*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6*

*УДК 512.542*

# О НЕНИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ, ЛЮБЫЕ ДВЕ 3–МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫ

**В. Го, Ю. В. Луценко, А. Н. Скиба**

**Аннотация.** Описана структура конечных ненильпотентных групп, в которых любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны. В частности, получены описания конечных ненильпотентных групп, у которых все 2-максимальные или все 3-максимальные подгруппы нормальны.

**Ключевые слова:** силовская подгруппа, группа Шмидта, $n$-максимальная подгруппа, нильпотентная группа, сверхразрешимая группа, разрешимая группа, перестановочная подгруппа.

## 1. Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны. Напомним, что подгруппа $H$ группы $G$ называется 2-*максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы $G$, если $H$ является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе $M$ группы $G$. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и т. д.

Связь между $i$-максимальными подгруппами (где $i > 1$) группы $G$ и структурой группы $G$ исследовалась многими авторами. Но, пожалуй, наиболее ранний результат в данном направлении получен Хуппертом в работе [1], где доказано, что группа сверхразрешима, если все ее 2-максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Хупперт доказал, что в случае, когда каждая третья максимальная подгруппа группы $G$ является нормальной в $G$, коммутант $G'$ группы $G$ нильпотентен и порядок каждого главного фактора группы $G$ делится не более чем на два простых числа. Развивая эти два результата Хупперта, Янко в работе [2] получил описание групп, в которых 4-максимальные подгруппы нормальны. В работах Судзуки [3] и Янко [4] содержится описание конечных неразрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нильпотентны. Описание разрешимых групп, в которых все вторые максимальные подгруппы нильпотентны, получено В. А. Белоноговым в работе [5]. Эти результаты получили развитие в работе В. Н. Семенчука [6], где дано описание разрешимых групп, у которых все их 2-максимальные подгруппы сверхразрешимы. Гаген и Янко в работе [7] описали простые группы, 3-максимальные подгруппы которых нильпотентны. Аграваль [8] доказал, что группа $G$ сверхразрешима, если все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми силовскими подгруппами группы $G$. Отмеченные выше результаты Хупперта получили свое дальнейшее развитие также в работе Л. Я. Полякова [9], который доказал, что группа сверхразрешима, если все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми ее максимальными подгруппами.

В последние годы получен ряд новых интересных результатов о 2- и 3-максимальных подгруппах. Например, в недавней работе [10] Го Шуин и К. П. Шум доказали разрешимость групп, в которых все 2-максимальные подгруппы обладают свойством покрытия-изолирования. В работах [11, 12] получены характеризации сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп. Отметим также, что в [13] авторами дано описание ненильпотентных групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами, а также групп, в которых каждая максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами [14]. В связи с последними двумя результатами вполне естественной является задача В. С. Монахова и О. И. Тавгеня (см. вопрос 3.10 в обзоре [15]) об описании групп, в которых любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны. Данная работа посвящена решению этой задачи в классе ненильпотентных групп. В частности, завершая отмеченные выше результаты Хупперта, мы даем описания ненильпотентных групп, у которых все 2-максимальные или все 3-максимальные подгруппы нормальны.

## 2. Некоторые предварительные результаты

Приведем некоторые свойства групп Шмидта, необходимые для доказательства основного результата (см. [16, гл. VI]).

**Лемма 2.1.** *Если $G$ — группа Шмидта, то*

(1) *$G = [P]\langle a\rangle$, где $P$, $\langle a\rangle$ — силовские $p$-подгруппа и $q$-подгруппа группы $G$ соответственно;*

(2) *$G$ имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P\langle a^q\rangle$ и $P'\langle a\rangle$;*

(3) *$G' = P$;*

(4) *$\Phi(G) = Z(G) = P' \times \langle a^q\rangle$;*

(5) *$P/\Phi(P)$ — главный фактор группы $G$, причем если $|P/\Phi(P)| = p^\alpha$, то $p^\alpha$ сравнимо с единицей по модулю $q$;*

(6) *наибольшая нормальная подгруппа группы $G$, строго содержащаяся в $P$, совпадает с $\Phi(P) = P' = C_P(a)$;*

(7) *если $P$ абелева, то она элементарна;*

(8) *если $P$ неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту $p$.*

Также нам понадобятся следующие вспомогательные результаты.

**Лемма 2.2** [17, теорема 5.1.9]. *Пусть $P$ — $p$-группа и $A$ — максимальная абелева подгруппа из $P$. Допустим, что $|P'| = p$. Тогда*

$$|P : A| = |A/Z(P)| \text{ и } |P/Z(P)| = |A/Z(P)|^2.$$

Следующая лемма описывает ненильпотентные группы, в которых любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны.

**Лемма 2.3.** *Пусть $G$ — ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *любые две 2-максимальные подгруппы группы $G$ являются перестановочными;*

(2) *$G$ является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Допустим, что $G$ — ненильпотентная группа и любые две 2-максимальные подгруппы группы $G$ перестановочны. Это влечет нильпотентность каждой максимальной подгруппы группы $G$, поэтому $G$ является группой Шмидта. Покажем теперь, что $G$ является группой с абелевыми силовскими подгруппами. По лемме 2.1(1) $G = [P]Q$, где $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$ и $Q$ — циклическая $q$-подгруппа в $G$.

Допустим, что $P' \neq 1$. Пусть $E$ — максимальная подгруппа группы $P'Q$, индекс которой равен $p$. Тогда $E$ является 2-максимальной подгруппой в $G$ по лемме 2.1(2) и $Q \leq E$. Из условия леммы вытекает, что $EE^x$ — подгруппа в $G$ для всех $x \in G$. Согласно [18, VI, лемма 4.7] существует такой элемент $y \in EE^x$, что $Q^y = QQ^x$, поэтому $Q = Q^x$ является нормальной подгруппой в группе $G$. Данное противоречие показывает, что $P' = 1$, а это, в свою очередь, влечет абелевость группы $P$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что группа $G = [P]\langle a\rangle$ является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, где $P$, $\langle a\rangle$ — силовские $p$-подгруппа и $q$-подгруппа группы $G$ соответственно. По лемме 2.1(2) группа $G$ имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $\langle a\rangle$ и $P\langle a^q\rangle$. Группы вида $\langle a^q\rangle$, $P\langle a^{q^2}\rangle$ и $P_1\langle a^q\rangle$, где $P_1$ — некоторая максимальная подгруппа группы $P$, являются представителями трех классов 2-максимальных подгрупп группы $G$. По лемме 2.1(4) $\langle a^q\rangle$ содержится в $Z(G)$, поэтому $\langle a^q\rangle$ и $\langle a^{q^2}\rangle$ являются нормальными подгруппами в $G$. Это влечет нормальность 2-максимальных подгрупп $\langle a^q\rangle$ и $P\langle a^{q^2}\rangle$ в группе $G$. Так как любые две 2-максимальные подгруппы группы $G$ вида $P_1\langle a^q\rangle$ и $P_2\langle a^q\rangle$ перестановочны, где $P_1$ и $P_2$ — некоторые максимальные подгруппы в $P$, то любые две 2-максимальные подгруппы группы $G$ перестановочны. Лемма доказана.

**Следствие 2.4.** *Если в группе $G$ любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны и $|\pi(G)| > 2$, то группа $G$ нильпотентна.*

**Следствие 2.5.** *В ненильпотентной группе $G$ каждая 2-максимальная подгруппа нормальна в том и только в том случае, когда $G$ — группа Шмидта, нормальная силовская подгруппа которой имеет простой порядок.*

**Следствие 2.6** [1]. *Если каждая вторая максимальная подгруппа группы $G$ нормальна в $G$, то $G$ сверхразрешима.*

**Лемма 2.7** [19, лемма 9]. *Пусть $P = [H]C_p$, где $H$ — элементарная $p$-группа, $|C_p| = p$ и любые две 2-максимальные подгруппы из $P$ перестановочны. Тогда $P$ является абелевой группой.*

Следующая лемма доказывается индукцией по $n$.

**Лемма 2.8.** *Пусть $E$ — $n$-максимальная подгруппа $q$-нильпотентной группы $G$. Тогда $|G : E| = q^\alpha s$, где $\alpha \leq n$ и $(s, q) = 1$.*

**Лемма 2.9.** *Пусть $T$ — подгруппа группы $G$ и $Q = \langle a\rangle$ — циклическая $q$-подгруппа группы $G$. Если $T \cap Q^x = 1$ для любого $x \in G$ и группа $G$ $q$-нильпотентна, то $|Q|$ делит $|G : T|$.*

Доказательство. Мы можем предполагать, что $T \neq G$. Покажем, используя индукцию по $|G : T|$, что $|Q|$ делит $|G : T|$. Пусть $T \leq M$, где $M$ — максимальная подгруппа в $G$.

Допустим, что для некоторого $x \in G$ имеет место $\langle a\rangle^x \leq M$. Так как $(\langle a\rangle^x)^m \cap T = 1$ для всех $m \in M$, по индукции $|\langle a\rangle^x| = |\langle a\rangle|$ делит $|M : T|$ и поэтому $|Q| = |\langle a\rangle|$ делит $|G : T|$.

Таким образом, $\langle a\rangle^x \nleq M$ для всех $x \in G$. Тогда $M$ нормальна в $G$. Поскольку $(\langle a\rangle \cap M)^m \cap T = 1$ для всех $m \in M$, по индукции $|\langle a\rangle \cap M|$ делит $|M : T|$. Это влечет, что $|\langle a\rangle \cap M|$ делит $|G : T|$. Так как

$$G/M = \langle a\rangle M/M \simeq \langle a\rangle / M \cap \langle a\rangle,$$

то $|\langle a\rangle : M \cap \langle a\rangle|$ делит $|G : T|$. Следовательно, $|Q| = |\langle a\rangle : M \cap \langle a\rangle||\langle a\rangle \cap M|$ делит $|G : T|$. Лемма доказана.

## 3. Строение групп, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны

Следуя [5], будем обозначать пересечение всех 2-максимальных подгрупп группы $G$ через $\Phi^2(G)$.

В дальнейшем $p$, $q$ и $r$ — попарно различные простые числа. В следующих теоремах $P$, $Q$ и $R$ обозначают некоторые силовские $p$-, $q$- и $r$-подгруппы группы $G$ соответственно.

**Теорема 3.1.** *Пусть $G$ — ненильпотентная группа. Тогда любые две 3-максимальные подгруппы группы $G$ перестановочны в том и только в том случае, когда $G$ является группой одного из следующих типов:*

I) *$G$ — группа Шмидта одного из видов:*

(a) *$G$ — группа с абелевыми силовскими подгруппами;*

(b) *$G = [P]Q$, где $P$ изоморфна либо группе $M_3(p)$* (см. [20, с. 190]), *либо группе кватернионов порядка 8;*

(c) *$G = [P]Q$, где $|P| > p^3$, $|\Phi(P)| = p$ и $\Phi(P) = \Phi^2(P)$;*

II) *$G$ — бипримарная группа, не являющаяся группой Шмидта, одного из следующих видов:*

(1) *$G = [P]Q$, где $P$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, $Q$ — циклическая группа и $[P]\Phi(Q)$ — группа Шмидта;*

(2) *$G = ([P]Q_1) \times C_q$, где $P$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, $|C_q| = q$ и $PQ_1$ — группа Шмидта;*

(3) *$G = [P]Q$, где $P$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, $Q = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $|a| = |b| = q$, $P\langle a\rangle$ и $P\langle b\rangle$ — группы Шмидта;*

(4) *$G = [P]Q$, где $|P| = p$, $p > 2$ и $Q$ изоморфна группе кватернионов порядка 8;*

(5) *$G = ([P]Q_1)C_q$, где $P$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, $Q_1 = \langle a\rangle$, $C_q = \langle b\rangle$, $|Q_1C_q| = q^\beta$, $|a| = q^{\beta-1}$ $(\beta \geq 3)$, $PQ_1$ — группа Шмидта, $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$ и $[P, C_1] = 1$ для всякой подгруппы $C_1$, изоморфной $C_q$;*

(6) *$G = [P]Q$, где $\Phi(P)$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта, максимальная подгруппа из $Q$ совпадает с $Z(G)$ и любые две 2-максимальные подгруппы из $P$ перестановочны;*

(7) *$G$ — подпрямое произведение двух различных изоморфных групп Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;*

(8) *$G = [P_1 \times C_p]Q$, где $P_1$ — минимальная нормальная $p$-подгруппа группы $G$, $|C_p| = p$, $P_1Q$ — группа Шмидта, максимальная подгруппа из $Q$ содержится в $Z(G)$ и $[C_p, Q] = 1$;*

(9) $G = [[P_1]Q]C_p$, *где* $P_1$ *— минимальная нормальная* $p$*-подгруппа группы* $G$, $|Q| = q$, $|C_p| = p$, $N_G(Q) = [Q]C_p$ *и* $P_1C_p$ *— абелева группа;*

III) $G$ *— группа, порядок которой имеет в точности три простых делителя* $p, q, r$ *и которая является группой одного из следующих видов:*

(i) $G = ([P]Q)R$, *где* $P$ *и* $R$ *— минимальные нормальные подгруппы группы* $G$, $Q$ *— циклическая группа и* $F(G) = PR\Phi(Q)$*;*

(ii) $G = [R](P \times Q)$, *где* $|P| = p$, $|Q| = q$ *и* $R = F(G)$ *— минимальная нормальная подгруппа группы* $G$.

Доказательство. Необходимость. Предположим вначале, что $G$ — неразрешимая группа. Так как по условию любые две 3-максимальные подгруппы группы $G$ перестановочны, каждая 2-максимальная подгруппа группы $G$ нильпотентна, поэтому согласно [3, 4] $G$ изоморфна одной из групп $A_5$ или $SL(2,5)$.

Допустим, что $G \simeq A_5$. Группа $A_5$ имеет три класса максимальных подгрупп, изоморфных группам $A_4, D_6$ и $D_{10}$ соответственно. Рассмотрим максимальную подгруппу $A_4$ группы $A_5$. В группе $A_4$ нет подгрупп порядка 6, поэтому максимальными в $A_4$ являются силовские 2-подгруппы и силовские 3-подгруппы. Следовательно, подгруппы порядка 2 являются 2-максимальными подгруппами в $A_4$. Согласно условию любые две подгруппы порядка 2, содержащиеся в $A_5$, перестановочны, тем самым любые две силовские 2-подгруппы группы $A_5$ перестановочны. Значит, если $K$ — некоторая силовская 2-подгруппа группы $A_5$, то $KK^x$ является подгруппой в $A_5$ для всех $x \in A_5$. Так как $A_5$ — простая группа, то $K \neq K^x$ для некоторого $x \in A_5$. Но в группе $A_5$ нет подгрупп с порядком, равным $|KK^x|$; противоречие. Поскольку $A_5 \simeq SL(2,5)/Z(SL(2,5))$, в $SL(2,5)$ также имеются две неперестановочные 3-максимальные подгруппы.

Таким образом, $G$ — разрешимая группа, в которой любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны. Понятно, что каждая собственная подгруппа $H$ группы $G$ либо нильпотентна, либо является группой Шмидта. Причем если $H$ — группа Шмидта, то $H$ максимальна в $G$. Поскольку в разрешимой группе индекс любой максимальной подгруппы есть степень простого числа и число различных простых делителей порядка группы Шмидта равно двум, то $\pi(G) \leq 3$.

I. Предположим вначале, что $G = [P]Q$ является группой Шмидта.

Если $P$ — абелева группа, то $G$ является группой типа I(a).

Предположим теперь, что $P$ — неабелева группа. По лемме 2.1(8) $\Phi(P) = P' = Z(P)$.

Допустим, что $|\Phi(P)| > p$. Пусть $E$ — 2-максимальная подгруппа в $\Phi(P)Q$, индекс которой равен $p^2$. Тогда $E$ является 3-максимальной подгруппой в $G$ по лемме 2.1(2) и $Q \leq E$. Из условия теоремы вытекает, что $EE^x$ — подгруппа в $G$ для всех $x \in G$. Согласно [18, VI, лемма 4.7] существует такой элемент $y \in EE^x$, что $Q^y = QQ^x$, поэтому $Q = Q^x$ является нормальной подгруппой в группе $G$. Данное противоречие показывает, что $|\Phi(P)| = p$.

Покажем, что в группе $P$ любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны. Пусть $P_1$ и $P_2$ — произвольные 2-максимальные подгруппы группы $P$ и $Q_1$ — максимальная подгруппа группы $Q$. Так как $Q_1$ нормальна в $G$ по лемме 2.1(4), то $P_1Q_1$ и $P_2Q_1$ являются 3-максимальными подгруппами в $G$. По условию $(P_1Q_1)(P_2Q_1) = (P_2Q_1)(P_1Q_1)$, тем самым $L = Q_1(P_1P_2)$ является подгруппой в группе $G$. Согласно [18, VI, лемма 4.7] в группе $L$ существует силовская $p$-подгруппа $L_p$ такая, что $L_p = P_1P_2$. Это влечет перестановочность подгрупп $P_1$ и $P_2$.

Предположим, что существует такая 2-максимальная подгруппа $T$ в группе $P$, что $\Phi(P) \nsubseteq T$. Так как $P/\Phi(P)$ — абелева группа и $T\Phi(P)/\Phi(P) \leq P/\Phi(P)$, то $T \simeq T\Phi(P)/\Phi(P)$ также является абелевой группой и поэтому $T \times \Phi(P)$ — абелева максимальная подгруппа в $P$. Тогда по лемме 2.2 $|P| = p^3$. В этом случае по [20, V, теорема 5.1] $P$ изоморфна одной из следующих групп: $M_3(p), M(p), D$ или $Q$, где $D$ — диэдральная группа, $Q$ — группа кватернионов порядка 8, $M_3(p) = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1,\ a^b = a^{1+p}\rangle$ и $M(p) = \langle x, y, z \mid x^p = y^p = z^p = 1,$ $[x, z] = [y, z] = 1,\ [x, y] = z\rangle$ (см. [20, с. 190, 191, 203]).

Если $P$ изоморфна $M(p)$, то $P = \Omega_1(P) = \{g \in G \mid g^p = 1\}$. Но всякая подгруппа порядка $p$ группы $P$ является 2-максимальной подгруппой. Так как в группе $P$ любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны, то $P$ — абелева группа; противоречие. Если $P$ изоморфна диэдральной группе, то ввиду [20, V, теорема 4.3] $P = \Omega_1(P)$, что невозможно, как показано выше. Следовательно, подгруппа $P$ изоморфна либо группе $M_3(p)$, либо группе кватернионов порядка 8.

Таким образом, $G$ является группой типа I(b).

Теперь допустим, что $\Phi(P)$ содержится в каждой 2-максимальной подгруппе группы $P$. Это влечет $\Phi(P) = \Phi^2(P)$. Если при этом $|P| = p^3$, то $G$ снова является группой типа I(b). Если же $|P| > p^3$, то $G$ — группа типа I(c).

II. Теперь предположим, что $G$ не является группой Шмидта и $\pi(G) = \{p, q\}$, где $p \neq q$.

Допустим вначале, что группа $G$ имеет нормальную силовскую подгруппу $P$, т. е. $G = [P]Q$. Предположим, что группа $G$ имеет пару подгрупп Шмидта вида $A = [P]Q_1$ и $B = [P_1]Q$ ($P_1 < P$, $Q_1 < Q$). Понятно, что $A$ и $B$ являются максимальными подгруппами в группе $G$. Следовательно, любые две 2-максимальные подгруппы группы $A$ перестановочны, поэтому по лемме 2.3 $P$ — абелева группа. Тогда по лемме 2.1(6) $P$ является минимальной нормальной подгруппой в группе $A$, а следовательно, и в самой группе $G$. С другой стороны, любые две 2-максимальные подгруппы группы $B$ также перестановочны, поэтому аналогично можно показать, что $P_1$ является минимальной нормальной подгруппой в группе $G$. Это противоречит тому, что $P$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Таким образом, все подгруппы Шмидта группы $G$ содержат либо силовскую $p$-подгруппу из $G$, либо силовскую $q$-подгруппу из $G$.

Если все подгруппы Шмидта группы $G$ содержат силовскую $p$-подгруппу из $G$, то $G = [P]Q$, где $P$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$.

Допустим, что $Q$ — абелева группа. Если при этом группа $Q$ циклическая, то $G$ является группой типа II(1).

Предположим теперь, что $Q$ — нециклическая группа. Пусть $H$ — подгруппа Шмидта группы $G$. Тогда $|G : H| = q$ и $H = [P]Q_1$, где $Q_1$ — циклическая максимальная подгруппа в $Q$. По основной теореме о конечных абелевых группах $Q = Q_1 \times C_q$, где $|C_q| = q$. Пусть $Q_2$ — максимальная подгруппа в $Q_1$. Тогда подгруппа $PQ_2C_q$ является максимальной в группе $G$. Понятно, что эта подгруппа не является группой Шмидта, следовательно, она нильпотентна. Это влечет $[P, C_q] = 1$, поэтому $G$ является группой типа II(2).

Если предположить, что максимальная подгруппа $Q_2$ группы $Q_1$ единична, то подгруппа $PC_q$ является максимальной в группе $G$. Если при этом подгруппа

$PC_q$ нильпотентна, то $G$ снова является группой типа II(2). Если же $PC_q$ — группа Шмидта, то $G$ — группа типа II(3).

Пусть теперь $Q$ — неабелева группа и $|Q| = q^{\beta}$ ($\beta \in \mathbb{N}$). Если $q = 2$ и $\beta = 3$, то по [20, V, теорема 4.4] $Q$ изоморфна либо группе кватернионов, либо диэдральной группе. В последнем случае $Q = [\langle a\rangle]\langle b\rangle$, где $|a| = 2^2$, $|b| = 2$ и $a^b = a^{-1}$. Тогда $Q$ имеет точно три максимальные подгруппы: $\langle a\rangle$, $\langle a^2\rangle\ \langle b\rangle$ и $\langle a^2\rangle\ \langle ab\rangle$, поэтому подгруппы вида $\langle a^2\rangle$, $\langle b\rangle$ и $\langle ab\rangle$ являются 2-максимальными подгруппами в $Q$. Так как $P$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, то $Q$ является максимальной подгруппой в $G$. Тогда по условию $\langle ab\rangle\langle b\rangle = \langle b\rangle\langle ab\rangle$ и поэтому $ab = ba$. Таким образом, $a^b = a = a^{-1}$, тем самым $a^2 = 1$; противоречие. Следовательно, $Q$ изоморфна группе кватернионов порядка 8. Из $q = 2$ и леммы 2.1(5) следует $|P| = p$, так что $G$ является группой типа II(4).

Если теперь $q = 2$ и $\beta > 3$ либо $q$ — нечетное простое, то ввиду [20, V, теорема 4.4] $Q$ изоморфна одной из групп: $M_\beta(q), D_\beta, Q_\beta$ или $S_\beta$ (см. [20, с. 190–191]). Если $Q$ изоморфна одной из групп $D_\beta, Q_\beta$ или $S_\beta$, то по [20, V, теорема 4.3] фактор-группа $Q/Z(Q)$ изоморфна $D_{\beta-1}$. В этом случае фактор-группа $Q/Z(Q)$ имеет точно две максимальные нециклические подгруппы. Следовательно, группа $Q$ имеет по крайней мере две нециклические 2-максимальные подгруппы, поэтому в группе $Q$ существует по крайней мере две нециклические максимальные подгруппы. Это означает, что в группе $G$ существуют максимальные подгруппы $M_1$ и $M_2$, которые содержат $P$ и не являются группами Шмидта. Тогда $M_1$ и $M_2$ являются нильпотентными нормальными подгруппами в $G$, поэтому группа $G = M_1M_2$ нильпотентна; противоречие. Следовательно, группа $Q$ не может быть изоморфна одной из групп: $D_\beta, Q_\beta$ или $S_\beta$.

Таким образом, группа $Q$ изоморфна

$$M_\beta(q) = \langle a, b \mid a^{q^{\beta-1}} = b^q = 1, a^b = a^{1+q^{\beta-2}}\rangle$$

(см. [20, с. 190]). В этом случае группа $G$ имеет вид $G = [[P]Q_1]C_q$, где $P$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, $Q_1 = \langle a\rangle$, $|a| = q^{\beta-1}$, $C_q = \langle b\rangle, |b| = q$, $PQ_1$ — группа Шмидта и $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$. Рассмотрим теперь максимальную подгруппу $PQ_2C_q$ группы $G$, где $Q_2$ — максимальная подгруппа в $Q_1$. Понятно, что $P \times Q_2C_q$ — нильпотентная группа и поэтому $[P, C_q] = 1$.

Пусть $\mathscr{C}$ — множество всех подгрупп группы $G$, изоморфных подгруппе $C_q$. Предположим, что для некоторой подгруппы $C_1$ из $\mathscr{C}$ выполняется $[P, C_1] \neq 1$. Это влечет, что подгруппа $PC_1$ является группой Шмидта. Тогда $PC_1$ — максимальная подгруппа в $G$ и поэтому $|Q| = q^2$, что невозможно. Следовательно, $G$ — группа типа II(5).

Предположим теперь, что любая подгруппа Шмидта группы $G$ содержит некоторую силовскую $q$-подгруппу из $G$. Это означает, что $Q = \langle a\rangle$ — циклическая группа и $P\langle a^q\rangle$ — максимальная подгруппа группы $G$ с индексом, равным $q$. Так как подгруппа $P\langle a^q\rangle$ не является группой Шмидта, она нильпотентна. Следовательно, $P\langle a^q\rangle = P \times \langle a^q\rangle = F(G)$, тем самым $\langle a^q\rangle$ содержится в $Z(G)$. При этом либо каждая максимальная подгруппа группы $G$, содержащая силовскую $q$-подгруппу группы $G$, является группой Шмидта, либо $G$ имеет нильпотентную максимальную подгруппу, содержащую силовскую $q$-подгруппу группы $G$.

Предположим, что верен первый случай. Пусть $M$ — произвольная максимальная подгруппа группы $G$ вида $P_1Q^x$, где $P_1 < P$. Так как $M$ — группа Шмидта, по леммам 2.3 и 2.1(6) $P_1$ является минимальной нормальной подгруппой в $M$.

Допустим вначале, что $P$ — неабелева группа. Тогда $\Phi(P) \neq 1$. Допустим, что $P_1 \neq \Phi(P)$. Тогда $\Phi(P)P_1Q$ является подгруппой группы $G$. Так как $P_1Q$ — максимальная подгруппа группы $G$, то либо $\Phi(P)P_1Q = P_1Q$, либо $\Phi(P)P_1Q = G$. Если $\Phi(P)P_1Q = P_1Q$, то $\Phi(P) \leq P_1$ и поэтому $\Phi(P) = P_1$, так как $P_1$ — минимальная нормальная подгруппа в $P_1Q$, что противоречит нашему допущению. Следовательно, $\Phi(P)P_1Q = G$. Тогда $\Phi(P)P_1 = P$ и поэтому $P_1 = P$, что невозможно. Таким образом, $P_1 = \Phi(P)$. Из того, что $P_1 = \Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в $M$, вытекает, что $P_1 = \Phi(P) = P' = Z(P)$ — минимальная нормальная подгруппа и в самой группе $G$.

Так как $\Phi(P) \subseteq \Phi(G)$ и группа $G$ не является нильпотентной, то $G/\Phi(P)$ — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Поскольку каждая максимальная подгруппа группы $G$, содержащая силовскую $q$-подгруппу группы $G$, является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, максимальная подгруппа группы $Q$ совпадает с $Z(G)$. Как и при доказательстве случая I(b), можно показать, что любые две 2-максимальные подгруппы из $P$ перестановочны. Следовательно, $G$ является группой типа II(6).

Теперь предположим, что $P$ — абелева группа. Допустим, что $\Phi(P) \neq 1$. В этом случае $P_1 = \Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой группы $G$ и $G/\Phi(P)$ является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Следовательно, $G$ снова является группой типа II(6).

Допустим теперь, что $\Phi(P) = 1$. В этом случае $P$ является элементарной $p$-группой. Рассмотрим максимальную подгруппу $M = P_1Q^x$ группы $G$. Так как $M$ — группа Шмидта и $P$ — абелева группа, по лемме 2.1(6) $P_1$ является минимальной нормальной подгруппой в $M$, а следовательно, и в самой группе $G$.

Рассмотрим теперь максимальную подгруппу $T$ группы $G$ такую, что $G = [P_1]T$. Поскольку $T = [P_2]Q$ — группа Шмидта (ввиду рассматриваемого случая) и $P$ — абелева группа, по лемме 2.1(6) $P_2$ является минимальной нормальной подгруппой в $T$, а следовательно, и в самой группе $G$. Так как $P_1 \cap P_2 = 1$ и $P_1, P_2$ — минимальные нормальные подгруппы в $G$, группа $G$ является подпрямым произведением двух различных изоморфных групп Шмидта. Таким образом, $G$ — группа типа II(7).

Теперь предположим, что $G$ имеет нильпотентную максимальную подгруппу $M$, содержащую подгруппу $Q$. Тогда группа $M$ имеет вид $P_1 \times Q$, где $P_1 < P$. Как и при доказательстве случая I(b), можно показать, что $|P_1| = p$.

Пусть $H$ — подгруппа Шмидта группы $G$, содержащая $Q$. Тогда $H$ — максимальная подгруппа в $G$ и поэтому $HM = G$. Пусть $H_p$ — силовская $p$-подгруппа группы $H$. Заметим, что подгруппа $P_1$ не содержится в $H_p$, так как $P_1Q$ — максимальная подгруппа в $G$. Тогда $H_p \cap P_1 = 1$ в силу $|P_1| = p$, поэтому $H \cap M = Q$. Отсюда

$$|G : H| = \frac{|M||H|}{|M \cap H||H|} = \frac{|M|}{|M \cap H|} = \frac{|M|}{|Q|} = \frac{|P_1Q|}{|Q|} = |P_1| = p,$$

значит, $|P : H_p| = p$. Таким образом, $H_p$ — максимальная подгруппа в $P$. Так как $H$ — группа Шмидта, подгруппа $H_p$ нормальна в группе $H$ и поэтому подгруппа $H_p$ нормальна в $G$. По леммам 2.3 и 2.1(6) $H_p$ является минимальной нормальной подгруппой в $H$, а следовательно, и в самой группе $G$.

Так как подгруппы $P_1Q$ и $H_pQ$ максимальны в группе $G$, то

$$\Phi(G) \leq P_1Q \cap H_pQ = (P_1 \cap H_pQ)Q.$$

Покажем, что $P_1 \cap H_pQ = 1$. Если $P_1 \cap H_pQ \neq 1$, то $P_1 < H_pQ$, ибо $|P_1| = p$. Но тогда $P_1Q < H_pQ$, что невозможно, так как $P_1Q$ — максимальная подгруппа в $G$. Следовательно, $P_1 \cap H_pQ = 1$, поэтому $\Phi(G) \leq Q$. Поскольку $P' \subseteq \Phi(P) \subseteq \Phi(G)$, то $P' = 1$. Таким образом, $P$ — абелева группа. Так как максимальная подгруппа $P_1Q$ группы $G$ нильпотентна, то $[P_1, Q] = 1$.

Следовательно, $G$ является группой типа II(8).

Предположим теперь, что группа $G$ не имеет нормальных силовских подгрупп. Пусть $H$ — нормальная подгруппа группы $G$ с индексом, равным $p$. Тогда $Q$ является подгруппой в $H$. Допустим, что подгруппа $Q$ нормальна в группе $H$. Тогда подгруппа $Q$ нормальна в группе $G$, так как подгруппа $H$ нормальна в $G$, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $H = [P_1]Q$ является подгруппой Шмидта группы $G$, поэтому $Q$ — циклическая группа. По леммам 2.3 и 2.1(6) $P_1$ является минимальной нормальной подгруппой в $H$, тем самым и в самой группе $G$.

Предположим, что $N_G(Q)$ — нильпотентная подгруппа группы $G$. Тогда $Q \leq Z(N_G(Q))$, так как $Q$ — абелева группа. По [21, теорема 14.3.1] группа $G$ обладает в этом случае нормальным $q$-дополнением, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $N_G(Q) = [Q]\langle b\rangle$ является подгруппой Шмидта в группе $G$. Так как $Q$ — циклическая группа, то $|Q| = q$.

Подгруппы $H$ и $N_G(Q)$ максимальны в группе $G$, поэтому $G = HN_G(Q)$. Следовательно, $P_1\langle b\rangle$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$. По выбору подгруппы $H$ имеем $|G : H| = p$, тем самым $P_1 \cap \langle b\rangle = \langle b^p\rangle$. Так как $[Q]\langle b\rangle$ — группа Шмидта, подгруппа $Q\langle b^p\rangle$ нильпотентна и поэтому $\langle b^p\rangle \leq C_{P_1}(Q)$. С другой стороны, $[P_1]Q$ — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, значит, по лемме 2.1(6) $C_{P_1}(Q) = 1$. Следовательно, $\langle b^p\rangle = 1$, так что $|\langle b\rangle| = p$.

Итак, $P_1\langle b\rangle = [P_1]\langle b\rangle$ — максимальная подгруппа группы $G$, и $P_1$ — элементарная группа. Ввиду условия любые две 2-максимальные подгруппы из $P_1\langle b\rangle$ перестановочны, и по лемме 2.7 $P_1\langle b\rangle$ — абелева группа.

Следовательно, $G$ является группой типа II(9).

III. Наконец, рассмотрим случай, когда $\pi(G) = \{p, q, r\}$, где $p, q, r$ — различные простые делители $|G|$.

Обозначим через $M$ некоторую нормальную подгруппу группы $G$ такую, что $|G : M| = q$. Тогда группа $M$ либо нильпотентна, либо является группой Шмидта.

Предположим, что группа $M$ нильпотентна. Тогда $G = [P \times R]Q$ и $M = P \times R \times Q_1$, где $Q_1$ — некоторая максимальная подгруппа в $Q$. Подгруппы $PQ$ и $RQ$ обе не могут быть нильпотентными, и поэтому либо $PQ$ и $RQ$ — группы Шмидта, либо одна из этих подгрупп, например $RQ$, нильпотентна, а вторая является группой Шмидта.

Предположим, что имеет место первый случай. Тогда подгруппы $PQ$ и $RQ$ являются максимальными в $G$. Следовательно, по условию любые две 2-максимальные подгруппы из $PQ$ перестановочны между собой и любые две 2-максимальные подгруппы из $RQ$ перестановочны между собой. По леммам 2.3 и 2.1(6) $P$ и $R$ являются минимальными нормальными подгруппами группы $G$. Кроме того, по лемме 2.1(1),(4) $Q = \langle a\rangle$ является циклической группой и $\langle a^q\rangle$ — подгруппа в $Z(\langle PQ, RQ\rangle) = Z(G)$.

Теперь предположим, что подгруппа $PQ = P\langle a\rangle$ является группой Шмидта, а подгруппа $RQ$ нильпотентна. Отсюда подгруппа $PQ$ максимальна в $G$, поэтому $G = PQ \times R$, где $|R| = r$. По условию любые две 2-максимальные подгруппы из $PQ$ перестановочны, тем самым по леммам 2.3 и 2.1(6) $P$ является минимальной нормальной подгруппой в $G$. Из того, что $\langle a^q \rangle$ является характеристической подгруппой в $Q$ и $Q$ нормальна в $RQ$, следует, что подгруппа $\langle a^q \rangle$ нормальна в $RQ$. Так как по лемме 2.1(4) $\langle a^q \rangle$ нормальна и в группе $PQ$, подгруппа $\langle a^q \rangle$ нормальна в $G$.

Таким образом, $G$ является группой типа III(i).

Предположим, что $M$ является группой Шмидта и $G$ не является группой типа III(i). Не ограничивая общности, можно допустить, что $M = [R]P$, где $P = \langle b \rangle$ — циклическая группа. Тогда $G = [M]Q = [[R]P]Q$, где $Q$ — группа простого порядка $q$ и $Q$ не является нормальной подгруппой в $G$. Действительно, если $Q$ — нормальная в $G$ подгруппа, то $G = M \times Q$ снова группа типа III(i).

Так как $M = [R]P$ является группой Шмидта, в которой любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны, по леммам 2.3 и 2.1(6) $R$ — минимальная нормальная подгруппа группы $M$, а следовательно, и группы $G$. Предположим, что $RQ$ — нильпотентная группа. Если при этом $PQ$ также является нильпотентной группой, то подгруппа $Q$ нормальна в $G$, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $PQ = [P]Q$ является группой Шмидта. Так как при этом $|P| = p$ ввиду цикличности группы $P$, то $C_G(R) = RQ$ и поэтому подгруппа $Q$ нормальна в $G$, что вновь противоречит рассматриваемому случаю.

Таким образом, $RQ = [R]Q$ является группой Шмидта. Предположим, что подгруппа $PQ = [P]Q$ также является группой Шмидта. Так как при этом $P$ — циклическая группа, то $|P| = p$. Но тогда $p - 1 = q\alpha$ для некоторого натурального $\alpha$ по лемме 2.1(5). Аналогично из того, что $RQ$ и $RP$ являются группами Шмидта, вытекает, что $r^n - 1 = q\beta$ и $r^n - 1 = p\gamma$ для некоторых натуральных $n, \beta$ и $\gamma$. Значит, $p = q\beta\gamma^{-1} = 1 + q\alpha$, что невозможно. Следовательно, $PQ$ — нильпотентная группа, поэтому $G = [R](P \times Q)$, причем из максимальности в $G$ подгруппы $RQ$ вытекает, что $P = \langle b \rangle$ является группой простого порядка $p$. Это влечет $R = F(G)$.

В этом случае $G$ является группой типа III(ii).

Достаточность. Предположим, что $G$ — группа типа II(2). Тогда группа $G$ имеет в точности два класса максимальных нильпотентных подгрупп, представителями которых являются подгруппы $Q_1C_q$ и $PQ_2C_q$ ($Q_2$ — максимальная подгруппа в $Q_1$), и одну максимальную подгруппу Шмидта $PQ_1$. В этом случае представителями 3-максимальных подгрупп группы $G$ являются подгруппы $Q_2, PQ_3, P_1Q_2, Q_3C_q, PQ_4C_q, P_1Q_3C_q$ и $P_2Q_2C_q$, где $Q_3$ — максимальная подгруппа в $Q_2$, $Q_4$ — максимальная подгруппа в $Q_3$, $P_1$ — некоторая максимальная подгруппа в $P$ и $P_2$ — некоторая 2-максимальная подгруппа в $P$. Ввиду условия подгруппы $Q_2, PQ_3, Q_3C_q$ и $PQ_4C_q$ нормальны в $G$. Поскольку $P$ — абелева группа, каждая ее подгруппа нормальна в ней. Следовательно, любые две 3-максимальные подгруппы группы $G$ перестановочны.

Предположим, что $G$ — группа типа II(5). Покажем, что любые две 3-максимальные подгруппы $T$ и $E$ группы $G$ перестановочны.

Рассмотрим вначале случай, когда $T \cap Q_1^x \neq 1$ и $E \cap Q_1^x \neq 1$ для всех $x \in G$. Тогда $Q_1$ имеет собственную подгруппу $Z$ такую, что $Z \leq T \cap E$ и $|Z| = q$. Так как $PQ_1$ — группа Шмидта, то $Z \leq C_G(P)$ и поэтому $Z$ нормальна в $G$. Тогда $G/Z = [PZ/Z](Q_1C_q/Z)$, где $|Q_1C_q/Z| = q^{\alpha}$, $\alpha \geq 2$ при нечетном $q$ и $\alpha > 2$ при $q = 2$. По [20, V, теорема 4.3] $Z = Q'$ и поэтому $Q_1C_q/Z$ — абелева группа типа $(q^{\alpha-1}, q)$. Согласно случаю II(2) $(T/Z)(E/Z) = (E/Z)(T/Z)$ и тем самым

$TE = ET$.

Допустим теперь, что хотя бы одна из подгрупп $T$ или $E$, например $T$, обладает свойством $T \cap Q_1^x = 1$ для всех $x \in G$. Тогда по лемме 2.9 $|Q_1|$ делит $|G : T|$. Так как группа $G$ $q$-нильпотентна, по лемме 2.8 либо $|Q_1| = q^3$, либо $|Q_1| = q^2$.

Покажем, что если $|\langle x\rangle| = q^2$ и $\langle x\rangle \subseteq Q$, то $\langle x\rangle$ не содержится в $T$ для любой 3-максимальной подгруппы $T$ группы $G$. Допустим противное, т. е. что $\langle x\rangle \subseteq T$. Пусть $M$ — максимальная подгруппа группы $G$ такая, что $T$ является 2-максимальной подгруппой в $M$. Если $p$ делит $|G : M|$, то $G = [P]M$, где $|M| = |Q| = q^3$, и поэтому $\langle x\rangle$ не содержится в $T$. Если $q$ делит $|G : M|$, то $|G : M| = q$ ввиду $q$-нильпотентности группы $G$. Тогда $M = [P]\langle x\rangle$, так как $\langle x\rangle$ содержится в $M$, и поэтому $M$ является группой Шмидта. Поскольку $\langle x\rangle \subseteq T \subseteq M$, то $T = T_p\langle x\rangle$ — 2-максимальная подгруппа в $M$, где $T_p$ — силовская $p$-подгруппа в $T$. Но 2-максимальными подгруппами в группе Шмидта $M$ являются лишь подгруппы вида $P, \langle x\rangle^q$ и $P_1\langle x\rangle^q$, где $P_1$ — некоторая максимальная подгруппа в $P$. Полученное противоречие показывает, что $\langle x\rangle$ не содержится в $T$ для любой 3-максимальной подгруппы $T$ группы $G$.

Аналогично можно показать, что если $|\langle x\rangle| = q^3$ и $\langle x\rangle \subseteq Q$, то $\langle x\rangle$ не содержится в $T$ для любой 3-максимальной подгруппы $T$ группы $G$.

Пусть $T = T_pT_q$ и $E = E_pE_q$, где $T_p$, $E_p$, $T_q$ и $E_q$ — силовские $p$-подгруппы и $q$-подгруппы групп $T$ и $E$ соответственно. Так как $T_q$ и $E_q$ не содержат $Q_1$, как показано выше, то $E_q \le [Q_2]Z_1$, где $Q_2$ — максимальная подгруппа в $Q_1$ и $Z_1 \simeq C_q$. Аналогично $T_q \le [Q_2]Z_2$, где $Z_2 \simeq C_q$. Понятно, что каждая подгруппа из $Q_1$ нормальна в $G$. Кроме того, ввиду [20, V, теорема 4.3] $\Omega_1(Q)$ — абелева группа. Так как $Z_1 \le \Omega_1(Q)$ и $Z_2 \le \Omega_1(Q)$, то $Z_1Z_2 = Z_2Z_1$. Тогда ввиду абелевости группы $P$

$$TE = T_pT_qE_pE_q = T_pE_pT_qE_q = E_pE_qT_pT_q = ET.$$

Следовательно, в группе $G$ любые две ее 3-максимальные подгруппы перестановочны.

Аналогично проверяются все остальные случаи. Теорема доказана.

**Следствие 3.2.** *Если в группе $G$ любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны и $|\pi(G)| > 3$, то группа $G$ нильпотентна.*

Заметим, например, что в группе Шмидта $G = [P]Q$, где $P$ изоморфна группе кватернионов порядка 8 и $|Q| = 3^2$, любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны, так как $G$ является группой типа I(b) в теореме 3.1. Однако не каждая 3-максимальная подгруппа этой группы является нормальной в ней. В связи с этим естественным является вопрос об описании ненильпотентных групп, в которых все 3-максимальные подгруппы нормальны. Основываясь на теореме 3.1, мы доказали следующую теорему, дающую решение такой задачи.

**Теорема 3.3.** *Пусть $G$ — ненильпотентная группа. Тогда каждая 3-максимальная подгруппа группы $G$ является нормальной в $G$ в том и только в том случае, когда либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $p, q, r$ — простые числа и $\alpha + \beta + \gamma \le 3$, либо $G$ изоморфна $SL(2, 3)$, либо $G$ является сверхразрешимой группой одного из следующих типов:*

*(1) $G = [P]Q$, где $|P| = p$, $|Q| = q^\beta$ $(\beta \ge 3)$; группа $Q$ либо абелева, либо изоморфна группе кватернионов порядка 8, либо изоморфна группе $M_\beta(q)$ $(\beta > 4)$; всякий элемент из $Q$, порядок которого меньше $q^{\beta-1}$, принадлежит $C_G(P)$;*

(2) $G = [P]Q$, *где* $P$ — *циклическая группа порядка* $p^2$, *обе группы* $\Phi(P)Q$ *и* $G/\Phi(P)$ *являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из* $Q$ *совпадает с* $Z(G)$;

(3) $G = [P_1 \times P_2]Q$, *где* $|P_1| = |P_2| = p$, $P_1Q$ — *группа Шмидта и группа* $P_2Q$ *либо нильпотентна, либо также является группой Шмидта;*

(4) $G = ([P]Q)R$, *где* $P$ *и* $R$ — *минимальные нормальные подгруппы группы* $G$, $|P| = p$, $|R| = r$, $Q$ — *циклическая группа и* $F(G) = PR\Phi(Q)$.

**Следствие 3.4** [1]. *Предположим, что каждая третья максимальная подгруппа группы* $G$ *нормальна в* $G$. *Тогда коммутант* $G'$ *группы* $G$ *является нильпотентным и порядок каждого главного фактора группы* $G$ *не делится на* $p^3$ *для всех простых* $p$.

Понятно, что группы, в которых любые две максимальные подгруппы перестановочны, нильпотентны. Лемма 2.3 показывает, что если в группе $G$ любые две ее 2-максимальные подгруппы перестановочны, то группа $G$ либо нильпотентна, либо бипримарна, т. е. порядок этой группы делится в точности на два простых числа. Теорема 3.1 показывает, что если в группе $G$ любые две ее 3-максимальные подгруппы перестановочны, то группа $G$ либо нильпотентна, либо бипримарна, либо порядок этой группы делится в точности на три простых числа. В связи с этими наблюдениями вполне естественным кажется следующий открытый

**Вопрос 3.5.** *Предположим, что* $G$ — *ненильпотентная группа и любые две ее* $n$*-максимальные подгруппы перестановочны* ($n > 3$). *Верно ли тогда, что* $|\pi(G)| \leq n$?

## 4. Примеры

Классы групп, описанные в теореме 3.1, а следовательно, и в теореме 3.3, попарно не пересекаются. Легко построить примеры, показывающие, что все классы групп, возникающие в этих теоремах, непусты.

Пример 4.1. Пусть $P$ — нециклическая группа порядка 4, $Q$ — циклическая группа порядка 9 и $V$ — максимальная подгруппа из $Q$. Существует гомоморфизм $f$ из $Q$ в $\mathrm{Aut}(P)$ такой, что $\mathrm{Ker}\, f = V$. Следовательно, мы можем рассмотреть группу $G = [P]Q$, где $C_Q(P) = V$. Ясно, что $G$ является группой Шмидта типа I(a) в теореме 3.1.

Пример 4.2. Группа $SL(2,3)$ является группой Шмидта типа I(b) в теореме 3.1. Действительно, группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(Q_8)$ группы кватернионов $Q_8$ порядка 8 имеет элемент $\alpha$ порядка 3. Пусть $G = [Q_8]\langle\alpha\rangle$ — группа, изоморфная $SL(2,3)$. Покажем, что $G$ является группой Шмидта. Пусть $Z$ — единственная подгруппа порядка 2 группы $Q_8$. Тогда $Z \lhd G$ и поэтому $C_G(Z) = G$. Понятно, что $Q_8/Z$ — главный фактор группы $G$ и $Z \leq \Phi(G)$. Также понятно, что $Z\langle\alpha\rangle$ — максимальная подгруппа группы $G$ и каждая максимальная подгруппа $M$ группы $G$ с $|G : M| = 2^\alpha$ является сопряженной к подгруппе $Z\langle\alpha\rangle$. Таким образом, $G$ — группа Шмидта.

Пример 4.3. Пусть $P$ — нециклическая группа порядка 4, $Q$ — циклическая группа порядка $3^3$. Тогда согласно примеру 4.1 группа $G = [P]Q_1$, где $Q_1$ — максимальная подгруппа в $Q$, является группой Шмидта. Таким образом, $G = [P]Q$ является группой типа II(1) в теореме 3.1.

Пример 4.4. Прямое произведение группы Шмидта $G = [P]Q$, где $P$ — нециклическая группа порядка 4 и $Q$ — циклическая группа порядка 9, и группы $Z_3$ порядка 3 является группой типа II(2) в теореме 3.1.

Пример 4.5. Пусть $Z_3$ — группа порядка 3 и $Q_8$ — группа кватернионов порядка 8. Тогда $\mathrm{Aut}(Z_3)$ имеет подгруппу порядка 2 и поэтому существует гомоморфизм $f$ из $Q_8$ в $\mathrm{Aut}(Z_3)$ такой, что $\mathrm{Ker}\, f = V$, где $V$ — подгруппа из $Q_8$ с $|Q_8 : V| = 2$. Следовательно, мы можем рассмотреть группу $G = [Z_3]Q_8$, которая является группой типа II(4) в теореме 3.1.

Пример 4.6. Пусть $Q = \langle x, y \mid x^9 = y^3 = 1,\ x^y = x^4\rangle$ и $Z_7$ — группа порядка 7. Тогда $\Omega_1(Q) = \Omega$ является абелевой группой порядка 9. Так как фактор-группа $Q/\Omega$ изоморфна подгруппе $Z_3$ порядка 3 группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(Z_7)$, мы можем построить $G = [Z_7]Q$. Понятно, что $\langle y\rangle$ является 3-максимальной подгруппой в $G$ и $\langle y\rangle$ не нормальна в $G$. Несложно проверить, что все отличные от $\Omega$ максимальные подгруппы группы $Q$ являются циклическими и поэтому $G$ — группа типа II(5) в теореме 3.1.

Пример 4.7. Пусть теперь $P$ — циклическая группа порядка $3^2$. Тогда по [20, V, лемма 4.1] $|\mathrm{Aut}(P)| = 3\cdot 2$. Пусть $Q$ — силовская 2-подгруппа из $\mathrm{Aut}(P)$. Мы можем рассмотреть группу $G = [P]Q$, где $C_Q(P) = 1$. Если $C_Q(\Phi(P)) = Q$, то по [20, V, теорема 2.4] $Q = 1$; противоречие. Следовательно, $\Phi(P)Q$ — максимальная подгруппа Шмидта в $G$, и каждая максимальная подгруппа $M$ из $G$ с $|G : M| = 3$ сопряжена с $\Phi(P)Q$. Легко заметить, что в группе $G$ каждая 3-максимальная подгруппа нормальна. Таким образом, группа $G$ является примером группы типа II(6) в теореме 3.1.

Пример 4.8. Пусть $M = [R]Q$, где $R$ — группа порядка 5 и $Q$ — силовская 2-подгруппа из $\mathrm{Aut}(R)$. Пусть $P$ — группа порядка 7. Тогда $\mathrm{Aut}(P)$ имеет подгруппу порядка 2 и поэтому существует гомоморфизм $f$ из $M$ в $\mathrm{Aut}(P)$ с $\mathrm{Ker}\, f = V$, где $V$ — подгруппа группы $M$ такая, что $|M : V| = 2$. Следовательно, мы можем рассмотреть группу $G = [P]M$, где $C_M(P) = V$. Ясно, что $G$ является группой типа III(i) в теореме 3.1.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Huppert B.* Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher gruppen // Math. Z. 1954. Bd 60. S. 409–434.
2. *Janko Z.* Finite groups with invariant fourth maximal subgroups // Math. Z. 1963. Bd 82. S. 82–89.
3. *Suzuki M.* The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8, N 4. P. 686–695.
4. *Janko Z.* Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen // Math. Z. 1962. Bd 79. S. 422–424.
5. *Белоногов В. А.* Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами // Мат. заметки. 1968. Т. 3, № 1. С. 21–32.
6. *Семенчук В. Н.* Разрешимые группы со вторыми максимальными сверхразрешимыми подгруппами // Вопросы алгебры. 1985. № 1. С. 86–96.
7. *Gagen T. M., Janko Z.* Finite simple groups with nilpotent third maximal subgroups // J. Austral. Math. Soc. 1966. V. 6, N 4. P. 466–469.
8. *Agrawal R. K.* Generalized center and hypercenter of a finite group // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 54, N 1. P. 13–21.
9. *Поляков Л. Я.* Конечные группы с перестановочными подгруппами // Конечные группы. Минск: Наука и техника. 1966. С. 75–88.

**10.** *Guo X. Y., Shum K. P.* Cover-avoidance properties and the structure of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 2003. V. 181. P. 297–308.
**11.** *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* $X$-semipermutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 31–41.
**12.** *Li Baojun, Skiba A. N.* New characterizations of finite supersoluble groups // Sci. China. Ser. A: Mathematics. 2008. V. 50, N 1. P. 827–841.
**13.** *Guo W., Legchekova H. V., Skiba A. N.* The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups // Comm. Algebra. 2009. V. 37, N 7. P. 2446–2456.
**14.** *Го Вэньбинь, Легчекова Е. В., Скиба А. Н.* Конечные группы, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 3. С. 350–359.
**15.** *Skiba A. N.* Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. № 3. С. 12–31.
**16.** *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
**17.** *Kurzweil H., Stellmacher B.* The theory of finite groups: an introduction. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2004.
**18.** *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
**19.** *Луценко Ю. В., Скиба А. Н.* О группах с перестановочными 3-максимальными подгруппами // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2008. № 2. С. 112–116.
**20.** *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Chelsea, 1980.
**21.** *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

*Статья поступила 10 сентября 2008 г.*

Го Вэньбинь (Wenbin Guo)
Department of Mathematics, Xuzhou Normal University,
221009 Xuzhou, P.R. China
wbguo@xznu.edu.cn

Луценко Юлия Владимировна, Скиба Александр Николаевич
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, математический факультет,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
lucenko_av@mail.ru, skiba@gsu.by