Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 512.542

О ФАКТОРИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ ПОЧТИ ПРОСТЫХ ГРУПП НЕСОПРЯЖЕННЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Т. В. Тихоненко, В. Н. Тютянов

Аннотация. Показано, что ответ на вопрос В. С. Монахова 10.34 из Коуровской тетради в классе почти простых групп является отрицательным.

Ключевые слова: факторизуемая группа, конечная почти простая группа, максимальная подгруппа.

В Коуровской тетради [1] В. С. Монахов записал вопрос 10.34 о существовании конечной неразрешимой группы, совпадающей с произведением любых двух своих несопряженных максимальных подгрупп. В [2] В. И. Зенков анонсировал, что ответ на вопрос 10.34 отрицательный. Однако авторам неизвестно доказательство данного результата.

В настоящей работе с использованием теоремы о классификации конечных простых неабелевых групп доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть G — конечная почти простая группа. Тогда найдутся две несопряженные максимальные подгруппы A и B такие, что $G \neq AB$.*

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используемые обозначения в основном стандартны, их можно найти в [3, 4]. Для удобства приведем некоторые из них. Пусть n — натуральное число, тогда $\pi(n)$ — множество всех простых делителей числа n. Для конечной группы G имеем $\pi(G) = \pi(|G|)$, где $|G|$ — порядок группы G. Если m и n — натуральные числа, то (m, n) — наибольший общий делитель чисел m и n. Для группы G через $\mathrm{Syl}_p(G)$ обозначаем множество всех силовских p-подгрупп группы G, через $\mathrm{soc}(G)$ — цоколь группы G. Запись $A <\cdot\, G$ означает, что подгруппа A максимальна в группе G. В группе Шевалле $G(q)$ обозначим через P_i параболическую подгруппу, полученную исключением i-й вершины в стандартной диаграмме Дынкина, ассоциированной с $G(q)$. Говорят, что конечная группа G *почти простая*, если существует простая неабелева группа N, для которой $N \leq G \leq \mathrm{Aut}(N)$.

В работе [3] рассмотрены факторизации почти простых групп максимальными подгруппами, которые не содержат цоколя всей группы. В леммах 1–3 мы последовательно рассмотрим случаи, когда подгруппа N либо спорадическая группа, либо группа Шевалле, либо знакопеременная группа. При этом доказывается существование двух несопряженных максимальных подгрупп A и B в группе G таких, что $G \neq AB$ и $\mathrm{soc}(G) \nleq A$, $\mathrm{soc}(G) \nleq B$. При доказательстве лемм 1–3 будем иногда использовать таблицы, в которых для группы G указываются две ее несопряженные максимальные подгруппы A и B ($\mathrm{soc}(G) \nleq$

A, $\mathrm{soc}(G) \nleq B$) и простое число p такое, что $p \in \pi(G)$ и $p \notin \pi(A) \cup \pi(B)$. Очевидно, что тогда $G \neq AB$.

Из лемм 1–3 непосредственно следует доказательство теоремы.

Таблица 1

G	A	B	p
M_{11}	S_5	M_{10}	11
M_{12}	$2 \times S_5$	$A_4 \times S_3$	11
$M_{12}.2$	$(2^2 \times A_5) : 2$	$S_4 \times S_3$	11
M_{22}	$L_3(4)$	$2^4 : A_6$	11
$M_{22}.2$	$L_3(4) : 2_2$	$2^4 : S_6$	11
J_2	A_5	$A_4 \times A_5$	7
$J_2.2$	S_5	$(A_4 \times A_5) : 2$	7
M_{23}	A_8	$2^4 : A_7$	11
HS	S_8	$5 : 4 \times A_5$	11
$HS.2$	$S_8 \times 2$	$5 : 4 \times S_5$	11
M_{24}	$L_2(7)$	$2^6 : 3^{\cdot} S_6$	11
He	A_{12}	S_{11}	17
$He.2$	S_{12}	$S_{11} \times 2$	17
Ru	A_8	$5 : 4 \times A_5$	13
Suz	$L_2(25)$	A_7	11
$Suz.2$	$L_2(25) : 2$	S_7	11
Fi_{22}	$2^{10} : M_{22}$	M_{12}	13
$Fi_{22}.2$	$2^{10} : M_{22} : 2$	$M_{12} : 2$	13
Co_1	$5^2 : 4A_5$	$7^2 : (3 \times 2A_4)$	23

Лемма 1. *В почти простой группе G такой, что $N \leq G \leq \mathrm{Aut}(N)$, где N — простая спорадическая группа, найдутся две несопряженные максимальные подгруппы A и B ($\mathrm{soc}(G) \nleq A$, $\mathrm{soc}(G) \nleq B$), для которых $G \neq AB$.*

Доказательство. Все максимальные факторизации групп, удовлетворяющих условию леммы 1, приведены в табл. 6 в [3]. Из данной таблицы следует, что если $N \in \{J_1, J_3, J_4, McL, Ly, O'N, Co_2, Co_3, Fi_{23}, Fi'_{24}, HN, Th, BM, M\}$, то группа G не имеет максимальных факторизаций. Остальные случаи исключаются табл. 1. Подгруппы A и B взяты из [4]. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *В почти простой группе G такой, что $N \leq G \leq \mathrm{Aut}(N)$, где N — простая группа Шевалле, найдутся две несопряженные максимальные подгруппы A и B ($\mathrm{soc}(G) \nleq A$, $\mathrm{soc}(G) \nleq B$), для которых $G \neq AB$.*

Доказательство. Рассмотрим следующие случаи.

1. $N = L_n(q)$, $n \geq 2$.

Рассмотрим случай $n = 2$. Пусть сначала q — четное число и $q \geq 8$. Тогда N содержит максимальные диэдральные подгруппы L и M порядков $2(q-1)$ и $2(q+1)$ соответственно. Очевидно, что $N \neq LM$. Поэтому $N < G$. Пусть $s \in \pi(q-1) \neq \varnothing$ и $r \in \pi(q+1) \neq \varnothing$. Тогда силовская s-подгруппа S из L и силовская r-подгруппа R из M являются силовскими подгруппами в N. По лемме Фраттини $G = NN_G(S) = NN_G(R)$. При этом $L \subseteq N_G(S)$, $M \subseteq N_G(R)$. Покажем, что $N_G(S) = A$ и $N_G(R) = B$ — максимальные подгруппы в группе G. Пусть $A \leq Y <\cdot\, G$. Тогда $Y = A(Y \cap N)$. Так как $L \subseteq Y \cap N$ и $L <\cdot\, N$, то $Y \cap N = L$. Следовательно, $Y = A$. Таким образом, $A <\cdot\, G$. Точно так же показывается, что $B <\cdot\, G$. Из строения подгрупп A и B ясно, что $G \neq AB$.

Пусть теперь q — нечетное число. Если $q > 11$, то диэдральные подгруппы L и M порядков $q-1$ и $q+1$ соответственно будут максимальными в N, поскольку содержат элемент порядка, большего 5, и, следовательно, не вкладываются в подгруппы A_5 и S_4. Если оба числа $q-1$ и $q+1$ делятся на нечетные простые числа, большие 1, то можно применить рассуждения для случая четного q. Пусть, например, $q-1$ — степень числа 2. Тогда $[N : L] = \frac{q(q+1)}{2}$ — нечетное число и $L \in \mathrm{Syl}_2(N)$. Теперь достаточно рассмотреть $A = N_G(L) <\cdot\, G$ и $B = N_G(R) <\cdot\, G$, где $R \in \mathrm{Syl}_r(M) \cap \mathrm{Syl}_r(N) \neq \varnothing$ для некоторого $r \in \pi(q+1) \setminus \{2\}$. Очевидно, что $G \neq AB$. Случай, когда $q+1$ — степень числа 2, рассматривается аналогично. Рассмотрение табл. 2 исключает случай $q \leq 11$. Подгруппы A и B взяты из [4].

Таблица 2

G	A	B	p
$L_2(5)$	A_4	S_3	5
$L_2(5).2$	S_4	$2 \times S_3$	5
$L_2(7)$	S_4	S_4	7
$L_2(7).2$	D_{12}	D_{16}	7
$L_2(9) \cong A_6$	S_4	S_4	5
$L_2(9).2_1$	$S_4 \times 2$	$S_4 \times 2$	5
$L_2(9).2_2$	$3^2 : 8$	D_{16}	5
$L_2(9).2_3$	$3^2 : Q_8$	$8 : 2$	5
$L_2(9).2^2$	$3^2 : [2^4]$	$[2^5]$	5
$L_2(11)$	A_5	A_5	11
$L_2(11).2$	S_4	D_{24}	11

Пусть $n \geq 3$. Если $n = 3$, то в силу изоморфизма $L_3(2) \cong L_2(7)$ можно считать, что $q \geq 3$. Группа $L_3(q)$ содержит подгруппу $H = ((Z_{q-1} \times Z_{q-1})/Z_d)^{\cdot} S_3$, где $d = (3, q-1)$ и $A = N_G(H) <\cdot\, G$ (см. [5, 6]). Из табл. 1, 3 в [3] следует, что A не является сомножителем ни в какой максимальной факторизации группы G. Поэтому $n \geq 4$. Пусть сначала n — четное число. Случай, когда $N \cong L_4(2) \cong A_8$, будет рассмотрен в лемме 3. Теперь из табл. 1, 3 в [3] следует, что в оставшихся случаях $N_G(P_2) = A <\cdot\, G$ не является сомножителем ни в какой максимальной факторизации группы G. Поэтому n — нечетное число. Случай $N \cong L_5(2)$ исключается табл. 3. Подгруппы A и B взяты из [4].

Таблица 3

G	A	B	p
$L_5(2)$	$2^4 : L_4(2)$	$2^4 : L_4(2)$	31
$L_5(2).2$	$L_4(2) : 2$	$S_3 \times L_3(2) : 2$	31

Таблица 4

G	A	B	p
$PSp_4(3)$	$3_+^{1+2} : 2A_4$	$3^3 : S_4$	5
$PSp_4(3).2$	$3_+^{1+2} : 2S_4$	$3^3 : (S_4 \times 2)$	5
$PSp_6(3)$	A_5	$3_+^{1+4} : 2U_4(2)$	13
$PSp_6(3).2$	S_5	$3_+^{1+4} : 2U_4(2).2$	13

В оставшихся случаях из табл. 1, 3 в [3] следует, что $N_G(P_{\frac{n-1}{2}}) = A <\cdot\, G$ не является сомножителем ни в какой максимальной факторизации группы G.

2. $N = PSp_{2n}(q)$, $n \geq 2$.

Пусть q — нечетное число. Из табл. 1–3 в [3] следует, что если $N \notin \{PSp_4(3), PSp_6(3)\}$, то группа G допускает только одну максимальную факторизацию. При этом $A = N_G(P_2) <\cdot\, G$ в данной факторизации не участвует. Обозначим $B = N_G(P_1) <\cdot\, G$. Тогда $G \neq AB$. Оставшиеся случаи исключаются табл. 4. Подгруппы A и B взяты из [4].

Таблица 5

G	A	B	p
$PSp_4(4)$	$(A_5 \times A_5) : 2$	S_6	17
$PSp_4(4).2$	$(A_5 \times A_5) : 2^2$	$S_6 \times 2$	17
$PSp_4(4).4$	$5^2 : [2^5]$	$(S_6 \times 2)^{\cdot} 2$	17

Следовательно, q является четным числом. Пусть $n = 2$. Если $q = 2$, то группа $PSp_4(2) \cong S_6$ не является простой, поэтому $q \geq 4$. Случай $q = 4$ исключается табл. 5. Подгруппы A и B взяты из [4].

Если $q \geq 8$, то группа G содержит максимальную подгруппу $N_G(Sz(q))$ и максимальную подгруппу $N_G(\Omega_4^-(q))$. Однако из табл. 4 в [3] следует, что $G \neq N_G(Sz(q))N_G(\Omega_4^-(q))$.

Если $n \geq 3$, то из табл. 1–3 в [3] вытекает, что максимальная подгруппа, $A = N_G(P_2)$ не является сомножителем ни в одной максимальной факторизации группы G.

3. $N = U_n(q)$, $n \geq 3$.

Если n является нечетным числом, то из табл. 1, 3 в [3] следует, что только в случае $N \in \{U_3(3), U_3(5), U_3(8), U_9(2)\}$ группа G допускает максимальную факторизацию. Если $N = U_9(2)$, то из табл. 3 в [3] вытекает, что G допускает единственную максимальную факторизацию $G = N_G(J_1)N_G(P_1)$, где J_1 —

Таблица 6

G	A	B	p
$U_3(3)$	$4^{\cdot}S_4$	$4^2 : S_3$	7
$U_3(3).2$	$4^{\cdot}S_4 : 2$	$4^2 : D_{12}$	7
$U_3(5)$	$2S_5$	$5_+^{1+2} : 8$	7
$U_3(5).3$	$3 \times 2S_5$	$5_+^{1+2} : 2_4$	7
$U_3(5).2$	$2S_5.2$	$5_+^{1+2} : 8 : 2$	7
$U_3(5).S_3$	$(3 \times 2S_5).2$	$5_+^{1+2} : 2_4 : 2$	7
$U_3(8)$	$2^{3+6} : 21$	$3 \times L_2(8)$	19
$U_3(8).3_1$	$2^{3+6} : (7 : 3 \times 3)$	$3 \times L_2(8) : 3$	19
$U_3(8).3_2$	$2^{3+6} : 63$	$9 \times L_2(8)$	19
$U_3(8).3_3$	$2^{3+6} : 7 : 9$	$L_2(8) : 9$	19
$U_3(8).(3^2)_{1233}$	$2^{3+6} : 63 : 3$	$(9 \times L_2(8)) : 3$	19
$U_3(8).2$	$2^{3+6} : (7 \times S_3)$	$S_3 \times L_2(8)$	19
$U_3(8).6$	$2^{3+6} : (7 : 3 \times S_3)$	$S_3 \times L_2(8) : 3$	19
$U_3(8).S_3$	$2^{3+6} : (7 \times D_{18})$	$D_{18} \times L_2(8)$	19
$U_3(8).(3 \times S_3)$	$2^{3+6} : (7 \times D_{18}) : 3$	$(D_{18} \times L_2(8)) : 3$	19

группа Янко. Поэтому $G \neq AB$, где $A = N_G(J_1) <\cdot\, G$, $B = N_G(P_3) <\cdot\, G$. Оставшиеся случаи исключим табл. 6. Подгруппы A и B взяты из [4].

Пусть n является четным числом. Если $n \geq 6$, то из табл. 1, 3 в [3] следует, что в любой максимальной факторизации группы G отсутствует сомножитель $N_G(P_1) <\cdot\, G$. Поэтому $n = 4$. Так как $U_4(2) \cong PSp_4(3)$, из табл. 1, 3 в [3] следует, что если $N \not\cong U_4(3)$, то в любой максимальной факторизации группы G не содержится сомножитель $N_G(P_1) <\cdot\, G$. Случай $N = U_4(3)$ исключается табл. 7. Подгруппы A и B взяты из [4].

Таблица 7

G	A	B	p
$U_4(3)$	$3^4 : A_6$	$3_+^{1+4}.2S_4$	7
$U_4(3).2_1$	$3^4 : (2 \times A_6)$	$3_+^{1+4}.4S_4$	7
$U_4(3).4$	$3^4 : (2 \times A_6)^{\cdot}2$	$3_+^{1+4}.4S_4{}^{\cdot}2$	7
$U_4(3).2_2$	$3^4 : S_6$	$3_+^{1+4}.2S_4 : 2$	7
$U_4(3).(2^2)_{122}$	$3^4 : (S_6 \times 2)$	$3_+^{1+4}.4S_4 : 2$	7
$U_4(3).2_3$	$3^4 : M_{10}$	$3_+^{1+4}.(2S_4 \times 2)$	7
$U_4(3).(2^2)_{133}$	$3^4 : (2 \times M_{10})$	$3_+^{1+4}.2_-^{1+4}.S_3$	7
$U_4(3).D_8$	$3^4 : (2 \times A_6{}^{\cdot}2^2)$	$3_+^{1+4}.2_-^{1+4}.D_{12}$	7

4. N — исключительная группа Шевалле.

Из табл. 5 в [3] следует, что группа G допускает максимальную факторизацию только в случае, когда $N \in \{G_2(q),\ q = 3^n,\ G_2(4),\ F_4(q),\ q = 2^n\}$. Пусть G — группа с указанным выше цоколем. Рассмотрим $A = N_G(P_1) <\cdot\, G$. Из табл. 5 в [3] вытекает, что подгруппа A не является сомножителем ни в одной максимальной факторизации группы G.

5. $N = P\Omega_{2n+1}(q), n \geq 3$.

Если q — четное число, то из табл. 1–3 в [3] следует, что G не имеет максимальных факторизаций. Поэтому q является нечетным числом. Рассмотрим максимальную подгруппу $A = N_G(P_2) <\cdot\, G$. Из табл. 1–3 в [3] получаем, что A не является сомножителем ни в одной максимальной факторизации группы G.

6. $N \in \{P\Omega_{2n}^+(q),\ n \geq 5;\ P\Omega_{2n}^-(q),\ n \geq 4;\ P\Omega_8^+(q)\}$.

Из табл. 1–4 в [3] следует, что во всех случаях максимальная подгруппа $A = N_G(P_2)$ группы G не является сомножителем ни в одной максимальной факторизации группы G. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *В почти простой группе G такой, что $N \leq G \leq \mathrm{Aut}(N)$, где $N = A_n$ $(n \geq 5)$, найдутся две несопряженные максимальные подгруппы A и B $(\mathrm{soc}(G) \nleq A, \mathrm{soc}(G) \nleq B)$, для которых $G \neq AB$.*

Доказательство. Пусть $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ множество, на котором действует группа G. Пусть A — стабилизатор множества $\{1\}$, B — стабилизатор множества $\{1, 2\}$. Тогда $A = (S_{n-1} \times S_1) \cap G$, $B = (S_{n-2} \times S_2) \cap G$ являются максимальными несопряженными подгруппами группы G. Поскольку произведение AB действует не транзитивно на Ω, то $G \neq AB$. Лемма 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коуровская тетрадь* (Нерешенные вопросы теории групп). Новосибирск: Ин-т математики, 1986.
2. *Зенков В. И.* О факторизации конечных групп // Междунар. алгебр. конф. памяти Д. К. Фаддеева, Санкт-Петербург, 1997. С. 202.
3. *Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J.* The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990. (Mem. Amer. Math. Soc.; N 432(86)).
4. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* An atlas of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985.
5. *Bloom D. M.* The subgroups of $PSL(3, q)$ for odd q // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 127, N 1. P. 150–178.
6. *Hartley R. W.* Determination of the ternary collineation groups whose coefficient Lie in $GF(2^n)$ // Ann. Math. 1925. V. 27, N 2. P. 140–158.

Статья поступила 11 октября 2008 г.

Тихоненко Татьяна Владимировна, Тютянов Валентин Николаевич
Гомельский университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
tihonenkotanya@rambler.ru, tyutyanov@front.ru