Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 512.66

ЛЕММЫ О ГОМОМОРФИЗМАХ В P–ПОЛУАБЕЛЕВЫХ КАТЕГОРИЯХ

Я. А. Копылов

Аннотация. Исследован вопрос о справедливости классических лемм о пяти и девяти гомоморфизмах в P-полуабелевой категории.

Ключевые слова: строгий морфизм, P-полуабелева категория, лемма о пяти гомоморфизмах, лемма о девяти гомоморфизмах.

Академику Ю. Г. Решетняку к 80-летию

Введение

В последнее время гомологическая алгебра в аддитивных категориях, не являющихся абелевыми, получила весьма активное развитие в связи с изучением гомологических аспектов функционального анализа, топологической алгебры и некоторых других вопросов.

В неабелевых аддитивных категориях классические диаграммные леммы и теоремы гомологической алгебры обычно верны лишь при дополнительных предположениях на морфизмы, составляющие исходную диаграмму. В случае квазиабелевых категорий эти предположения обычно сводятся к строгости некоторых морфизмов. В более общих аддитивных категориях иногда еще требуется налагать более жесткие условия, например, условие стабильности некоторых ядер или коядер.

Н. В. Глотко [1] в связи с изучением ковариантных функторов двух аргументов получил леммы о пяти и девяти гомоморфизмах в квазиабелевых (полуабелевых в смысле Д. А. Райкова) категориях. Доказательства Н. В. Глотко опираются на теоремы о Ker-Coker-последовательности в квазиабелевой категории [2, 3].

В настоящей работе мы, используя идеи Н. В. Глотко и теоремы о точности Ker-Coker-последовательности в P-полуабелевой категории [4], устанавливаем варианты лемм о пяти и девяти гомоморфизмах для P-полуабелевых категорий (теоремы 2 и 3).

Леммы о гомоморфизмах

Будем рассматривать аддитивные категории, в которых выполнена следующая

Работа выполнена при поддержке Специального целевого проекта GALA в рамках Программы NEST Комиссии Европейских сообществ (грант 028766), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–5682.2008.1) и гранта Президента РФ (код проекта МК–2137.2008.1).

Аксиома 1. *Каждый морфизм* α *имеет ядро* $\operatorname{Ker}\alpha$ *и коядро* $\operatorname{Coker}\alpha$.

В категории, в которой выполнена аксиома 1, для каждого морфизма α определено его каноническое разложение

$$\alpha = (\operatorname{im}\alpha)\bar{\alpha}(\operatorname{coim}\alpha), \quad \text{где } \operatorname{im}\alpha = \ker\operatorname{coker}\alpha,\ \operatorname{coim}\alpha = \operatorname{coker}\ker\alpha.$$

Морфизм α называется *строгим*, если $\bar{\alpha}$ — изоморфизм.

Будем использовать следующие обозначения: O_c — класс всех строгих морфизмов, M — класс всех мономорфизмов, M_c — класс всех строгих мономорфизмов, P — класс всех эпиморфизмов, P_c — класс всех строгих эпиморфизмов. Будем писать $\alpha \mid \beta$, если $\alpha = \ker\beta$ и $\beta = \operatorname{coker}\alpha$.

Лемма 1 [5–8]. *В аддитивной категории, удовлетворяющей аксиоме* 1, *выполнены следующие утверждения:*

1) $\ker\alpha \in M_c$, $\operatorname{coker}\alpha \in P_c$ *для любого морфизма* α*;*

2) $\alpha \in M_c \Longleftrightarrow \alpha = \operatorname{im}\alpha$, $\alpha \in P_c \Longleftrightarrow \alpha = \operatorname{coim}\alpha$*;*

3) *морфизм* α *строгий тогда и только тогда, когда он может быть представлен в виде* $\alpha = \alpha_1\alpha_0$, *где* $\alpha_0 \in P_c$, $\alpha_1 \in M_c$*; для любого такого представления* $\alpha_0 = \operatorname{coim}\alpha$, $\alpha_1 = \operatorname{im}\alpha$*;*

4) *если коммутативный квадрат*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g"'] & D \arrow[d, "f"'] \\ A \arrow[r, "\beta"] & B \end{tikzcd} \tag{1}$$

коуниверсален, то $f \in M \Longrightarrow g \in M$, $f \in M_c \Longrightarrow g \in M_c$, *если он универсален, то* $g \in P \Longrightarrow f \in P$, $g \in P_c \Longrightarrow f \in P_c$.

Аддитивная категория называется *P-полуабелевой*, просто *полуабелевой* [9–12], или *предабелевой* [5], если в ней выполнена аксиома 1 и следующая

Аксиома 2. *Для любого морфизма* α *морфизм* $\bar{\alpha}$ *является мономорфизмом и эпиморфизмом.*

Лемма 2 [2]. *В произвольной* P-*полуабелевой категории выполнены следующие утверждения:*

1) $gf \in M_c \Longrightarrow f \in M_c$, $gf \in P_c \Longrightarrow g \in P_c$*;*

2) *если* $f, g \in M_c$ *и* fg *определено, то* $fg \in M_c$, *если* $f, g \in P_c$ *и* fg *определено, то* $fg \in P_c$*;*

3) *если* $fg \in O_c$, $f \in M$, *то* $g \in O_c$, *если* $fg \in O_c$, $g \in P$, *то* $f \in O_c$.

Аддитивная категория, удовлетворяющая аксиоме 1, называется *квазиабелевой* [9, 13, 14] (в [15] такие категории названы *предабелевыми*, в [6] — *полуабелевыми*, в [12] — *почти абелевыми*), если в ней выполнена

Аксиома 3. *Если квадрат* (1) *коуниверсален, то* $f \in P_c \Longrightarrow g \in P_c$. *Если квадрат* (1) *универсален, то* $g \in M_c \Longrightarrow f \in M_c$.

Как известно [6, 8, 12, 14], всякая квазиабелева категория P-полуабелева. Как недавно было показано В. Румпом [16], существуют P-полуабелевы категории, не являющиеся квазиабелевыми.

В [8, теорема 1] В. И. Кузьминов и А. Ю. Черевикин установили следующий факт.

Лемма 3. *Аддитивная категория $\mathscr{A}$ с ядрами и коядрами* P*-полуабелева, если и только если выполнены следующие условия:*

P1) *если квадрат* (1) *коуниверсален, то $f \in P_c \Longrightarrow g \in P$;*

P2) *если квадрат* (1) *универсален, то $g \in M_c \Longrightarrow f \in M$.*

Если для морфизма $f \in P_c$ в коуниверсальном квадрате (1) в аддитивной категории с ядрами и коядрами всегда $g \in P_c$ (для морфизма $g \in M_c$ в универсальном квадрате (1) всегда $f \in M_c$), то f называется *стабильным коядром* (g называется *стабильным ядром*).

Говорят, что последовательность $\ldots \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} \ldots$ в P-полуабелевой категории *точна в члене* B, если $\operatorname{im} a = \ker b$ (или, что равносильно, $\operatorname{coker} a = \operatorname{coim} b$).

Для произвольного коммутативного квадрата (1) будем обозначать символом $\hat{g} : \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta$ морфизм, заданный условием $g(\ker\alpha) = (\ker\beta)\hat{g}$, а символом $\hat{f} : \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta$ — морфизм, заданный условием $\hat{f}(\operatorname{coker}\alpha) = (\operatorname{coker}\beta)f$.

Как хорошо известно (см., например, [7]), если квадрат (1) коуниверсален, то $\hat{g} : \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta$ — изоморфизм.

Всюду в дальнейшем объемлющая категория $\mathscr{A}$ предполагается P-полуабелевой.

Нам понадобится следующая лемма из [4], доказательство которой почти дословно совпадает с доказательством леммы 6 в [2].

Лемма 4. *Пусть квадрат* (1) *коуниверсален. Тогда если $\beta \in O_c$, то $\hat{f} \in M$.*

Пусть в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} & & A_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & B_0 & \xrightarrow{\psi_0} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & C_1 & & \end{array} \tag{2}$$

$\psi_0 = \operatorname{coker}\varphi_0$, $\varphi_1 = \ker\psi_1$. Как и в случае абелевой категории, диаграмме (2) соответствуют полуточные Ker-последовательность

$$\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\varepsilon} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Ker}\gamma \tag{3}$$

и Coker-последовательность

$$\operatorname{Coker}\alpha \xrightarrow{\tau} \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\theta} \operatorname{Coker}\gamma. \tag{4}$$

Здесь $\varepsilon = \widehat{\varphi}_0$, $\zeta = \widehat{\psi}_0$, $\tau = \widehat{\varphi}_1$, $\theta = \widehat{\psi}_1$. Как показано в [4], если в (2) ψ_0 — стабильное коядро или φ_1 — стабильное ядро, то определен морфизм $\delta : \operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{Coker}\alpha$, связывающий последовательности (3) и (4) в единую полуточную Ker-Coker-последовательность

$$\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\varepsilon} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\alpha \xrightarrow{\tau} \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\theta} \operatorname{Coker}\gamma. \tag{5}$$

В [4] доказаны следующие факты.

Лемма 5. *Пусть в диаграмме* (2) $\varphi_0 = \ker\psi_0$ ($\psi_1 = \operatorname{coker}\psi_1$). *Тогда* $\varepsilon = \ker\zeta$ ($\theta = \operatorname{coker}\tau$).

Теорема 1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Если в диаграмме* (2) $\varphi_0 \in O_c$, $\ker\alpha$ *— стабильное ядро, то последовательность* (3) *точна и* $\varepsilon \in O_c$; *если в* (2) $\alpha \in O_c$, *то последовательность* (3) *точна.*

2. *Если в диаграмме* (2) $\psi_1 \in O_c$, $\operatorname{coker}\gamma$ *— стабильное коядро, то последовательность* (4) *точна и* $\theta \in O_c$; *если в* (2) $\gamma \in O_c$, *то последовательность* (4) *точна.*

3. *Если в диаграмме* (2) $\alpha \in O_c$ *и* $\ker\gamma$ *и* φ_1 *— стабильные ядра, то последовательность* (5) *точна в членах* $\operatorname{Ker}\beta$ *и* $\operatorname{Ker}\gamma$. *Если* $\gamma \in O_c$ *и* $\operatorname{coker}\alpha$ *и* ψ_0 *— стабильные коядра, то последовательность* (5) *точна в членах* $\operatorname{Coker}\beta$ *и* $\operatorname{Coker}\alpha$.

Следующая лемма является аналогом теоремы 3 из [8].

Лемма 6. *Пусть в коммутативной диаграмме*

$$\begin{tikzcd} & B_1 \arrow[dd, "r"] \arrow[dr, "q_1"] & \\ A \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & & C \\ & B_2 \arrow[ur, "q_2"'] & \end{tikzcd}$$

$p_1|q_1$, $p_2|q_2$. *Тогда* $r \in M \cap P$.

Если дополнительно q_1 *— стабильное коядро или* p_2 *— стабильное ядро, то* r *— изоморфизм.*

Доказательство. Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "t_2"'] & B_1 \arrow[d, "q_1"] \\ B_2 \arrow[r, "q_2"] & C\,. \end{tikzcd}$$

По лемме 3 $t_2 \in P$. Имеем $q_2(rt_1 - t_2) = 0$. Так как $p_2 = \ker q_2$, существует такой морфизм $s : D \to A$, что $p_2 s = rt_1 - t_2$. Положим $u = t_1 - p_1 s$. Тогда $ru = rt_1 - rp_1 s = rt_1 - p_2 s = t_2$. Поскольку $t_2 \in P$, имеем также $r \in P$. Двойственным образом получаем $r \in M$.

Пусть теперь q_2 — стабильное коядро. Тогда $t_2 \in P_c$ и соотношение $ru = t_2$ по лемме 2 влечет, что $r \in P_c$. По доказанному выше $r \in M$, откуда r — изоморфизм. Случай, когда p_2 — стабильное ядро, получается по двойственности. Лемма доказана.

Следующие ниже теоремы 2 и 3 являются частичными обобщениями результатов Н. В. Глотко [1] на случай P-полуабелевых категорий.

Теорема 2 [лемма о пяти гомоморфизмах]. *Пусть в коммутативной диаграмме*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & B_1 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & C_1 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "\alpha_3"'] & D_1 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "\alpha_4"'] & E_1 \arrow[d, "\alpha_5"'] \\ A_2 \arrow[r, "\psi_1"] & B_2 \arrow[r, "\psi_2"] & C_2 \arrow[r, "\psi_3"] & D_2 \arrow[r, "\psi_4"] & E_2 \end{tikzcd}$$

верхняя и нижняя строки полуточны и точны в C_1, D_1, C_2, D_2. *Пусть, дополнительно,* $\alpha_2 \in P$, $\varphi_3 \in O_c$, $\alpha_5 \in M$ *и* α_4 *— стабильное коядро. Тогда* $\alpha_3 \in P$.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & \operatorname{Im}\varphi_2 \arrow[r, "\operatorname{im}\varphi_2"] \arrow[d, "\theta"'] & C_1 \arrow[r, "\operatorname{coim}\varphi_3"] \arrow[d, "\alpha_3"'] & \operatorname{Im}\varphi_3 \arrow[r, "\operatorname{im}\varphi_3"] \arrow[d, "\nu"'] & D_1 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "\alpha_4"'] & E_1 \arrow[d, "\alpha_5"'] \\ B_2 \arrow[r, "\sigma"] & \operatorname{Im}\psi_2 \arrow[r, "\operatorname{im}\psi_2"] & C_2 \arrow[r, "\xi"] & \operatorname{Im}\psi_3 \arrow[r, "\operatorname{im}\psi_3"] & D_2 \arrow[r, "\psi_4"] & E_2 \end{tikzcd}.$$

Здесь учтено, что $\operatorname{Im}\varphi_3 = \operatorname{Coim}\varphi_3$, поскольку $\varphi_3 \in O_c$.

Из точности в членах D_1, D_2 и условия $\alpha_5 \in M$ легко следует, что квадрат

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Im}\varphi_3 \arrow[r, "\operatorname{im}\varphi_3"] \arrow[d, "\nu"'] & D_1 \arrow[d, "\alpha_4"'] \\ \operatorname{Im}\psi_3 \arrow[r, "\operatorname{im}\psi_3"] & D_2 \end{tikzcd}$$

коуниверсален. Так как α_4 — стабильное коядро, то $\nu \in P_c$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Im}\varphi_2 \arrow[r, "\operatorname{im}\varphi_2"] \arrow[d, "\theta"'] & C_1 \arrow[r, "\operatorname{coim}\varphi_3"] \arrow[d, "\alpha_3"'] & \operatorname{Im}\varphi_3 \arrow[r] \arrow[d, "\nu"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Im}\psi_2 \arrow[r, "\operatorname{im}\psi_2"] & C_2 \arrow[r, "\xi"] & \operatorname{Im}\psi_3 & \end{tikzcd},$$

в которой $\operatorname{coim}\varphi_3 = \operatorname{coker}(\operatorname{im}\varphi_2)$, $\operatorname{im}\psi_2 = \ker\xi$.

Так как $\sigma\alpha_2 = \theta\lambda \in P$, то $\theta \in P$. Кроме того, как установлено выше, $\nu \in P_c$. По теореме 1 последовательность

$$0 = \operatorname{Coker}\theta \xrightarrow{\widehat{\operatorname{im}\psi_2}} \operatorname{Coker}\alpha_3 \xrightarrow{\hat{\xi}} \operatorname{Coker}\nu = 0$$

точна, откуда $\operatorname{Coker}\alpha_3 = 0$, т. е. $\alpha_3 \in P$. Теорема 2 доказана.

Для дальнейшего нам понадобится следующий аналог леммы 7 из [2].

Лемма 7. *Предположим, что коммутативный квадрат* (1) *коуниверсален,* $\beta, f, (\operatorname{coker} f)\beta \in O_c$, $\operatorname{coker}\beta$ *и* $\operatorname{coker} g$ *— стабильные коядра, морфизм* $h : \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker}\hat{\beta}$ *определен условием* $h(\operatorname{coker}\beta) = (\operatorname{coker}\hat{\beta})(\operatorname{coker} f)$. *Тогда* $\hat{f} = \ker h$.

Доказательство. Представим f в виде $f = f_1 f_0$, где $f_1 \in M_c$, $f_0 \in P_c$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g_0"'] & D \arrow[d, "f_0"'] \\ E \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "g_1"'] & F \arrow[d, "f_1"'] \\ A \arrow[r, "\beta"] & B \end{tikzcd},$$

в которой нижний квадрат коуниверсален. Тогда $\hat{f} = \hat{f}_1\hat{f}_0$ и по лемме 4 $\hat{f}_0 \in M$. Так как $\hat{f}_0(\operatorname{coker}\alpha) = (\operatorname{coker}\gamma)f_0 \in P_c$, то $\hat{f}_0 \in P_c$. Следовательно, $\hat{f}_0$ — изоморфизм, и нам достаточно установить, что $\hat{f}_1 = \ker h$.

Поскольку $\hat{\beta}(\operatorname{coker} g) = (\operatorname{coker} f)\beta$ и $(\operatorname{coker} f)\beta \in O_c$, по лемме 2 $\hat{\beta} \in O_c$. По лемме 4 $\hat{\beta} \in M$. Значит, $\hat{\beta} \in M_c$ и $\hat{\beta} = \ker\operatorname{coker}\hat{\beta}$.

Пусть $u : X \to \operatorname{Coker}\beta$ — морфизм такой, что $hu = 0$. Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B & \xrightarrow{\operatorname{coker}\beta} & \operatorname{Coker}\beta\ . \end{array} \tag{6}$$

Так как $(\operatorname{coker}\hat{\beta})(\operatorname{coker} f)v = hus = 0$ и $\hat{\beta} = \ker\operatorname{coker}\hat{\beta}$, найдется такой морфизм $n : Y \to \operatorname{Coker} g$, что $\hat{\beta}n = (\operatorname{coker} f)v$.

Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{m} & A \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{coker} g} \\ Y & \xrightarrow{n} & \operatorname{Coker} g\ . \end{array} \tag{7}$$

Поскольку $(\operatorname{coker} f)(vt-\beta m) = \hat{\beta}nt-\hat{\beta}(\operatorname{coker} g)m = 0$ и $f_1 = \ker\operatorname{coker} f_1$, найдется такой морфизм $r : Z \to F$, что $f_1 r = vt - \beta m$. Имеем

$$\hat{f}_1(\operatorname{coker}\gamma)r = (\operatorname{coker}\beta)f_1 r = (\operatorname{coker}\beta)(vt-\beta m) = (\operatorname{coker}\beta)vt = ust.$$

По лемме 5 из [4] $g_0 \in P$, поэтому $g_1 = \ker\operatorname{coker} g$. Так как квадрат (7) коуниверсален, то $\widehat{m} : \operatorname{Ker} t \to \operatorname{Im} g$ — изоморфизм. Следовательно, существует такой морфизм $w : E \to Z$, что $mw = g_1$ и $w = \ker t$.

Поскольку $f_1 rw = (vt-\beta m)w = -\beta mw = -\beta g_1 = -f_1\gamma$ и $f_1 \in M_c$, то $rw = -\gamma$. Стабильность $\operatorname{coker} g$ влечет $t \in P_c$. Следовательно, $t = \operatorname{coker} w$. Так как $(\operatorname{coker}\gamma)rw = -(\operatorname{coker}\gamma)\gamma = 0$ и $t = \operatorname{coker} w$, найдется такой морфизм $a : Y \to \operatorname{Coker}\gamma$, что $(\operatorname{coker}\gamma)r = at$. Поскольку $\hat{f}_1 at = \hat{f}_1(\operatorname{coker}\gamma)r = ust$ и $t \in P_c$, имеем $\hat{f}_1 a = us$.

Поскольку квадрат (6) коуниверсален, морфизм $\hat{v} : \operatorname{Ker} Y \to \operatorname{Im} B$ есть изоморфизм. Поэтому найдется такой морфизм $b : \operatorname{Im}\beta \to Y$, что $v\beta = \ker\operatorname{coker}\beta = \operatorname{im}\beta$ и $b = \ker s$. Так как $\hat{f}_1 ab = usb = 0$ и $\hat{f}_1 \in M$ по лемме 4, то $ab = 0$. Поскольку $\operatorname{coker}\beta$ — стабильное коядро, имеем $s \in P_c$, следовательно, $s = \operatorname{coker} b$. Поэтому найдется такой морфизм $c : X \to \operatorname{Coker}\gamma$, что $cs = a$. Так как $\hat{f}_1 cs = \hat{f}_1 a = us$ и $s \in P_c$, то $\hat{f}_1 c = u$. Условие $\hat{f}_1 c = u$ определяет морфизм c однозначно, поскольку по лемме 4 $\hat{f}_1 \in M$. Таким образом, $\hat{f}_1 = \ker h$.

Лемма доказана.

Теорема 3 [лемма о девяти гомоморфизмах]. *Пусть диаграмма*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & A_2 & \xrightarrow{\psi_1} & A_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \alpha_1}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha_2}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha_3}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{\varphi_2} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \beta_1}\downarrow & & {\scriptstyle \beta_2}\downarrow & & {\scriptstyle \beta_3}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\varphi_3} & C_2 & \xrightarrow{\psi_3} & C_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

коммутативна и, кроме того, $\varphi_i | \psi_i$ *для* $i = 1, 2, 3$.

Имеют место следующие утверждения:

(1) *если* $\alpha_2 = \ker\beta_2$, $\alpha_3 = \ker\beta_3$, *то* $\alpha_1 = \ker\beta_1$;

(2) *если* $\beta_2\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \ker\beta_1$, $\alpha_3 = \ker\beta_3$ *и* ψ_1 *— стабильное коядро, то* $\alpha_2 = \ker\beta_2$;

(3) *если* $\alpha_1|\beta_1$, $\alpha_2|\beta_2$, *причем* β_1, ψ_1 *и* ψ_2 *— стабильные коядра, а* φ_2 *— стабильное ядро, то* $\alpha_3|\beta_3$.

Доказательство. (1) Так как $\alpha_3 \in M$, квадрат

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & A_2 \\ {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_2}\downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{\varphi_2} & B_2 \end{array}$$

коуниверсален. Поскольку $\alpha_2 = \ker\beta_2$, имеем

$$\alpha_1 = \ker(\beta_2\varphi_2) = \ker(\varphi_3\beta_1) = \ker\beta_1$$

($\varphi_3 \in M$).

(2) Пусть $\varphi' : A_1 \to \operatorname{Ker}\beta_2$, $\psi' : \operatorname{Ker}\beta_2 \to A_3$ — естественные отображения ядер для диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{\varphi_2} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\beta_1}\downarrow & & {\scriptstyle\beta_2}\downarrow & & {\scriptstyle\beta_3}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\varphi_3} & C_2 & \xrightarrow{\psi_3} & C_3 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Поскольку здесь $\varphi_2 = \ker\psi_2$, по лемме 5 в соответствующей Ker-последовательности

$$A_1 = \operatorname{Ker}\beta_1 \xrightarrow{\varphi'} \operatorname{Ker}\beta_2 \xrightarrow{\psi'} A_3 = \operatorname{Ker}\beta_3$$

$\varphi' = \ker\psi'$. Кроме того, условие $\beta_2\alpha_2 = 0$ влечет существование морфизма $\eta : A_2 \to \operatorname{Ker}\beta_2$ такого, что $\alpha_2 = (\ker\beta_2)\eta$. Имеем

$$\alpha_3\varphi_1 = \psi_2\alpha_2 = \psi_2(\ker\beta_2)\eta = \alpha_3\psi'\eta.$$

Так как $\alpha_3 \in M$, отсюда следует, что $\psi_1 = \psi'\eta$. По условию $\psi_1 \in P_c$, поэтому по лемме 2 $\psi' \in P_c$. Таким образом, $\psi' = \operatorname{coker}\ker\psi' = \operatorname{coker}\varphi'$. Итак, $\varphi'|\psi'$.

Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} & \varphi'\nearrow & \operatorname{Ker}\beta_2 & \searrow\psi' & \\ A_1 & & \eta\uparrow & & C_1\,, \\ & \varphi_1\searrow & B_1 & \nearrow\psi_1 & \end{array}$$

в которой $\varphi_1|\psi_1$, $\varphi'|\psi'$. Так как ψ_1 — стабильное коядро, по лемме 6 η — изоморфизм. Таким образом, $\alpha_2 = \ker\beta_2$.

(3) Ввиду равенств $\beta_1 = \operatorname{coker}\alpha_1$ и $\beta_2 = \operatorname{coker}\alpha_2$ утверждение, двойственное утверждению (1), сразу дает соотношение $\beta_3 = \operatorname{coker}\alpha_3$. Покажем, что $\alpha_3 = \ker\beta_3$.

Так как ψ_1 — стабильное коядро, для диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & C_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_2}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_3}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & C_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

определена Ker-Coker-последовательность

$$0 \to 0 \to \operatorname{Ker}\alpha_3 \xrightarrow{\delta} C_1 \xrightarrow{\varphi_3} C_2 \xrightarrow{\psi_3} C_3 \to 0. \tag{8}$$

Так как α_3 строгий и ψ_1 и β_1 — стабильные коядра, по теореме 1(3) последовательность (8) точна в члене C_1. Следовательно, $\delta = 0$. Поскольку $\alpha_1 \in O_c$ и $\ker\alpha_3 = 0$ и φ_2 — стабильные ядра, последовательность (8) точна и в члене $\operatorname{Ker}\alpha_3$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\alpha_3 = 0$, т. е. $\alpha_3 \in M$. Из этого легко вытекает, что квадрат

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"'] \\ B_1 \arrow[r, "\varphi_2"] & B_2 \end{tikzcd}$$

коуниверсален. По условию $\psi_2 = \operatorname{coker}\varphi_2$ и $\beta_1 = \operatorname{coker}\alpha_1$ — стабильные коядра. Применяя лемму 7, получаем $\alpha_3 = \ker\beta_3$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глотко Н. В.* О соотношениях Кюннета для ковариантного функтора двух аргументов в полуабелевой категории // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, № 3. С. 5–24.

2. *Копылов Я. А., Кузьминов В. И.* О Ker-Coker-последовательности в полуабелевой категории // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 615–624.

3. *Глотко Н. В., Кузьминов В. И.* О когомологической последовательности в полуабелевой категории // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 1. С. 41–50.

4. *Копылов Я. А., Кузьминов В. И.* Ker-Coker-последовательность и ее обобщение в некоторых классах аддитивных категорий // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 1. С. 107–117.

5. *Bănică C., Popescu N.* Sur les catégories preábéliennes // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1965. V. 10, N 5. P. 621–635.

6. *Райков Д. А.* Полуабелевы категории // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188, № 5. С. 1006–1009.

7. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972.

8. *Кузьминов В. И., Черевикин А. Ю.* О полуабелевых категориях // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 6. С. 1284–1294.

9. *Gruson L.* Complétion abélienne // Bull. Sci. Math. Sér. 2. 1966. V. 90. P. 17–40.

10. *Паламодов В. П.* Гомологические методы в теории локально выпуклых пространств // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 1. С. 3–65.

11. *Паламодов В. П.* На многообразии Штейна комплекс Дольбо расщепляется в положительных размерностях // Мат. сб. 1972. Т. 188, № 2. С. 287–315.

12. *Rump W.* Almost abelian categories // Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. 2001. V. 42, N 3. P. 163–225.

13. *Yoneda N.* On Ext and exact sequences // J. Fac. Sci., Univ. Tokyo. Sect. I. 1960. V. 8. P. 507–576.

14. *Schneiders J. P.* Quasi-abelian categories and sheaves // Mém. Soc. Math. France (N. S.). 1999. V. 76.

15. *Jurchescu M.* Categorii // Deleanu A., Jurchescu M., Andreian-Cazacu C. Topologie, categorie, suprafeţe riemanniene. Bucureşti: Ed. Academiei, 1966. P. 73–241.

16. *Rump W.* A counterexample to Raĭkov's conjecture // Bull. London Math. Soc. 2008. V. 40, N 6. P. 985–994.

Статья поступила 7 июля 2008 г.

Копылов Ярослав Анатольевич,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
yakop@math.nsc.ru