Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, В КОТОРЫХ НОРМАЛИЗАТОРЫ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП ИМЕЮТ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ХОЛЛОВЫ ДОБАВЛЕНИЯ

Б. Ли, В. Го, Цз. Хуан

Аннотация. Показано, что нормализатор любой силовской подгруппы конечной группы G имеет нильпотентное холлово добавление в G тогда и только тогда, когда G разрешима и любая трипримарная холлова подгруппа H группы G (если такая существует) удовлетворяет одному из следующих двух условий: (i) H обладает нильпотентной бипримарной холловой подгруппой; (ii) если $\pi(H) = \{p, q, r\}$, то существуют силовские p-, q-, r-подгруппы H_p, H_q и H_r группы H такие, что $H_q \subseteq N_H(H_p)$, $H_r \subseteq N_H(H_q)$ и $H_p \subseteq N_H(H_r)$.

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, нормализатор, нильпотентное холлово добавление, разрешимые группы.

1. Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны.

Хорошо известно, что нормализаторы силовских подгрупп играют важную роль при изучении конечных групп. Классический результат Бернсайда утверждает, что группа G является p-нильпотентной, если нормализатор силовской p-подгруппы равен централизатору этой силовской подгруппы. Этот результат получил развитие в работах Глаубермана и Томпсона. Они доказали, что если $p \geq 5$ и G — неабелева простая группа, то $N_G(P) \neq PC_G(P)$ для любой силовской p-подгруппы P группы G (см. [1, X. 8.13]). Го [2] показал, что если нормализатор каждой силовской подгруппы группы G имеет холлово дополнение в G, то G — дисперсивная группа. В [3] описана связь между нормализаторами и теорией формаций. Затем интерес исследователей переместился на индексы нормализаторов силовских подгрупп. А. С. Кондратьев [4] доказал, что если нормализатор любой силовской подгруппы группы G имеет нечетный индекс, то G 2-нильпотентна. Чигура [5] установил, что группа G будет p-нильпотентной, если $p \neq 3$ и $(|G : N_G(G_r)|, p) = 1$ для любого $r \in \pi(G)$. Джанг [6] доказал, что если индекс нормализатора любой силовской подгруппы группы G примарен, то G разрешима. Го [7] показал, что индекс нормализатора любой силовской подгруппы группы G равен нечетному числу или степени простого числа тогда и только тогда, когда G разрешима и $G = HK$, где H и K — холловы подгруппы группы G, H — 2-нильпотентная группа, K нильпотентна и нормальна

The authors were supported by the NNSF of China (Grant 10771180), Scientific Research Fund of Sichuan Provincial Education Department (Grant 08zb059) and Research Programme of Chengdu University of Information Technology (Grant KYTZ200909).

в некоторой холловой $2'$-подгруппе группы G. Позже, использую классификацию конечных простых групп, Го и Шум [8] установили, что если индекс нормализатора любой силовской 2-, 3-подгруппы группы G является степенью простого числа, то G разрешима. Понятно, что если нормализатор силовской подгруппы имеет простой индекс в G, то он обладает нильпотентным холловым добавлением в G. Тогда естественным образом возникает следующий вопрос: *что можно сказать о группе G, если нормализатор любой силовской подгруппы группы G имеет нильпотентное холлово добавление в G*? Пытаясь ответить на этот вопрос и развивая предыдущие результаты, мы докажем следующие теоремы.

Теорема A. *Если нормализатор любой силовской подгруппы группы G имеет нильпотентное холлово добавление в G, то G разрешима.*

Следующий результат является прямым следствием теоремы A.

Следствие [6]. *Если индекс нормализатора любой силовской подгруппы группы G равен степени простого числа, то G разрешима.*

Группа G называется *бипримарной*, если $|\pi(G)| = 2$. Аналогичным образом, G называется *трипримарной*, если $|\pi(G)| = 3$. Следующие две теоремы описывают строение группы, в которой нормализатор любой силовской подгруппы имеет нильпотентное холлово добавление.

Теорема B. *Пусть G — группа. Тогда нормализатор любой силовской подгруппы группы G имеет нильпотентное холлово добавление в G в том и только в том случае, когда G разрешима и любая ее трипримарная холлова подгруппа H (если такая существует) удовлетворяет одному из следующих двух условий:*

(i) *H содержит нильпотентную бипримарную холлову подгруппу;*

(ii) *если $\pi(H) = \{p, q, r\}$, то существуют силовские p-, q-, r-подгруппы H_p, H_q, H_r группы H такие, что $H_q \subseteq N_H(H_p)$, $H_r \subseteq N_H(H_q)$ и $H_p \subseteq N_H(H_r)$.*

Теорема C. *Для группы G и простого числа p положим $\pi_{G,p} = \pi({G_p}^G) \setminus \{p\}$, где G_p — силовская p-подгруппа группы G и G_p^G — нормальное замыкание группы G_p в G. Нормализатор любой силовской подгруппы группы G имеет нильпотентное холлово добавление в G в том и только в том случае, когда G содержит нильпотентную холлову $\pi_{G,p}$-подгруппу для любого простого числа p, делящего $|G|$. При выполнении любого из этих условий группа G разрешима и $\pi_{G,p} = \pi(|G : N_G(G_p)|)$.*

2. Предварительные сведения

Пусть π — некоторое множество простых чисел и π' — дополнение к π в множестве всех простых чисел. Для натурального числа n обозначим через $\pi(n)$ множество всех простых чисел, делящих n, и через $\pi(G)$ — множество всех простых делителей числа $|G|$. Напомним, что π-число — это целое число, все простые делители которого принадлежат π. Подгруппа H группы G называется *холловой π-подгруппой*, если $|H|$ — π-число и $|G : H|$ — π'-число. Следуя Холлу, будем говорить, что G — *E_π-группа*, если G содержит холлову π-подгруппу; что G — *$E_\pi^{\mathfrak{N}}$-группа*, если G содержит нильпотентную холлову π-подгруппу; что G — *D_π-группа*, если G содержит холлову π-подгруппу и любая π-подгруппа содержится в некоторой подгруппе, сопряженной с этой холловой

π-подгруппой. Группа G называется *π-сепарабельной*, если любой главный фактор группы G является либо π-группой, либо π'-группой. Следуя [9, I(4.1)], под холловой системой разрешимой группы G мы подразумеваем множество Σ холловых подгрупп группы G, обладающее следующими двумя свойствами:

1) для каждого $\pi \subseteq \mathbb{P}$ множество Σ содержит ровно одну холлову π-подгруппу группы G;

2) если $H, K \in \Sigma$, то $HK = KH$.

Все неоговоренные обозначения и термины стандартны. Читатель может обратиться к [9, 10].

Мы приводим в виде лемм некоторые хорошо известные результаты, которые будут использованы далее в работе.

Лемма 1 [10, лемма 3.8.3]. *Пусть $G = AB$ и N — подгруппа в B. Если A содержится в $N_G(N)$, то $N^G \subseteq B$.*

Лемма 2 [11]. *Если G — $E_\pi^{\mathfrak{N}}$-группа, то G — D_π-группа.*

Следующие две леммы хорошо известны.

Лемма 3. *Если $G = AB$, то $G = AB^x$ для любого элемента $x \in G$.*

Лемма 4. *Пусть π — множество простых чисел и G — π-разрешимая группа. Тогда $C_G(O_{\pi',\pi}(G)) \subseteq O_{\pi',\pi}(G)$. В частности, если $O_{\pi'}(G) = 1$, то $C_G(O_\pi(G)) \subseteq O_\pi(G)$.*

Лемма 5 [12]. *Если $G = AB$, где A и B нильпотентны, то G разрешима.*

Лемма 6 [10, лемма 3.6.10]. *Пусть M — нормальная подгруппа группы G и P — p-подгруппа группы G. Если P_1 — силовская p-подгруппа в PM, то $N_{G/M}(PM/M) = N_G(P_1)M/M$.*

Докажем следующие леммы.

Лемма 7. *Пусть A, B — подгруппы группы G и $(|G : A|, |G : B|) = 1$. Пусть M — подгруппа группы G. Если AM и BM — подгруппы в G, то $M = (A \cap M)(B \cap M)$.*

Доказательство. Поскольку AM и BM — подгруппы в G, $|M : M \cap A| = |AM : A|$ — делитель числа $|G : A|$ и $|M : B \cap M| = |BM : B|$ — делитель числа $|G : B|$. Следовательно, $(|M : A \cap M|, |M : B \cap M|) = 1$ в силу равенства $(|G : A|, |G : B|) = 1$. Значит, $M = (A \cap M)(B \cap M)$. $\square$

Напомним, что группа G называется *π-замкнутой*, если G содержит нормальную холлову π-подгруппу. Известно, что группа G будет p-нильпотентной в том и только в том случае, когда G является p'-замкнутой. Нормальная подгруппа N группы G называется *гиперцентральной* в G, если любой G-главный фактор H/K группы N является G-центральным, т. е. $H/K \subseteq Z(G/K)$. Произведение всех гиперцентральных подгрупп группы G называется *гиперцентром* группы G и обозначается через $Z_\infty(G)$.

Лемма 8. *Пусть π — множество простых чисел, K — нормальная подгруппа группы G и $K \subseteq Z_\infty(G)$. Пусть T — подгруппа в G. Если TK/K π-замкнута, то и T π-замкнута.*

Доказательство. Поскольку K нильпотентна, $O_{\pi'}(K)$ — нормальная холлова π'-подгруппа группы K. Так как $O_{\pi'}(K)$ char $K \lhd G$, группа $O_{\pi'}(K)$ нормальна в G. Пусть $1 = O_0 \subseteq O_1 \subseteq O_2 \subseteq \cdots \subseteq O_{t-1} \subseteq O_t = O_{\pi'}(K) \subseteq \cdots \subseteq G$ —

главный ряд группы G. Из условия $K \subseteq Z_\infty(G)$ следует, что $[G, O_i] \subseteq O_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, t$. Очевидно, что T — π-сепарабельная группа, следовательно, T содержит холлову π-подгруппу T_π (см. [10, 1.7.6 и 1.7.7]). Поскольку $T/T \cap K \cong TK/K$ является π-замкнутой, $T_\pi(T \cap K) = T_\pi(T \cap O_{\pi'}(K))$ нормальна в T. Так как

$$1 = O_0 \subseteq T \cap O_1 \subseteq T \cap O_2 \subseteq \dots \subseteq T \cap O_{t-1} \subseteq T \cap O_t = T \cap O_{\pi'}(K)$$

— нормальный ряд группы $T \cap O_{\pi'}(K)$ и

$$[T_\pi, T \cap O_i] \subseteq [T_\pi, T] \cap [T_\pi, O_i] \subseteq T \cap O_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, t,$$

получаем, что $T \cap O_{\pi'}(K) \subseteq C_T(T_\pi)$ по [9, A12.3]. Отсюда видно, что T_π нормальна в T. $\square$

Лемма 9. *Пусть π — множество простых чисел и G — π-разрешимая группа.*

1. *Если $O_{\pi'}(G) = 1$ и $O_\pi(G) \leq H \leq G$, то $O_{\pi'}(H) = 1$.*

2. *Пусть S — π'-подгруппа группы G. Если индекс группы $N_G(S)$ в G является π'-числом, то $S \subseteq O_{\pi'}(G)$.*

Доказательство. 1. Поскольку $O_\pi(G)$ и $O_{\pi'}(H)$ нормальны в H и $O_\pi(G) \cap O_{\pi'}(H) = 1$, получаем, что $O_{\pi'}(H) \leq C_G(O_\pi(G))$. Однако по лемме 4 выполнено $C_G(O_\pi(G)) \subseteq O_\pi(G)$. Таким образом, $O_{\pi'}(H) = 1$.

2. Положим $\overline{G} = G/O_{\pi'}(G)$ и $\overline{S} = SO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G)$. Пусть T — холлова π-подгруппа группы $N_G(S)$. Тогда T — холлова π-подгруппа и группы G, поскольку $|G : N_G(S)|$ является π'-числом. Значит, $\overline{T} = TO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G)$ — холлова π-подгруппа группы $\overline{G}$. Ясно, что $O_{\pi'}(\overline{G}) = 1$ и $\overline{G}$ π-разрешима. Так как $O_\pi(\overline{G}) \leq \overline{T}$ и $\overline{T} \subseteq N_{\overline{G}}(\overline{S})$, получаем, что $\overline{T}\overline{S}$ — подгруппа в $\overline{G}$, содержащая $O_\pi(\overline{G})$. В силу утверждения 1 имеем $O_{\pi'}(\overline{T}\overline{S}) = 1$. Поскольку S — π'-группа, $\overline{S}$ тоже π'-группа. Получаем, что $\overline{S} \leq O_{\pi'}(\overline{T}\overline{S})$, так как $\overline{T} \subseteq N_{\overline{G}}(\overline{S})$. Следовательно, $\overline{S} = 1$, и, значит, $S \leq O_{\pi'}(G)$. $\square$

3. Доказательство теоремы A

Для доказательства теоремы A нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 10. *Если нормализатор любой силовской подгруппы группы G имеет нильпотентное холлово добавление в G, то G не является неабелевой простой группой.*

Доказательство. Допустим, что G — неабелева простая группа. Пусть p — наименьший простой делитель числа $|G|$ и G_p — силовская p-подгруппа группы G. Тогда $N_G(G_p)$ разрешима по теореме Фейта — Томпсона. Пусть H_1 — нильпотентное холлово добавление к $N_G(G_p)$, q — произвольный простой делитель числа $|H_1|$ и G_q — силовская q-подгруппа группы G, содержащаяся в H_1. По условию $N_G(G_q)$ имеет нильпотентное холлово добавление H_2 в G. Покажем, что имеют место следующие утверждения.

(1) *H_2 содержит сопряженную с G_p подгруппу, и без потери общности можно считать, что $G_p \subseteq H_2$.*

Если $p \nmid |H_2|$, то $p \nmid |G : N_G(G_q)|$. Значит, $N_G(G_q)$ содержит некоторую силовскую p-подгруппу группы G, и без потери общности можно считать, что $G_p \subseteq N_G(G_q)$. Ясно, что $H_1 \subseteq N_G(G_q)$, поскольку H_1 нильпотентна. Следовательно, $G = N_G(G_p)H_1 = N_G(G_p)N_G(G_q)$, и, значит, по лемме 1 получаем, что

${G_p}^G \leq N_G(G_q) < G$. Это означает, что G содержит нетривиальную нормальную подгруппу; противоречие. Таким образом, $p \mid |H_2|$ и без потери общности можно считать, что $G_p \subseteq H_2$.

(2) *Пусть $N = N_G(G_p)$. Тогда $\pi(H_2) = \pi(F(N))$ для любого $q \in \pi(H_1)$ и для любого нильпотентного холлова добавления H_2 группы $N_G(G_q)$ в G. Значит, H_2 не зависит от выбора q, простого делителя числа $|H_1|$.*

Во-первых, H_2 нильпотентна и $G_p \subseteq H_2$, поэтому $H_2 \subseteq N$. Если $\pi(F(N)) \nsubseteq \pi(H_2)$, то N содержит нормальную r-подгруппу R для некоторого простого числа r, не делящего $|H_2|$. Поскольку $G = N_G(G_q)H_2$, группа R содержится в некоторой сопряженной с $N_G(G_q)$ подгруппе. Без потери общности можно считать, что $R \subseteq N_G(G_q)$. Так как $G = N_G(G_p)N_G(G_q) = NN_G(G_q)$, получаем, что $R^G \leq N_G(G_q) < G$ по лемме 1; противоречие. Следовательно, $\pi(F(N)) \subseteq \pi(H_2)$. Поскольку $F(N)$ нормальна в N и $H_2 \subseteq N$, выполнено $F(N) \subseteq H_2$. Если найдется простой делитель s числа $|H_2|$ такой, что $s \notin \pi(F(N))$, то силовская s-подгруппа S группы H_2 будет содержаться в $C_N(F(N))$. Но N разрешима, поэтому $C_N(F(N)) \subseteq F(N)$; противоречие. Значит, $\pi(H_2) = \pi(F(N))$.

(3) *Для любого простого числа $q \in \pi(H_1)$ и любой силовской q-подгруппы G_q группы G группа H_2 является минимальным нильпотентным холловым добавлением к $N_G(G_q)$.*

Непосредственно следует из (2).

(4) *Для любого простого числа $r \in \pi(H_2)$ и любой силовской r-подгруппы G_r группы G группа H_1 является нильпотентным холловым добавлением к $N_G(G_r)$ в G.*

В силу леммы 3 можно считать, что $G_r \subseteq H_2$ и тем самым $H_2 \subseteq N_G(G_r)$. Предположим, что для некоторого простого делителя q числа $|H_1|$ выполнено $q \nmid |G : N_G(G_r)|$. Тогда $N_G(G_r)$ содержит силовскую q-подгруппу G_q группы G. В силу (3) выполнены равенства $G = N_G(G_q)H_2 = N_G(G_q)N_G(G_r)$. Тогда по лемме 1 получаем, что ${G_q}^G \leq N_G(G_r) < G$. Это противоречие показывает, что $|H_1| \mid |G : N_G(G_r)|$. По лемме 2 группа H_1 содержится в некотором нильпотентном холловом добавлении к $N_G(G_r)$ в G. Если существует простое число s такое, что $s \mid |G : N_G(G_r)|$ и $s \nmid |H_1|$, то $s \nmid |G : N_G(G_p)|$, поскольку $\pi(|G : N_G(G_p)| \subseteq \pi(H_1)$. Пусть G_s — силовская s-подгруппа группы G, лежащая в $N = N_G(G_p)$. Поскольку H_1 содержится в некотором нильпотентном холловом добавлении к $N_G(G_r)$ в G и $s \mid |G : N_G(G_r)|$, по лемме 2 группа $N_G(G_s)$ содержит подгруппу, сопряженную с H_1. Значит, $G = NH_1 = NN_G(G_s)$ по лемме 3. Тогда из леммы 1 следует, что ${G_s}^G \leq N < G$; противоречие. Следовательно, $\pi(H_1) = \pi(|G : N_G(G_r)|)$ и $G = N_G(G_r)H_1$.

(5) *Заключительное противоречие.*

Если $G = H_1H_2$, то G разрешима по лемме 5; противоречие. Значит, $G \neq H_1H_2$ и $\pi(G) \neq \pi(H_1) \cup \pi(H_2)$. Пусть $s \in \pi(G) \setminus (\pi(H_1) \cup \pi(H_2))$ и G_s — силовская s-подгруппа группы G. Предположим, что $|H_1| \nmid |N_G(G_s)|$. Тогда найдется простое число $q \in \pi(H_1)$ такое, что нильпотентное холлово добавление H к $N_G(G_s)$ в G содержит некоторою силовскую q-подгруппу G_q группы G. Если $|H_2| \nmid |N_G(G_s)|$, то H содержит также силовскую r-подгруппу группы G для некоторого простого числа $r \in \pi(H_2)$. Следовательно, в G есть нильпотентная холлова $\{q, r\}$-подгруппа и можно считать, что $G_r \subseteq N_G(G_q)$. Это противоречит (3). Тем самым $|H_2| \mid |N_G(G_s)|$ и, значит, $N_G(G_s)$ содержит подгруппу, сопряженную с H_2, по лемме 2. Из леммы 3 следует, что $G = N_G(G_q)H_2 = N_G(G_q)N_G(G_s)$. Поскольку $s \nmid |G : N_G(G_q)|$ по (3), можно считать, что $G_s \subseteq N_G(G_q)$. Тогда по лемме 1 получаем, что ${G_s}^G \leq N_G(G_q) < G$. Это противоречие показывает, что $|H_1| \mid |N_G(G_s)|$. Следовательно, $G = N_G(G_p)H_1 = N_G(G_p)N_G(G_s)$ по леммам 2 и 3. Однако, поскольку $s \notin \pi(H_1)$, выполнено $G_s \subseteq (N_G(G_p))^x$ для некоторого $x \in G$. Снова применяя леммы 1 и 3, заключаем, что ${G_s}^G \leq (N_G(G_p))^x < G$. Это последнее противоречие завершает доказательство. □

Лемма 11. *Предположим, что нормализатор любой силовской подгруппы группы G имеет нильпотентное холлово добавление в G. Если M — нормальная подгруппа в G, то нормализатор любой силовской подгруппы группы M имеет нильпотентное холлово добавление в M.*

Доказательство. Пусть p — простой делитель числа $|M|$ и G_p — силовская p-подгруппа группы G. Тогда $M_p = G_p \cap M$ — силовская p-подгруппа группы M. Покажем, что $N_M(M_p)$ имеет нильпотентное холлово добавление в M. По условию $N_G(G_p)$ обладает нильпотентным холловым добавлением H в G. По теореме Шура — Цассенхауза G_p имеет дополнение A в $N_G(G_p)$ и $(|A|, p) = 1$. Положим $M_1 = M \cap N_G(G_p)$. Тогда $M_1 \lhd N_G(G_p) = [G_p]A$. По лемме 7 имеем $M_1 = [M_1 \cap G_p](M_1 \cap A) = [M \cap N_G(G_p) \cap G_p](M \cap N_G(G_p) \cap A) = [M_p](M \cap A)$. Поскольку $(|G : N_G(G_p)|, |G : H|) = 1$, выполнено $M = (M \cap N_G(G_p))(M \cap H) = M_1(M \cap H) = ([M_p](M \cap A))(M \cap H) = N_M(M_p)(M \cap H)$. Так как $M \cap H$, очевидно нильпотентная холлова подгруппа группы M, $N_M(M_p)$ имеет нильпотентное холлово добавление в M. □

Доказательство теоремы A. По лемме 10 группа G не является неабелевой простой группой. Пусть M — нетривиальная нормальная подгруппа группы G. Тогда условие теоремы выполнено и для M по лемме 11. Значит, применяя индукцию по $|G|$, можно считать, что M разрешима. Для любого простого числа $p \in \pi(G/M)$ обозначим через G_p некоторою силовскую p-подгруппу группы G. Тогда по лемме 6 имеем $N_{G/M}(G_pM/M) = N_G(G_p)M/M$. Ясно, что G_pM/M — силовская p-подгруппа группы G/M. Пусть H — нильпотентное холлово добавление к $N_G(G_p)$ в G. Тогда HM/M — нильпотентное холлово добавление к $N_G(G_p)M/M$ в G/M. Значит, условие теоремы выполнено для G/M, поэтому G/M разрешима по индукционному предположению. Следовательно, G разрешима. □

4. Доказательства теорем B, C и приложения

Доказательство теоремы B. Необходимость. По теореме A группа G разрешима. Значит, достаточно доказать, что выполнено (i) или (ii). Если $|\pi(G)| \leq 2$, то это очевидно. Предположим, что $|\pi(G)| \geq 3$ и H — произвольная трипримарная холлова подгруппа группы G. Сначала покажем, что условие теоремы выполнено и для H. Пусть p — простой делитель числа $|H|$ и H_p — силовская p-подгруппа группы H. Тогда H_p, очевидно, является силовской p-подгруппой группы G. По условию существует нильпотентная холлова подгруппа T группы G такая, что $G = N_G(H_p)T$. Поскольку G разрешима, $N_G(H_p)$ содержит дополнение U к T в G. Ясно, что U — холлова подгруппа группы G. По предложению [9, I(4.16)] можно выбрать холлову систему Σ группы G, которая сужается на $N_G(H_p)$ такую, что $U \in \Sigma$. Более того, по [9, I(4.16)] некоторая группа, сопряженная с T, будет лежать в Σ. Следовательно, в силу леммы 3 можно считать, что $T \in \Sigma$. Поскольку H_p — единственная силовская p-подгруппа в $N_G(H_p)$, получаем, что $H_p \in \Sigma$. Пусть H^x — та из сопряженных с H подгрупп, которая принадлежит Σ. Тогда H_p — силовская

p-подгруппа и в H^x. По лемме 7 выполнено равенство $H^x = (H^x \cap U)(H^x \cap T) = (H^x \cap N_G(H_p))(H^x \cap T)$. Ясно, что $H^x \cap N_G(H_p) = N_{H^x}(H_p)$ и $H^x \cap T$ — нильпотентная холлова подгруппа в H^x. Это означает, что нормализатор силовской p-подгруппы H_p в H^x имеет нильпотентное холлово добавление в H^x. Следовательно, нормализатор силовской p-подгруппы группы H имеет нильпотентное холлово добавление в H. Значит, условие теоремы выполнено для H.

Пусть $\pi(H)=\{p,q,r\}$. Если в H нет нильпотентных бипримарных холловых подгрупп, то нормализатор любой силовской подгруппы группы H имеет в H примарный индекс и любая силовская подгруппа группы H не нормальна в H. Значит, без потери общности можно считать, что существуют силовские p-, q-, r-подгруппы H_p, H_q, H_r группы H, являющиеся также силовскими подгруппами группы G, такие, что $H_q \subseteq N_H(H_p)$, $H_r \subseteq N_H(H_q)$ и $N_H(H_r)$ содержит подгруппу, сопряженную с H_p в H. Покажем теперь, что $H_p \subseteq N_H(H_r)$. Допустим, что ${H_p}^x \subseteq N_H(H_r)$, где $x \in H$. Поскольку $H_q \subseteq N_H(H_p)$ и $H = H_pH_qH_r$, можно считать, что $x \in H_r$. Тогда $H_p \subseteq (N_H(H_r))^{x^{-1}} = N_H(H_r)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть p — произвольный простой делитель числа $|G|$ и G_p — силовская p-подгруппа группы G. Пусть T — холлово добавление к $N_G(G_p)$ в G наименьшего порядка. Тогда $\pi(T) = \pi(|G : N_G(G_p)|)$. Если $|\pi(T)| < 2$, то T нильпотентна. Предположим, что $|\pi(T)| \geq 2$ и q, r — любые различные простые делители числа $|T|$. Поскольку G разрешима, G обладает холловой системой Σ такой, что $G_p \in \Sigma$. По лемме 3 и [9, I(4.16)] можно считать, что $T \in \Sigma$ и G_q, G_r — силовские q-, r-подгруппы группы T соответственно такие, что G_q, $G_r \in \Sigma$. Так как G_p, G_q и G_r все принадлежат Σ, они попарно перестановочны. Пусть $H = G_pG_qG_r$. Тогда ни G_q, ни G_r не лежат в $N_H(G_p)$. По условию G_pG_q — нильпотентная холлова подгруппа группы H. В силу произвольности выбора p и q получаем, что T нильпотентна. $\square$

Пример. Пусть $H = Z_2 \wr Z_3 \times Z_3 \wr Z_5 \times Z_5 \wr Z_2$, где Z_i $(i = 2, 3, 5)$ — циклическая группа порядка i. Тогда в H нет нильпотентных бипримарных холловых подгрупп, но очевидно, что нормализатор любой силовской подгруппы группы H имеет нильпотентное холлово добавление в H. Значит, существуют группы, которые удовлетворяют условию (ii) из теоремы B, но не удовлетворяют условию (i).

Следствие 1. *Пусть G — группа. Если нормализатор любой силовской подгруппы группы $G/Z_\infty(G)$ имеет нильпотентное холлово добавление в $G/Z_\infty(G)$, то нормализатор любой силовской подгруппы группы G имеет нильпотентное холлово добавление в G.*

Доказательство. Если нормализатор любой силовской подгруппы группы $G/Z_\infty(G)$ имеет нильпотентное холлово добавление в $G/Z_\infty(G)$, то $G/Z_\infty(G)$ разрешима по теореме A и, значит, G тоже разрешима. В силу теоремы B достаточно доказать, что если H — некоторая трипримарная холлова подгруппа группы G, то H удовлетворяет условию (i) или (ii) из теоремы B. Пусть $Z = Z_\infty(G)$. Предположим, что Z содержит некоторую силовскую подгруппу группы H, скажем S. Тогда $S \subseteq H \cap Z \subseteq Z_\infty(H)$ и, значит, любая бипримарная холлова подгруппа группы H, содержащая S, нильпотентна. Это показывает, что H содержит нильпотентную бипримарную холлову подгруппу. Если Z не содержит ни одной из силовских подгрупп группы H, то HZ/Z — трипримарная холлова подгруппа в G/Z. Следовательно, группа HZ/Z удовлетворяет условию (i) или (ii) из теоремы B. Допустим, что HZ/Z содержит нильпотентную бипримарную холлову подгруппу T/Z, и пусть $\pi(T/Z) = \{p, q\}$. Тогда T, очевидно, нильпотентна. Значит, в T есть нильпотентная холлова $\{p, q\}$-подгруппа. Следовательно, в H есть нильпотентная бипримарная холлова подгруппа, поскольку холлова $\{p, q\}$-подгруппа группы T будет холловой $\{p, q\}$-подгруппой и в H. Рассуждая аналогичным образом, получаем, что если HZ/Z удовлетворяет условию (ii) из теоремы B, то ему по лемме 8 удовлетворяет и H. $\square$

Доказательство теоремы C. Предположим, что нормализатор любой силовской подгруппы группы G имеет нильпотентное холлово добавление в G. Тогда G разрешима по теореме A. Покажем, что в G есть нильпотентная холлова $\pi_{G,p}$-подгруппа для любого простого p, делящего $|G|$. Пусть G_p — силовская p-подгруппа группы G и H — нильпотентное холлово добавление к $N_G(G_p)$ в G. Достаточно доказать, что $\pi_{G,p} \subseteq \pi(H)$. Пусть $\pi = \pi(H) \cup \{p\}$. Тогда индекс группы $N_G(G_p)$ в G — это π-число. По лемме 9 имеем $G_p \subseteq O_\pi(G)$ и, значит, ${G_p}^G \subseteq O_\pi(G)$. Следовательно, $\pi_{G,p} \subseteq \pi \setminus \{p\} \subseteq \pi(H)$.

Обратно, предположим, что G разрешима и в G есть нильпотентная холлова $\pi_{G,p}$-подгруппа H для любого простого делителя p числа $|G|$. Пусть $M = {G_p}^G$. Тогда $H \cap M$ — холлова $\pi_{G,p}$-подгруппа в M и, значит, $M = G_p(M \cap H)$. В силу аргумента Фраттини $G = N_G(G_p)M = N_G(G_p)(M \cap H) = N_G(G_p)H$. Это показывает, что $N_G(G_p)$ имеет нильпотентное холлово добавление в G при любом $p \in \pi(G)$.

Равенство $\pi(|G : N_G(G_p)|) = \pi_{G,p}$ немедленно следует из доказательства. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2. *Нормализатор любой силовской подгруппы группы G имеет нильпотентное холлово добавление в G тогда и только тогда, когда для любого простого p, делящего $|G|$, и любой силовской p-подгруппы G_p группы G существует подгруппа Q группы G такая, что $G_pQ \lhd G$ и в G есть нильпотентная холлова $\pi(Q)$-подгруппа. При выполнении любого из условий группа G разрешима.*

Доказательство. Необходимость следует непосредственно из теоремы C: нужно взять Q равной дополнению к G_p в ${G_p}^G$. Далее, поскольку ${G_p}^G \subseteq G_pQ \lhd G$, имеем $\pi_{G,p} = \pi({G_p}^G) \setminus \{p\} \subseteq \pi(Q)$. Значит, в силу условия G содержит нильпотентную холлову $\pi_{G,p}$-подгруппу. Достаточность следует из теоремы C. $\square$

Следствие 3. *Пусть G — группа. Индекс нормализатора любой силовской подгруппы группы G является степенью простого числа тогда и только тогда, когда для любого простого делителя p числа $|G|$ существуют простое число $q \in \pi(G)$ и q-подгруппа Q группы G такие, что $G_pQ \lhd G$. Более того, если в G есть ненормальная холлова $\{p, q\}$-подгруппа, то Q — нормальная подгруппа в G.*

Доказательство. Пусть p — некоторый простой делитель числа $|G|$ и G_p — силовская p-подгруппа группы G. Если $G_p \lhd G$, то можно взять $Q = 1$. Предположим, что $|G : N_G(G_p)| = q^\alpha$, где q — простое число и α — положительное целое число. Тогда по теореме C выполнено $\pi_{G,p} = \{q\}$ и по следствию 2 существует q-подгруппа Q группы G такая, что $G_pQ = {G_p}^G \lhd G$. Разрешимость группы G можно получить по теореме A. Поскольку силовская подгруппа всегда нильпотентна, достаточность следует просто из следствия 2.

Наконец, предположим, что в G есть ненормальная холлова $\{p,q\}$-подгруппа. Пусть G_q — силовская q-подгруппа группы G, содержащая Q. Если $G_q \triangleleft G$, то $G_pG_q = G_pQG_q \triangleleft G$; противоречие. Если $|G : N_G(G_q)|$ — p-число, то существует p-группа P такая, что $G_qP \triangleleft G$. Следовательно, $G_pG_q = G_pQG_qP \triangleleft G$; опять противоречие. Допустим теперь, что $|G : N_G(G_q)|$ — r-число, где r — простое число и $r \neq p$. Тогда существует r-группа R такая, что $G_qR \triangleleft G$. Значит, $Q = G_pQ \cap G_qR \triangleleft G$. $\square$

Из следствия 3 непосредственно вытекает

Следствие [7]. *Предположим, что в группе G нет ни нормальных силовских подгрупп, ни нормальных бипримарных холловых подгрупп. Тогда индекс нормализатора любой силовской подгруппы является степенью простого числа в том и только в том случае, если для любого $p \in \pi(G)$ существует простое число $q \in \pi(G)$ такое, что $G_pF_q \triangleleft G$, где F_q — силовская q-подгруппа в подгруппе Фиттинга $F(G)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups III. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl, 1982.
2. *Го Вэньбинь.* О нормализаторах силовских подгрупп // Докл. АН БССР. 1993. Т. 37, № 4. С. 22–24.
3. *D'Aniello A., Vivi De, Giordano G.* Saturated formations and Sylow normalizers // Bull. Austral. Math. Soc. 2004. V. 69. P. 522–548.
4. *Кондратьев А. С.* Критерий 2-нильпотентности конечных групп // Подгрупповая структура групп. Свердловск, 1988. С. 82–84.
5. *Chigira N.* Number of Sylow subgroups and p-nilpotence of finite groups // J. Algebra. 1998. V. 201. P. 71–85.
6. *Zhang J.* Sylow numbers of finite groups // J. Algebra. 1995. V. 176. P. 111–123.
7. *Го Вэньбинь.* Конечные группы с заданными индексами нормализаторов // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 2. С. 295–300.
8. *Guo W., Shum K. P.* A note on finite groups whose normalizers of Sylow 2, 3-subgroups are prime power indices // J. Appl. Algebra Discr. Struct. 2005. V. 3. P. 1–9.
9. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
10. *Guo W.* The Theory of Classes of Groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press – Kluwer Acad. Publ., 2000.
11. *Wielandt H.* Zum Satz von Sylow // Math. Z. 1954. Bd 60. S. 407–408.
12. *Wielandt H.* Über das Produkt von paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen // Math. Z. 1951. Bd 55. S. 1–7.

Статья поступила 26 июня 2008 г.

Li Baojun (Ли Баоцзюнь)
Mathematics and information Science Department,
Chengdu University of Information Technology,
Chengdu 610225, P.R.China
baojunli@mail.ustc.edu.cn

Guo Wenbin (Го Вэньбинь)
Department of Mathematics, Xuzhou Normal University,
Xuzhou 221116, P.R.China
wbguo@xznu.edu.cn

Huang Jianhong (Хуан Цзяньхун)
Department of Mathematics, University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P.R.China
jhh320@126.com