ s-перестановочна в G/N по лемме 2.1. Следовательно, G/N удовлетворяет условиям теоремы. Тем самым G/N 2-нильпотентна ввиду минимальности выбора G.

Шаг 7. Окончательное противоречие. Ввиду шага 4 имеем $O_p(G) \neq 1$. Возьмем минимальную нормальную подгруппу N группы G в $O_p(G)$. Тогда G/N p-нильпотентна согласно шагу 6. Легко видеть, что N — единственная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в $O_p(G)$, и $\Phi(G) = 1$, $N = O_p(G)$. С другой стороны, в G есть максимальная подгруппа M такая, что $G = MN$ и $M \cap N = 1$. Легко показать, что $N \cap M = 1$ и $M \cong G/N$ p-нильпотентна. Тогда G можно записать в виде $G = N(M \cap P)M_{p'}$, где $M_{p'}$ — нормальное p-дополнение в M. Если $M \cap P = 1$, то $N = P$; противоречие. Далее, пусть $1 < |M \cap P| \leq |D|$. Выберем $H \leq P$ так, что $M \cap P \leq H$ и $|H| = |D|$. Ввиду шага 4 H s-перестановочна в G. Тогда

$$H \leq O_p(G) = N, \quad M \cap P \leq N, \quad M \cap P \leq M \cap N = 1;$$

противоречие. Наконец, если $|M \cap P| > |D|$, то возьмем $H \leq M \cap P$ такую, что $|H| = |D|$. В силу шага 4 H s-перестановочна в G. Тогда $H \leq O_p(G) = N$, $H \leq M \cap N = 1$; окончательное противоречие. Доказательство теоремы закончено.

Следствие 3.2. *Пусть G — группа. Если каждая нециклическая силовская подгруппа в G удовлетворяет условию (∇_1) в G, то G обладает силовской башней сверхразрешимого типа.*

Используя частично рассуждения из доказательства теоремы 1.4 в [4] и повторяя рассуждения шага 6 теоремы 3.2, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathscr{U}$, и G — группа с нормальной p-подгруппой P в G такая, что $G/P \in \mathscr{F}$. Предположим, что P удовлетворяет условию (∇_1) в G. Тогда $G \in \mathscr{F}$.*

В результате комбинирования следствия 3.2 и теоремы 3.3 получается

Теорема 3.4. *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathscr{U}$, и G — группа с нормальной подгруппой E такая, что $G/E \in \mathscr{F}$. Пусть каждая нециклическая силовская подгруппа в E удовлетворяет условию (∇_1) в G. Тогда $G \in \mathscr{F}$.*

Из теоремы 3.5 и слегка измененного доказательства теоремы 1.3 из [4] вытекает теорема 1.2.

4. Замечания

Теорема 1.3 представляет и самостоятельный интерес. Она может быть обобщена следующим образом.

Теорема 4.1. *Пусть G — группа, H — нормальная подгруппа в G такая, что G/H p-нильпотентна, и P — силовская p-подгруппа в H, где p — простой делитель $|G|$ и $(|G|, p-1) = 1$. Если P удовлетворяет условию (∇_1) в G, то G p-нильпотентна.*

Следствие 4.2. *Пусть G — группа, H — нормальная подгруппа в G такая, что G/H p-нильпотентна, и P — силовская p-подгруппа в H, где p — простой делитель $|G|$ и $(|G|, p-1) = 1$. Если каждая максимальная подгруппа в P либо c-нормальна, либо s-перестановочна в G, то G p-нильпотентна.*

Следствие 4.3. *Пусть G — группа, H — нормальная подгруппа в G такая, что G/H p-нильпотентна, и P — силовская p-подгруппа в H, где p — простой делитель $|G|$ и $(|G|, p-1) = 1$. Если каждая максимальная подгруппа в P c-нормальна в G, то G p-нильпотентна.*

Следствие 4.4. *Пусть G — группа и P — силовская p-подгруппа в G, где p — простой делитель $|G|$ и $(|G|, p-1) = 1$. Если каждая максимальная подгруппа в P s-перестановочна в G, то G p-нильпотентна.*

Следствие 4.5. *Пусть G — группа и P — силовская p-подгруппа в G, где p — простой делитель в $|G|$ и $(|G|, p-1) = 1$. Если все циклические подгруппы в P порядка p или 4 (когда P — неабелева 2-группа) либо c-нормальны, либо s-перестановочны в G, то G p-нильпотентна.*

Следствие 4.6. *Пусть G — группа и P — силовская p-подгруппа в G, где p — простой делитель в $|G|$ и $(|G|, p-1) = 1$. Если все циклические подгруппы в P порядка p или 4 (когда P — неабелева 2-группа) c-нормальны в G, то G p-нильпотентна.*

Следствие 4.7. *Пусть G — группа и P — силовская p-подгруппа в G, где p — простой делитель $|G|$ с $(|G|, p-1) = 1$. Если все циклические подгруппы в P порядка p или 4 (когда P — неабелева 2-группа) s-перестановочна в G, то G p-нильпотентна.*

Благодарность. Авторы признательны рецензенту за его/ее замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1967.
2. *Kegel O. H.* Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. Bd 78. S. 205–221.
3. *Yanming Wang* On c-normality of groups and its properties // J. Algebra. 1996. V. 180. P. 954–965.

4. *Skiba A. N.* On weakly s-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 192–209.
5. *Schmid P.* Subgroups permutable with all Sylow subgroups // J. Algebra. 1998. V. 207. P. 285–293.
6. *Gorenstein D.* Finite Groups. New York: Harper and Row, 1968.
7. *Doerk K., Hawkes T.* Finite Soluble Groups. Berlin; New York: de Gruyter, 1992.

Статья поступила 10 ноября 2007 г.

Yangming Li (corresponding author) (Ли Яньмин)
Dept. of Math., Guangdong Institute of Education,
Guangzhou, 510310, China
liyangming@gdei.edu.cn

Shouhong Qiao (Цяо Шоухун)
Dept. of Math., Zhongshan University, Guangzhou, 510275, China
qshqsh513@163.com

Yanming Wang (Ван Яньмин)
Lingnan College and Dept. of Math., Zhongshan University,
Guangzhou, 510275, China
stswym@mail.sysu.edu.cn