Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 512.554.7

ЗАМЕЧАНИЕ О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ПЕРВИЧНОСТИ ВЫРОЖДЕННЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР

Х. К. Кабелло, М. Кабрера, Р. Роура

Аннотация. Доказана первичность алгебры умножений двух первичных вырожденных йордановых алгебр, построенных В. Г. Скосырским.

Ключевые слова: первичная вырожденная йорданова алгебра, конструкция Кантора, йорданова супералгебра, мультипликативно первичная алгебра.

Введение

Первичность алгебры умножений первичных невырожденных йордановых алгебр доказана в [1] при существенном использовании теоремы Зельманова о классификации первичных невырожденных йордановых алгебр [2] (см. также [3]) и теории обобщенных полиномиальных тождеств [4]. Поскольку существуют вырожденные первичные йордановы алгебры, естественно задаться вопросом о первичности алгебры умножений таких алгебр. Первый пример вырожденной первичной йордановой алгебры построен С. В. Пчелинцевым [5]. Другие такие примеры были приведены в работах Ю. А. Медведева и Е. И. Зельманова [6], И. П. Шестакова [7, 8] и В. Г. Скосырского [9]. Все эти примеры возникли из йордановых супералгебр. Конструкция Шестакова, включающая как частные случаи примеры Пчелинцева и Зельманова — Медведева, использует технику перехода к свободным алгебрам некоторого, специальным образом определенного, многообразия йордановых алгебр. Конструкция же Скосырского основывается на нуль-компоненте йордановой супералгебры, полученной процессом удвоения Кантора для подходящих умножения и скобок на алгебре Грассмана. Цель данной заметки состоит в доказательстве первичности алгебры умножений для двух алгебр из работы В. Г. Скосырского [9].

Напомним, что алгебра A называется *первичной*, если $UV \neq 0$ для любых ненулевых идеалов U и V в A. Для элемента a алгебры A через L_a и R_a обозначаем операторы левого и соответственно правого умножений на a. Пусть A — некоторая алгебра. *Алгеброй умножений* алгебры A, обозначаемой через $M(A)$, называют подалгебру в $L(A)$ (алгебра всех линейных отображений из A в A), порожденную тождественным отображением Id_A и множеством $\{L_a, R_a : a \in A\}$. Известно, что алгебра умножений $M(A)$ первичной алгебры A

Частично поддержано испанским MEC (проект MTM2005–02159) и Junta de Andalucía (грант FQM290).

может не быть первичной. Примером служит алгебра, построенная А. А. Албертом в [10]: трехмерная унитальная алгебра A над полем F, заданная тремя порождающими $\{1,\ u,\ v\}$ и соотношениями

$$u^2 = 1, \quad uv = v^2 = v, \quad vu = 0.$$

Алгебра A называется *мультипликативно первичной*, если A и $M(A)$ являются первичными.

Напомним также, что (линейной) *йордановой алгеброй* называется коммутативная алгебра J над полем характеристики, отличной от 2, удовлетворяющая *йорданову тождеству*

$$(x^2 \cdot y) \cdot x = x^2 \cdot (y \cdot x)$$

для всех $x, y \in J$. Как обычно, для элемента z из J оператор $U_z\colon J \to J$ определяется правилом: $U_z(x) = 2z \cdot (z \cdot x) - z^2 \cdot x$ для любого x из J. Элемент z из J называется *абсолютным делителем нуля*, если $U_z = 0$. Говорят, что йорданова алгебра J *невырожденна*, если она не содержит абсолютных делителей нуля. Любая первичная невырожденная йорданова алгебра является мультипликативно первичной [1, теорема 2.1].

Далее G обозначает *алгебру Грассмана* счетного ранга, порожденную множеством $X = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ над полем $\mathbb{K}$ характеристики, отличной от 2. Напомним, что G является фактор-алгеброй $\mathbb{K}\langle X\rangle$ (унитальная свободная ассоциативная алгебра над $\mathbb{K}$, порожденная X) по идеалу, порожденному элементами вида

$$x_i x_j + x_j x_i \quad (i, j \in \mathbb{N}).$$

Следовательно, в качестве базиса G можно рассмотреть единицу и мономы вида $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_n$. Как обычно, единичный элемент может быть рассмотрен как моном нулевой длины.

Напомним, что *супералгебра* — это алгебра A с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой: два различных подпространства A_0 и A_1 удовлетворяют условиям $A = A_0 \oplus A_1$ и $A_\alpha A_\beta \subseteq A_{\alpha+\beta}$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$. Алгебра Грассмана является супералгеброй со следующей естественной $\mathbb{Z}_2$-градуировкой: G_0 — это подпространство в G, порожденное всеми мономами четной длины, а G_1 — подпространство, порожденное всеми мономами нечетной длины.

1. Йорданова алгебра $J(G, \partial)$

Нечетным дифференцированием супералгебры $A = A_0 \oplus A_1$ называется линейное отображение $\delta : A \to A$ такое, что

$$\delta(A_\alpha) \subseteq A_{\alpha+1}, \quad \delta(a_\alpha b_\beta) = \delta(a_\alpha) b_\beta + (-1)^\alpha a_\alpha \delta(b_\beta) \quad (a_\alpha \in A_\alpha, b_\beta \in A_\beta).$$

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ символом ∂_i обозначают нечетное дифференцирование на G, определенное правилом

$$\partial_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{(символ Кронекера)}.$$

Следовательно, для любого монома $g = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_n$) имеем

$$\partial_i(g) = 0 \quad \text{при } i \neq i_k \quad (1 \leq k \leq n)$$

и

$$\partial_i(g) = (-1)^{k-1} x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}} x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n} \text{ при } i = i_k \text{ для некоторого } k\ (1 \leq k \leq n).$$

Йорданова алгебра $J(G,\partial)$ — это алгебра, полученная из алгебры Грассмана G заменой ассоциативного произведения (обозначаемого приписыванием) произведением $\bullet$, определенным правилом

$$a_0 \bullet b_\alpha = b_\alpha \bullet a_0 = a_0 b_\alpha, \quad a_1 \bullet b_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \partial_i(a_1)\partial_i(b_1).$$

Лемма 1. *Пусть U — идеал в $J(G,\partial)$. Если U содержит моном $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$ нечетной длины, то $\partial_k(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}) \in U$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} \bullet x_k = \sum_{i=1}^{\infty} \partial_i(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n})\partial_i(x_k) = \partial_k(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n})$$

и, следовательно, $\partial_k(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}) \in U$. $\square$

Лемма 2. *Пусть U — идеал в $J(G,\partial)$ и n — нечетное число. Если U содержит моном длины n, то U содержит все мономы длины n.*

Доказательство. Предположим, что $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} \in U$. Зафиксируем k такое, что $1 \le k \le n$ и $j \in \mathbb{N}\backslash\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$. Поскольку

$$\begin{aligned}(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} \bullet x_{i_k}) \bullet x_j &= (-1)^{k-1} x_{i_1}\dots x_{i_{k-1}}x_{i_{k+1}}\dots x_{i_n} \bullet x_j \\ &= x_{i_1}\dots x_{i_{k-1}}x_j x_{i_{k+1}}\dots x_{i_n},\end{aligned}$$

то $x_{i_1}\dots x_{i_{k-1}}x_j x_{i_{k+1}}\dots x_{i_n} \in U$. В итоге по индукции имеем $x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_n} \in U$ для всех $j_1 < j_2 < \dots < j_n$. $\square$

Из лемм 1 и 2 вытекает

Следствие 3. *Пусть U — идеал в $J(G,\partial)$ и n — нечетное число. Если U содержит моном длины n, то U содержит все мономы длины $n-1$.*

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ будем обозначать подпространство в G, порожденное всеми мономами длины $\ge 2n$, через I_{2n}. Из определения произведения ясно, что I_{2n} — это идеал в $J(G,\partial)$.

Предложение 4. *Для каждого ненулевого идеала U в $J(G,\partial)$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $I_{2n} \subseteq U$.*

Доказательство. Пусть U — ненулевой собственный идеал в $J(G,\partial)$. По [9, лемма 1] U содержит мономы. Пусть m — минимальная длина мономов из U. Так как U является собственным идеалом, то $m \ne 0$. По лемме 1 m должно быть четным. Если $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m} \in U$ и $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, то

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m}x_{i_m+1} = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m} \bullet x_{i_m+1} \in U$$

и, следовательно, U содержит все мономы длины m по следствию 3. Поскольку любой моном длины $p > m$ может быть записан в виде произведения монома длины m на моном длины $p-m$, приходим к тому, что $I_m \subseteq U$. $\square$

Следуя [9], в йордановых алгебрах будем обозначать через T_a оператор умножения на элемент a.

Лемма 5. *Пусть $g_1, \dots, g_k, h$ — мономы и $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{2n}}$ — порождающие из G, не входящие в $g_1, \dots, g_k, h$. Тогда*

$$T_{g_1} \dots T_{g_k}(h \bullet x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{2n}}) = T_{g_1} \dots T_{g_k}(h) \bullet x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{2n}}.$$

Доказательство проведем индукцией по k. Положим $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{2n}}$. Пусть $k = 1$. Если либо g_1, либо h имеет четную длину, то

$$T_{g_1}(h \bullet f) = g_1 \bullet (h \bullet f) = g_1(hf) = (g_1 h) f = (g_1 \bullet h) \bullet f = T_{g_1}(h) \bullet f.$$

В случае, когда и g_1 и h имеют нечетную длину, имеем

$$T_{g_1}(h \bullet f) = g_1 \bullet (h \bullet f) = \sum_i \partial_i(g_1)\partial_i(hf) = \sum_i \left(\partial_i(g_1)\partial_i(h) f - \partial_i(g_1) h \partial_i(f)\right).$$

Так как $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{2n}}$ не входят в g_1, для любого $i \in \mathbb{N}$ либо $\partial_i(g_1) = 0$, либо $\partial_i(f) = 0$. Следовательно,

$$T_{g_1}(h \bullet f) = \sum_i \partial_i(g_1)\partial_i(h) f = \Big(\sum_i \partial_i(g_1)\partial_i(h)\Big) f = (g_1 \bullet h) \bullet f = T_{g_1}(h) \bullet f,$$

откуда получаем доказательство для случая $k = 1$.

Предположим, что $k > 1$ и утверждение доказано при $k - 1$. Заметим, что $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{2n}}$ не входят в $T_{g_k}(h)$. Значит,

$$\begin{aligned} T_{g_1} \dots T_{g_k}(h \bullet f) = T_{g_1} \dots T_{g_{k-1}} \left(T_{g_k}(h \bullet f)\right) T_{g_1} \dots T_{g_{k-1}} \left(T_{g_k}(h) \bullet f\right) \\ = T_{g_1} \dots T_{g_{k-1}}(T_{g_k}(h)) \bullet f = T_{g_1} \dots T_{g_k}(h) \bullet f, \end{aligned}$$

и доказательство завершено. □

Теорема 6. *Йорданова алгебра $J(G, \partial)$ является мультипликативно первичной вырожденной алгеброй.*

Доказательство. По [9, предложение 2] $J(G, \partial)$ — первичная вырожденная йорданова алгебра. Зафиксируем $F \in M(J(G, \partial)) \backslash \{0\}$. Так как $J(G, \partial)$ линейно порождается мономами, мы можем, во-первых, утверждать, что существует моном h, для которого $F(h) \neq 0$, и, во-вторых, записать

$$F = \lambda_0 \operatorname{Id}_{J(G,\partial)} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k S_k$$

для $S_k = T_{g_{k,1}} \dots T_{g_{k,n_k}}$, подходящих $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n_k \in \mathbb{N}$ и мономов $g_{k,i}$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим порождающие $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{2n}}$ в G, не входящие в мономы h и $g_{k,i}$ ($1 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq n_k$). Положим $f = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{2n}}$. По лемме 5 имеем

$$S_k(h \bullet f) = S_k(h) \bullet f$$

для всех k и потому

$$F(h \bullet f) = F(h) \bullet f = F(h) x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{2n}}.$$

Поскольку $F(h) \neq 0$ и $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{2n}}$ не входят в многочлен $F(h)$, будет $F(h \bullet f) \neq 0$. Таким образом, $F(I_{2n}) \neq 0$. По предложению 4 можно утверждать, что $F(U) \neq 0$ для любого ненулевого идеала U в $J(G, \partial)$. В итоге по [11, предложение 1] получаем, что $J(G, \partial)$ является мультипликативно первичной алгеброй. □

2. Йорданова алгебра $J(G, D)$

Четным дифференцированием супералгебры $A = A_0 \oplus A_1$ называется линейное отображение $\delta : A \to A$ такое, что

$$\delta(A_\alpha) \subseteq A_\alpha, \quad \delta(a_\alpha b_\beta) = \delta(a_\alpha) b_\beta + a_\alpha \delta(b_\beta) \quad (a_\alpha \in A_\alpha,\ b_\beta \in A_\beta).$$

Рассмотрим четное дифференцирование D в G, определенное правилом

$$D(x_i) = x_{i+1} \quad \text{для всех } i \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого монома $g = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$ $(n \in \mathbb{N},\ i_1 < i_2 < \dots < i_n)$ имеем

$$D(g) = x_{i_1+1} x_{i_2} \dots x_{i_n} + \dots + x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{k-1}} x_{i_k+1} x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n} + \dots \\ + x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{n-1}} x_{i_n+1}.$$

Йорданова алгебра $J(G, D)$ получается из алгебры Грассмана G заменой ассоциативного произведения (обозначаемого приписыванием) произведением $\bullet$, определенным правилом

$$a_0 \bullet b_\alpha = b_\alpha \bullet a_0 = a_0 b_\alpha, \quad a_1 \bullet b_1 = a_1 D(b_1) - D(a_1) b_1.$$

Следующая лемма, играющая ключевую роль в теореме 9, явно возникает в доказательстве из [9, предложение 3].

Лемма 7. *Если U — ненулевой идеал в $J(G, D)$ и $n \in \mathbb{N}$, то существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $m - (n-1)$ четное и $x_n \dots x_m \in U$.*

Для каждого $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ будем обозначать через J_m подпространство в G, которое порождено всеми мономами, содержащими некоторый x_k при $k > m$. Из определения произведения ясно, что J_m — идеал в $J(G, D)$.

Лемма 8. *Пусть $g_1, \dots, g_k, h$ — мономы и $m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $m - (n-1)$ является четным. Тогда*

$$T_{g_1} \dots T_{g_k}(h \bullet x_n \dots x_m) - T_{g_1} \dots T_{g_k}(h) \bullet x_n \dots x_m \in J_m.$$

Доказательство проведем индукцией по k. Положим $f = x_n \dots x_m$. Пусть $k = 1$. Если либо g_1, либо h имеет четную длину, то

$$T_{g_1}(h \bullet f) = g_1 \bullet (h \bullet f) = g_1(hf) = (g_1 h) f = (g_1 \bullet h) \bullet f = T_{g_1}(h) \bullet f.$$

Следовательно,

$$T_{g_1}(h \bullet f) - T_{g_1}(h) \bullet f = 0 \in J_m.$$

В случае, когда и g_1 и h имеют нечетную длину, получаем

$$\begin{aligned} T_{g_1}(h \bullet f) &= g_1 \bullet (h \bullet f) = g_1 D(hf) - D(g_1)(hf) \\ &= g_1(D(h) f + h D(f)) - (D(g_1) h) f \\ &= (g_1 D(h) - D(g_1) h) f + g_1 h \left(\sum_{k=n}^{m} x_n \dots x_{k-1} D(x_k) x_{k+1} \dots x_m \right) \\ &= (g_1 \bullet h) \bullet f + g_1 h x_n \dots x_{m-1} x_{m+1} = T_{g_1}(h) \bullet f + g_1 h x_n \dots x_{m-1} x_{m+1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$T_{g_1}(h \bullet f) - T_{g_1}(h) \bullet f = g_1 h x_n \dots x_{m-1} x_{m+1} \in J_m.$$

Таким образом, в любом случае

$$T_{g_1}(h \bullet f) - T_{g_1}(h) \bullet f \in J_m, \tag{1}$$

и это завершает доказательство при $k = 1$.

Предположим, что $k > 1$ и утверждение верно при $k - 1$. Запишем

$$\begin{aligned} T_{g_1}T_{g_2}\dots T_{g_k}(h \bullet f) - T_{g_1}T_{g_2}\dots T_{g_k}(h) \bullet f \\ = T_{g_1}\left[T_{g_2}\dots T_{g_k}(h \bullet f) - T_{g_2}\dots T_{g_k}(h) \bullet f\right] \\ + T_{g_1}\left(T_{g_2}\dots T_{g_k}(h) \bullet f\right) - T_{g_1}T_{g_2}\dots T_{g_k}(h) \bullet f. \end{aligned} \tag{2}$$

По предположению индукции

$$T_{g_2}\dots T_{g_k}(h \bullet f) - T_{g_2}\dots T_{g_k}(h) \bullet f \in J_m,$$

поэтому

$$T_{g_1}\left[T_{g_2}\dots T_{g_k}(h \bullet f) - T_{g_2}\dots T_{g_k}(h) \bullet f\right] \in J_m. \tag{3}$$

С другой стороны, записывая

$$T_{g_2}\dots T_{g_k}(h) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_i$$

для подходящих $p \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ и мономов h_i, получаем

$$T_{g_1}\left(T_{g_2}\dots T_{g_k}(h) \bullet f\right) - T_{g_1}T_{g_2}\dots T_{g_k}(h) \bullet f = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left(T_{g_1}(h_i \bullet f) - T_{g_1}(h_i) \bullet f\right).$$

Согласно (1)

$$T_{g_1}\left(T_{g_2}\dots T_{g_k}(h) \bullet f\right) - T_{g_1}T_{g_2}\dots T_{g_k}(h) \bullet f \in J_m. \tag{4}$$

Окончательно, принимая во внимание (2), (3) и (4), имеем

$$T_{g_1}\dots T_{g_k}(h \bullet f) - T_{g_1}\dots T_{g_k}(h) \bullet f \in J_m + J_m \subseteq J_m. \quad \square$$

Теорема 9. *Йорданова алгебра $J(G, D)$ является мультипликативно первичной вырожденной.*

Доказательство. По [9, предложение 3] $J(G, D)$ — первичная вырожденная йорданова алгебра. Зафиксируем $F \in M(J(G, D))\backslash\{0\}$. Так как $J(G, D)$ линейно порождается мономами, мы можем, во-первых, утверждать, что существует моном h такой, что $F(h) \neq 0$, и, во-вторых, записать

$$F = \lambda_0 \operatorname{Id}_{J(G,\partial)} + \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k S_k$$

для $S_k = T_{g_{k,1}}\dots T_{g_{k,n_k}}$, подходящих $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{K}$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n_k \in \mathbb{N}$ и мономов $g_{k,i}$. Пусть p — максимальный индекс i из x_i, входящих в $F(h)$, и положим $n := p + 1$. Зафиксируем ненулевой идеал U в $J(G, D)$. По лемме 7 существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $m - (n - 1)$ четно и $x_n \dots x_m \in U$. По лемме 8 видим, что

$$S_k(h \bullet x_n \dots x_m) - S_k(h) \bullet x_n \dots x_m \in J_m$$

для всех k с условием $1 \leq k \leq m$ и, следовательно,

$$F(h \bullet x_n \dots x_m) - F(h) \bullet x_n \dots x_m \in J_m.$$

Принимая во внимание определение n и неравенство $F(h) \neq 0$, мы можем убедиться, что

$$F(h) \bullet x_n \dots x_m = F(h)x_n \dots x_m \notin J_m.$$

Стало быть, $F(h \bullet x_n \dots x_m)$ не принадлежит J_m и, в частности, является ненулевым элементом. Поскольку $x_n \dots x_m \in U$ и $h \bullet x_n \dots x_m \in U$, то $F(U) \neq 0$. В итоге по [11, предложение 1] можем заключить, что $J(G, D)$ является мультипликативно первичной алгеброй. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cabrera M., Villena A. R.* Multiplicative-semiprimeness of nondegenerate Jordan algebras // Comm. Algebra. 2004. V. 32, N 10. P. 3995–4003.

2. *Зельманов Е. И.* О первичных йордановых алгебрах. II // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 1. С. 89–104.

3. *McCrimmon K., Zelmanov E.* The structure of strongly prime quadratic Jordan algebras // Adv. Math. 1988. V. 69, N 2. P. 133–222.

4. *Beidar K. I., Martindale 3rd W. S., Mikhalev A. V.* Rings with generalized identities. New York, NY: Marcel Dekker, 1996.

5. *Пчелинцев С. В.* Первичные алгебры и абсолютные делители нуля // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 1. С. 79–100.

6. *Medvedev Yu. A., Zelmanov E. I.* Some counter-examples in the theory of Jordan algebras // Nonassociative algebraic models (Zaragoza, 1989). Commack, NY: Nova Sci. Publ., 1992. P. 1–16.

7. *Шестаков И. П.* Супералгебры и контрпримеры // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 6. С. 187–196.

8. *Shestakov I. P.* Superalgebras as a building material for constructing counterexamples // Hadronic mechanics and nonpotential interactions. Part 1 (Cedar Falls, IA, 1990). Commack, NY: Nova Sci. Publ., 1992. P. 53–64.

9. *Скосырский В. Г.* Первичные йордановы алгебры и конструкция Кантора // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 3. С. 301–316.

10. *Albert A. A.* The radical of a non-associative algebra // Bull. Amer. Math. Soc. 1942. V. 48. P. 891–897.

11. *Cabrera M., Mohammed A. A.* Extended centroid and central closure of the multiplication algebra // Comm. Algebra. 1999. V. 27, N 12. P. 5723–5736.

Статья поступила 31 марта 2009 г.

J. C. Cabello, M. Cabrera, R. Roura (Кабелло Х. К., Кабрера М., Роура Р.)
Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Ciencias
Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain
`jcabello@ugr.es, cabrera@ugr.es, rroura@gmail.com`