Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 512.542

О π'–СВОЙСТВАХ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ, ОБЛАДАЮЩЕЙ π–ХОЛЛОВОЙ ПОДГРУППОЙ

В. Н. Князина, В. С. Монахов

Аннотация. Исследуются π'-свойства конечной группы, обладающей π-холловой подгруппой, которая перестановочна с некоторыми силовскими подгруппами группы или с некоторыми минимальными ненильпотентными подгруппами.

Ключевые слова: конечная группа, холлова подгруппа, добавление, перестановочные подгруппы.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Напомним используемые обозначения и определения [1–4]. Пусть π — некоторое множество простых чисел, π' — дополнение к π в множестве всех простых чисел. Подгруппу, порядок которой делится только на простые числа из π, а ее индекс в группе — только на простые числа из π', называют *π-холловой.* Группа G обладает свойством E_π, если в G имеется π-холлова подгруппа. Если при этом любые две π-холловы подгруппы сопряжены, то группа G обладает свойством C_π. Если группа G является C_π-группой и любая ее π-подгруппа содержится в некоторой π-холловой подгруппе, то группа G обладает свойством D_π. Группу со свойством E_π, C_π, D_π называют соответственно E_π-, C_π-, *D_π-группой.*

Каждая разрешимая группа является D_π-группой для любого множества $\pi \subseteq \pi(G)$ [2, теорема 18.2; 3, теорема 4.35]. Каждая неразрешимая группа не является $E_{\{2,p\}}$-группой для некоторого нечетного простого делителя p ее порядка [5].

Классическую теорему Шура — Цассензауза (см., например, [3, теорема 4.32]) можно сформулировать следующим образом: *если в группе G имеется нормальная π-холлова подгруппа, то G является $D_{\pi'}$-группой.*

Условие нормальности π-холловой подгруппы в этой теореме отбросить нельзя. Например, в любой группе существует силовская p-подгруппа для каждого простого p, но существование p'-холловых подгрупп для каждого простого p равносильно разрешимости группы, [3, следствие теоремы 4.36].

Нормальная подгруппа перестановочна со всеми подгруппами группы. В [6] Фогель заметил, что *если π-холлова подгруппа H группы G перестановочна со всеми подгруппами из подгруппы K и $G = HK$, то G будет $E_{\pi'}$-группой.* Этот результат развили В. Го, К. П. Шам и А. Н. Скиба [7, 8] за счет предложенного ими понятия X-перестановочности.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор Ф 10Р–231).

Пусть X — непустое подмножество группы G. Подгруппы A и B называются *X-перестановочными*, если существует элемент $x \in X$ такой, что $AB^x = B^xA$. Если $X = 1$ — единичная подгруппа, то 1-перестановочные подгруппы — это в точности перестановочные подгруппы. В [8] доказана следующая версия теоремы Шура — Цассенхауза. *Пусть A — холлова подгруппа группы G и $X = F(G)$ — подгруппа Фиттинга G. Предположим, что A X-перестановочна со всеми подгруппами из некоторого добавления T к A в G. Предположим также, что или A, или T разрешима. Тогда A дополняема в G и любые два дополнения сопряжены в G.*

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Известно, что группы Шмидта имеют порядок, делящийся точно на различные два простых числа, одна из силовских подгрупп нормальная, а другая — циклическая (см., например, [9]). Конечные группы с ограничениями на некоторые подгруппы Шмидта исследовались в [10–12].

В настоящей работе изучаются свойства $E_{\pi'}$, $C_{\pi'}$ и $D_{\pi'}$ группы G при условии, что существуют π-холлова подгруппа A и подгруппа B такие, что $G = AB$ и A X-перестановочна с некоторыми силовскими подгруппами из B или с некоторыми подгруппами Шмидта из B. Доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть A, B и X — подгруппы группы G такие, что $G = AB$, A — собственная π-холлова подгруппа и X — нормальная подгруппа. Зафиксируем простое число $q \in \pi(G) \setminus \pi$. Предположим, что для каждого $p \in \pi(G) \setminus \pi$, $p \neq q$, подгруппа A X-перестановочна с любой силовской p-подгруппой из B. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если X — $C_{\pi'}$-подгруппа, то G является $C_{\pi'}$-группой.*
2. *Если X — $D_{\pi'}$-подгруппа, то G является $D_{\pi'}$-группой.*

Утверждение 1 теоремы 1 доказывается без использования классификации конечных простых групп. При доказательстве утверждения 2 используется теорема Е. П. Вдовина и Д. О. Ревина [13] о том, что расширение D_π-группы с помощью D_π-группы является D_π-группой, опирающаяся на классификацию конечных простых групп. Частными случаями теоремы 1 являются теорема 4 из [6], теорема 1.2 из [7] и теорема 1.2 и следствие 1.3 из [8]. Отметим, что при $X = 1$, а также при $X = 1$ и $B = G$ оба утверждения теоремы 1 новые.

Теорема 2. *Пусть A, B и X — подгруппы группы G такие, что A π-холлова, $G = AB$ и X нормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если X — $C_{\pi'}$-подгруппа и A X-перестановочна со всеми p-замкнутыми pd-подгруппами Шмидта из B для всех $p \in \pi$, то G является $E_{\pi'}$-группой.*
2. *Если X — $C_{\pi'}$-подгруппа, а A нильпотентна и X-перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B, то G является $C_{\pi'}$-группой.*
3. *Если X — D_π-подгруппа (C_π-подгруппа) группы G и A X-перестановочна со всеми π-подгруппами Шмидта из G, то G является D_π-группой (C_π-группой соответственно).*

Доказательство D_π-свойства в утверждении 3 теоремы 2 опирается на классификацию конечных простых групп, доказательства остальных утверждений теорем 2 и 3 классификацию не используют.

Теорема 3. *Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы G, A — p'-подгруппа из G и X — нормальная p'-подгруппа группы G. Предполо-*

жим, что $G = AB$ и A X-перестановочна с любой максимальной подгруппой из каждой силовской p-подгруппы из подгруппы B. Тогда $A \subseteq O_{p'}(G)$.

1. Вспомогательные результаты

Нам потребуются следующие вспомогательные результаты. Вначале отметим следующие очевидные свойства X-перестановочных подгрупп.

Лемма 1. *Пусть A, B и X — подгруппы группы G, а N — нормальная в G подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если A X-перестановочна с B, то AN/N XN/N-перестановочна с BN/N.*
2. *Если A X-перестановочна с B и X — нормальная подгруппа группы G, то AX/X перестановочна с BX/X.*

Лемма 2. *Пусть G — группа и N — ее нормальная подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если N — C_π-группа, а G/N — E_π-группа, то G — E_π-группа.*
2. *Если N и G/N — C_π-группы, то G — C_π-группа.*
3. *Если N и G/N — D_π-группы, то G — D_π-группа.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 доказаны С. А. Чунихиным [1] (см. также [2, теоремы 18.11, 18.12; 14, теорема 5.3.12]). Утверждение 3 доказано Е. П. Вдовиным и Д. О. Ревиным в [13] с использованием классификации конечных простых групп.

Лемма 3 [4, лемма VI.4.10]. *Пусть G — группа, A и B — подгруппы группы G такие, что $AB^x = B^xA$ для всех $x \in G$ и $G \neq AB$. Тогда либо A^G, либо B^G отлично от G.*

Лемма 4. *Если π-холлова подгруппа H группы G перестановочна с подгруппой K, то $H \cap K$ является π-холловой подгруппой в K.*

Доказательство. По условию $HK = KH$. Так как $|HK| = |H||K|/|H \cap K|$, то $|HK : H| = |K : H \cap K|$. Из леммы об индексах вытекает, что

$$|G : H| = |G : HK||HK : H|,$$

откуда следует, что $|HK : H|$ есть π'-число. Теперь $H \cap K$ является π-подгруппой и ее индекс в K есть π'-число. Поэтому $H \cap K$ — π-холлова подгруппа группы K. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть H, K и N — попарно перестановочные подгруппы группы G. Если H холлова, то $N \cap HK = (N \cap H)(N \cap K)$.*

Доказательство. Положим $L = N \cap HK$. По тождеству Дедекинда

$$NK \cap HK = K(N \cap HK) = KL, \quad NH \cap HK = H(N \cap HK) = HL,$$

поэтому подгруппа L перестановочна с подгруппами H и K. Из равенств

$$|HK| = |H||K|/|H \cap K|, \quad |KL| = |K||L|/|K \cap L|$$

и леммы об индексах следует, что

$$|HK : K| = |H : H \cap K| = |HK : KL||KL : K| = |HK : KL||L : K \cap L|.$$

Значит, $\pi(L : K \cap L) \subseteq \pi(H) \cap \pi(L)$, в частности, индекс подгруппы $K \cap L$ в L есть π-число. По лемме 4 подгруппа $H \cap L$ π-холлова в L, где $\pi = \pi(H)$, поэтому $L = (L \cap H)(L \cap K)$. Заменяя L на $N \cap HK$, получаем

$$N \cap HK = (N \cap HK \cap H)(N \cap HK \cap K) = (N \cap H)(N \cap K).$$

Лемма доказана.

Условимся называть $S_{\langle p,q\rangle}$*-группой* $\{p,q\}$-группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и циклической силовской q-подгруппой.

Лемма 6 [11, лемма 2]. *Если K и D — подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:*

1) L — p-замкнутая $\{p,q\}$-подгруппа;

2) все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны;

3) L содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и $L=([P]Q)^L=Q^L$.

Лемма 7 [12, лемма 5]. *Пусть подгруппа A группы G перестановочна с подгруппами $B_1,B_2,\ldots,B_n$. Тогда A перестановочна с подгруппой $\langle B_1,B_2,\ldots,B_n\rangle$, порожденной ими.*

Лемма 8 [9, теорема 2.1]. *Если в группе G нет p-замкнутых подгрупп Шмидта, то G p-нильпотентна.*

Подгруппа A называется $S_{\langle p,q\rangle}$*-полунормальной в группе* G, если существует подгруппа B такая, что $G=AB$ и либо подгруппа B нильпотентна, либо подгруппа A перестановочна со всеми $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппами Шмидта из B. В этой ситуации подгруппу B назовем $S_{\langle p,q\rangle}$*-добавлением к подгруппе* A.

Минимальным $S_{\langle p,q\rangle}$*-добавлением* назовем такое $S_{\langle p,q\rangle}$-добавление K к $S_{\langle p,q\rangle}$-полунормальной подгруппе H, для которого $HK_1\neq G$ для каждой собственной подгруппы K_1 из K.

Лемма 9. *Пусть H — $S_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа группы G и K — ее $S_{\langle p,q\rangle}$-добавление. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Если $H\leq T\leq G$, то H $S_{\langle p,q\rangle}$-полунормальна в T и $T\cap K$ является $S_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к H в T.

2. Если L — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из K, то H перестановочна со всеми сопряженными с L подгруппами группы G.

3. Для любого $x\in G$ подгруппа K^x является $S_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к подгруппе H в группе G.

4. Подгруппа H^x является $S_{\langle p,q\rangle}$-полунормальной в G, а подгруппа K^y — ее $S_{\langle p,q\rangle}$-добавление для всех x и y из G.

5. Если $N\lhd G$, то HN/N — $S_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа группы G/N, а KN/N — ее $S_{\langle p,q\rangle}$-добавление.

Доказательство. По определению $S_{\langle p,q\rangle}$-полунормальной подгруппы подгруппа K либо нильпотентна, либо ненильпотентна. Если она нильпотентна, то все свойства очевидны. Поэтому в дальнейшем считаем, что K ненильпотентна.

1. По тождеству Дедекинда $T=T\cap HK=H(T\cap K)$. Так как H $S_{\langle p,q\rangle}$-полунормальна в G и K — ее $S_{\langle p,q\rangle}$-добавление, то H перестановочна со всеми $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппами из пересечения $T\cap K$.

2. Пусть $g=ab$, $a\in K$, $b\in H$ и L — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из K. Тогда $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа L^a содержится в K, поэтому подгруппы H и L^a перестановочны. Из равенств

$$HL^g=HL^{ab}=(HL^a)^b=(L^aH)^b=L^{ab}H=L^gH$$

следует, что H перестановочна со всеми сопряженными с L в группе G подгруппами.

3. По лемме 1.43 из [3] $G = HK^x$ для любого $x \in G$. Пусть S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из K^x. Тогда $S^{x^{-1}}$ является $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой в K. Поэтому подгруппы H и $S^{x^{-1}}$ перестановочны. По п. 2 подгруппы H и S перестановочны. Следовательно, K^x — $S_{\langle p,q\rangle}$-добавление к H в G.

4. Пусть x и y — произвольные элементы группы G. По лемме 1.43 из [3] $G = H^xK^y$. Пусть S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из K^y. По п. 3 подгруппа K^y является $S_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к подгруппе H. Применяя утверждение из п. 2, получаем, что подгруппы H и $S^{x^{-1}}$ перестановочны: $HS^{x^{-1}} = S^{x^{-1}}H$. Из последнего равенства следует, что $H^xS = SH^x$. Это означает, что H^x — $S_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа в группе G и K^y — ее $S_{\langle p,q\rangle}$-добавление в G.

5. Ясно, что $G/N = (HN/N)(KN/N)$. Пусть KN/N ненильпотентна и A/N — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа Шмидта из KN/N. Тогда $A \subseteq KN$ и $A = (A \cap K)N$. Пусть L — минимальное добавление к подгруппе N в A такое, что $L \subseteq A \cap K$. Тогда L обладает свойствами 1–3 из леммы 6. В частности, L содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу Шмидта $[P]Q$ такую, что Q не содержится в N и $L = ([P]Q)^L = Q^L$. Так как $[P]Q \subseteq L \subseteq A \cap K$, подгруппа H перестановочна с $[P]Q$. По п. 2 подгруппа H перестановочна с $([P]Q)^l$ для всех $l \in L$. По лемме 7 подгруппа H перестановочна с $([P]Q)^L = L$. Так как $A = LN$, подгруппа H перестановочна с подгруппой A. Отсюда следует, что HN/N перестановочна с подгруппой A/N, т. е. HN/N — $S_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа в G/N. Лемма доказана.

Лемма 10 [4, теорема IV.4.7]. *Пусть P — силовская p-подгруппа группы G и N — нормальная подгруппа в G. Если $N \cap P \subseteq \Phi(P)$, то N p-нильпотентна.*

Лемма 11 [15, теорема A]. *Если A — 2-нильпотентная подгруппа группы G и $|G : A| = p^\alpha$, где p — нечетное простое число, то группа G разрешима.*

Лемма 12 [16, теорема 7.2.5]. *Если A и B — подгруппы группы G такие, что $G \neq AB$ и $AB^x = B^xA$ для всех $x \in G$, то подгруппа $A^B \cap B^A$ субнормальна в G.*

2. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 проведем индукцией по порядку группы. Если $|\pi(G) \setminus \pi| = 1$, то G является $D_{\pi'}$-группой по теореме Силова. Значит, $|\pi(G) \setminus \pi| \geq 2$. Проверим, что фактор-группа G/X с подгруппами AX/X, BX/X и единичной подгруппой X/X удовлетворяет требованиям теоремы. Ясно, что

$$(AX/X)(BX/X) = G/X$$

и AX/X — π-холлова подгруппа в G/X. Пусть P_1/X — силовская p-подгруппа из BX/X для $p \in \pi(G/X) \setminus \pi$, $p \neq q$. Понятно, что $p \in \pi(G) \setminus \pi$ и $P_1 = (P_1 \cap B)X$ по тождеству Дедекинда. Пусть P — силовская p-подгруппа из B, содержащая силовскую p-подгруппу из $P_1 \cap B$. Тогда по свойствам силовских подгрупп PX/X — силовская p-подгруппа в BX/X. Поскольку $P_1 = (P_1 \cap B)X \subseteq PX$, то $P_1/X = PX/X$, т. е. $P_1 = PX$. По условию теоремы подгруппы A и P X-перестановочны. По п. 2 леммы 1 подгруппы AX/X и PX/X перестановочны. Таким образом, фактор-группа G/X удовлетворяет условиям теоремы. Если $X \neq 1$, то $|G/X| < |G|$ и по индукции фактор-группа G/X является $C_{\pi'}$-группой в п. 1 доказываемой теоремы и $D_{\pi'}$-группой в п. 2. По лемме 2 группа G является $C_{\pi'}$-группой или $D_{\pi'}$-группой соответственно.

Пусть теперь $X = 1$. В этом случае подгруппа A перестановочна с любой силовской p-подгруппой P_1 из B для каждого $p \in \pi(G) \setminus \pi$, $p \neq q$. Зафиксируем силовскую p-подгруппу P в группе G. По теореме Силова $P = P_1^x$ для некоторого $x \in G$. Но $AP_1 = P_1A$ по условию. Так как $G = AB$, то $x = ba$, $b \in B$, $a \in A$, и

$$AP = AP_1^x = AP_1^{ba} = A\big(P_1^b\big)^a = \big(AP_1^b\big)^a = \big(P_1^bA\big)^a = P_1^{ba}A = PA.$$

Таким образом, в группе G подгруппа A перестановочна со всеми силовскими p-подгруппами группы G для каждого $p \in \pi(G) \setminus \pi$, $p \neq q$.

Поскольку $|\pi(G) \setminus \pi| \geq 2$, то $AG_p \neq G$ для каждого $p \in \pi(G) \setminus \pi$, $p \neq q$, и каждой силовской p-подгруппы G_p. Так как $AG_p^x = G_p^xA$ для каждого $x \in G$, по лемме 3 группа G непроста.

Пусть K — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $A \cap K = A_1$ является π-холловой подгруппой в K. Пусть P_1 — произвольная силовская p-подгруппа из K, $p \in \pi(K) \setminus \pi$, $p \neq q$. По теореме Силова $P_1 \subseteq P$ для некоторой силовской p-подгруппы P из G. Применим лемму 5 к подгруппам A, P и K. По этой лемме

$$K \cap AP = (K \cap A)(K \cap P) = A_1P_1$$

и подгруппа A_1 перестановочна со всеми силовскими p-подгруппами из K. По индукции подгруппа K будет $C_{\pi'}$-группой в п. 1 доказываемой теоремы или $D_{\pi'}$-группой в п. 2. Так как фактор-группа G/K также по индукции является $C_{\pi'}$-группой в п. 1 доказываемой теоремы или $D_{\pi'}$-группой в п. 2, по лемме 2 сама группа G является $C_{\pi'}$-группой или $D_{\pi'}$-группой соответственно. Теорема 1 доказана.

В случае, когда $B = G$ и $X = 1$, из теоремы 1 вытекает

Следствие 1.1. *Пусть A — собственная π-холлова подгруппа группы G. Зафиксируем простое число $q \in \pi(G) \setminus \pi$. Предположим, что для каждого $p \in \pi(G) \setminus \pi$, $p \neq q$, подгруппа A перестановочна с любой силовской p-подгруппой из G. Тогда G является $C_{\pi'}$-группой ($D_{\pi'}$-группой, если использовать классификацию конечных простых групп).*

Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AB_1 — собственная в G подгруппа для каждой собственной подгруппы B_1 из B. Ясно, что если подгруппа A является π-холловой полунормальной подгруппой, то выполняются требования теоремы 1. Поэтому из теоремы 1 вытекает

Следствие 1.2. *Пусть A — полунормальная π-холлова подгруппа группы G. Тогда G является $C_{\pi'}$-группой ($D_{\pi'}$-группой, если использовать классификацию конечных простых групп).*

Напомним, что через $S(G)$ обозначается наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G.

Следствие 1.3. *Пусть в группе G существуют 2-нильпотентная π-холлова подгруппа A нечетного индекса и подгруппа B такие, что $G = AB$. Зафиксируем простое число $q \in \pi(G) \setminus \pi$. Предположим, что для каждого $p \in \pi(G) \setminus \pi$, $p \neq q$, подгруппа A $S(G)$-перестановочна с любой силовской p-подгруппой из B. Тогда группа G разрешима.*

Доказательство. В силу теоремы 1 можно подгруппу B считать π'-холловой подгруппой группы G, а в силу леммы 11 — непримарной. Предположим, что $N = S(G) \neq 1$, и проверим, что фактор-группа G/N с подгруппами AN/N, BN/N и $S(G/N) = 1$ удовлетворяет условию теоремы. Ясно, что $(AN/N)(BN/N) = G/N$, AN/N — 2-нильпотентная π-холлова подгруппа нечетного индекса в G/N. Пусть X/N — произвольная силовская p-подгруппа из BN/N, $p \neq q$. Тогда $X = (X \cap B)N$ по тождеству Дедекинда и $X = PN$ для некоторой силовской p-подгруппы P из B. По условию теоремы подгруппы A и P N-перестановочны, а по лемме 1 подгруппы AN/N и $PN/N = X/N$ перестановочны. Теперь к фактор-группе G/N применима индукция, поэтому G/N разрешима. Отсюда следует, что G разрешима.

Пусть теперь $S(G) = 1$. В этом случае подгруппа A перестановочна с любой силовской p-подгруппой из B, $p \neq q$. По лемме 11 для любой силовской p-подгруппы P из B, $p \neq q$, произведение AP является разрешимой подгруппой. Поэтому следует считать, что AP — собственная подгруппа группы G. Если ba — произвольный элемент группы G, $b \in B$, $a \in A$, то

$$AP^{ba} = (AP^b)^a = (P^b A)^a = P^{ba} A,$$

и применима лемма 12. По этой лемме подгруппа $D = A^P \cap P^A$ субнормальна в G. Подгруппа D разрешима, поскольку $D \subseteq A^P \subseteq AP$. По утверждению 7.7.1 из [2] подгруппа D^G является разрешимой нормальной в G, поэтому $1 = D = A^P \cap P^A$ и

$$[A, P] \subseteq [A^P, P^A] \subseteq A^P \cap P^A = 1.$$

Значит, подгруппа A централизует каждую силовскую p-подгруппу из B, $p \neq q$, стало быть, подгруппа $AB_{q'} = A \times B_{q'}$ — 2-нильпотентная подгруппа и $|G : AB_{q'}| = q^{\beta}$. По лемме 11 группа G разрешима. Следствие доказано.

3. Доказательство теоремы 2

1. Без ущерба для доказательства можно считать, что B является минимальной подгруппой, для которой $G = AB$. Вначале проверим, что фактор-группа G/X с подгруппами AX/X, BX/X и единичной подгруппой X/X удовлетворяет требованиям теоремы. Ясно, что

$$(AX/X)(BX/X) = G/X$$

и AX/X — π-холлова подгруппа в G/X. Пусть S_1/X — p-замкнутая pd-подгруппа Шмидта из BX/X, $p \in \pi(AX/X)$. Тогда $S_1 = (S_1 \cap B)X$ и по лемме 6 существует минимальное добавление $L \leq S_1 \cap B$ к подгруппе X в группе S_1 такое, что L содержит p-замкнутую pd-подгруппу Шмидта S и $S^L = L$. По условию подгруппа A X-перестановочна с подгруппой S^l для каждого $l \in L$, а по лемме 1 подгруппа AX/X перестановочна с подгруппой $S^l X/X$. По лемме 7 подгруппа AX/X перестановочна с подгруппой $\langle S^l X/X \mid l \in L\rangle$, порожденной подгруппами $S^l X/X$ для всех $l \in L$. Поскольку

$$\langle S^l X/X \mid l \in L\rangle = LX/X = S_1/X,$$

AX/X перестановочна со всеми p-замкнутыми pd-подгруппами Шмидта из BX/X для всех $p \in \pi(AX/X)$.

Таким образом, фактор-группа G/X удовлетворяет условиям теоремы. Если $X \neq 1$, то $|G/X| < |G|$ и по индукции фактор-группа G/X является $E_{\pi'}$-группой. По лемме 2 группа G является $E_{\pi'}$-группой.

Итак, в дальнейшем считаем, что $X = 1$. В этом случае подгруппа A будет $S_{\langle p,q\rangle}$-полунормальной подгруппой для всех $p \in \pi$.

Если $A \cap B = 1$, то из равенства $|G| = |A||B|$ следует, что B — π'-холлова подгруппа в G. Поэтому будем считать, что $D = A \cap B \neq 1$. Зафиксируем простое число $p \in \pi(D) \subseteq \pi$. Если подгруппа B p-нильпотентна, то $G = AB_1$, где B_1 — p'-холлова подгруппа из B; противоречие с минимальностью B. Поэтому B не p-нильпотентна и по лемме 8 в ней существует $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа $S = [P]Q$ для некоторого простого q. По условию подгруппа A перестановочна с S. По утверждению 2 леммы 9 подгруппа A перестановочна с S^g для любого $g \in G$, а по лемме 4 $A \cap S^g$ π-холлова в S^g. Так как S^g — группа Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой P^g, $p \in \pi$, то $P^g \subseteq A \cap S^g$ и $N = P^G \subseteq A$. Теперь N — π-подгруппа группы G.

Рассмотрим фактор-группу G/N. Подгруппа A/N является π-холловой подгруппой, и $G/N = (A/N)(BN/N)$. Из утверждения 5 леммы 9 следует, что подгруппа A/N перестановочна со всеми $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппами из BN/N для каждого $p \in \pi$. Поэтому к фактор-группе G/N применима индукция. По индукции в G/N существует π'-холлова подгруппа H/N. Так как $(|N|, |H/N|) = 1$, по теореме Шура — Цассенхауза [3, теорема 4.32] в подгруппе H имеется π'-холлова подгруппа B_1. По лемме об индексах

$$|G : B_1| = |G : B||B : B_1|,$$

поэтому $|G : B_1|$ — π-число. Следовательно, B_1 — π'-холлова подгруппа группы G и G является $E_{\pi'}$-группой. Утверждение 1 теоремы 2 доказано.

2. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Без ущерба для доказательства можно считать, что B является минимальной подгруппой, для которой $G = AB$. Вначале проверим, что фактор-группа G/X с подгруппами AX/X, BX/X и единичной подгруппой X/X удовлетворяет требованиям теоремы. Ясно, что

$$(AX/X)(BX/X) = G/X$$

и AX/X — нильпотентная π-холлова подгруппа в G/X. Пусть S_1/X — подгруппа Шмидта из BX/X. Тогда $S_1 = (S_1 \cap B)X$ и по лемме 6 существует минимальное добавление $L \leq S_1 \cap B$ к подгруппе X в группе S_1 такое, что L содержит подгруппу Шмидта S и $S^L = L$. По условию подгруппа A X-перестановочна с подгруппой S^l для каждого $l \in L$, а по лемме 1 подгруппа AX/X перестановочна с подгруппой S^lX/X. По лемме 7 подгруппа AX/X перестановочна с подгруппой $\langle S^lX/X \mid l \in L\rangle$, порожденной подгруппами S^lX/X для всех $l \in L$. Поскольку

$$\langle S^lX/X \mid l \in L\rangle = LX/X = S_1/X,$$

то AX/X перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из BX/X.

Таким образом, фактор-группа G/X удовлетворяет условиям теоремы. Если $X \neq 1$, то $|G/X| < |G|$ и по индукции фактор-группа G/X является $C_{\pi'}$-группой. По лемме 2 группа G будет $C_{\pi'}$-группой.

Итак, в дальнейшем считаем, что $X = 1$. В этом случае подгруппа A будет $S_{\langle p,q\rangle}$-полунормальной подгруппой для всех $p \in \pi(B)$.

Предположим, что G — непростая группа, и пусть N — нетривиальная нормальная подгруппа группы G. Если B нильпотентна, то G разрешима по теореме Виландта — Кегеля и G — $C_{\pi'}$-группа. Пусть B ненильпотентна. Согласно лемме 5 $N = (N \cap A)(N \cap B)$. Если $N \cap A = 1$, то $N \subseteq B$ и N —

π'-подгруппа, значит, N — $C_{\pi'}$-группа. Если $N \cap B = 1$, то $N \subseteq A$ и N — π-подгруппа, поэтому $N_{\pi'} = 1$ и N — $C_{\pi'}$-группа.

Предположим, что $N \cap A \neq 1 \neq N \cap B$, и проверим, что подгруппа N удовлетворяет условиям теоремы. По лемме 4 $N \cap A$ нильпотентна и π-холлова в N. Если $N \cap B$ нильпотентна, то N разрешима и N — $C_{\pi'}$-группа. Если подгруппа $N \cap B$ ненильпотентна, то $N \cap B$ содержит подгруппу Шмидта S. Проверим равенство $(N \cap A)S = NS \cap AS$. Если $a \in N \cap A$, $b \in S$, то $ab \in NS$ и $ab \in AS$. Значит, $ab \in NS \cap AS$ и $(N \cap A)S \subseteq NS \cap AS$. Обратно, пусть $ks \in NS \cap AS$, где $k \in N$, $k \in A$, $s \in S$. Тогда $k \in N \cap A$, $ks \in (N \cap A)S$ и верно включение $NS \cap AS \subseteq (N \cap A)S$. Аналогично доказывается равенство $SN \cap SA = S(N \cap A)$. Таким образом,

$$(N \cap A)S = NS \cap AS = SN \cap SA = S(N \cap A).$$

Значит, условия теоремы наследуются нормальными подгруппами группы G. По индукции N — $C_{\pi'}$-группа.

Рассмотрим фактор-группу G/N. Ясно, что

$$G/N = (AN/N)(BN/N)$$

и AN/N — нильпотентная π-холлова подгруппа в G/N. Если BN/N нильпотентна, то G/N разрешима и G/N — $C_{\pi'}$-группа. Пусть BN/N ненильпотентна и S_1/N — подгруппа Шмидта из BN/N. Тогда $S_1 \subseteq BN$ и $S_1 = (S_1 \cap B)N$. Пусть L — минимальное добавление к подгруппе N в A такое, что $L \subseteq S_1 \cap B$. Тогда по лемме 6 L содержит подгруппу Шмидта $[P]Q$ такую, что $L = ([P]Q)^L$. Так как $L \subseteq B$, то $([P]Q)^l \subseteq B$ для всех $l \in L$, а по условию теоремы подгруппа A перестановочна с $([P]Q)^l$ для всех $l \in L$. По лемме 7 подгруппа A перестановочна с $([P]Q)^L = L$. Из равенства $S_1 = LN$ следует, что подгруппа A перестановочна с подгруппой S_1. Значит, нильпотентная π-холлова подгруппа AN/N перестановочна с подгруппой Шмидта S_1/N. Следовательно, условия теоремы наследуются фактор-группами G/N. По индукции G/N — $C_{\pi'}$-группа. Теперь по лемме 2 G — $C_{\pi'}$-группа.

Остался случай, когда G — простая группа. Так как B ненильпотентна, в ней существует подгруппа Шмидта S. По условию теоремы $AS = SA$. По утверждению 2 леммы 9 подгруппа A перестановочна с подгруппами S^x для всех $x \in G$. Если $AS \neq G$, то по лемме 3 либо $A^G \neq G$, либо $S^G \neq G$. Получили противоречие с простотой G. Значит, $AS = G$, и простая группа G является произведением нильпотентной подгруппы A и подгруппы Шмидта S. Тогда по теореме 2.8 из [17] группа G изоморфна одной из групп: $PSL(2,5)$, $PSL(2,7)$, $SL(2,2^n)$, $2^n - 1$ и n — простые числа. Факторизации этих групп известны (см. теорему 0.7 в [17]), в результате приходим к следующим утверждениям:

$G \simeq PSL(2,5)$, $A \simeq Z_5, B \simeq A_4$;

$G \simeq PSL(2,7)$, $A \simeq D_8, B \simeq [Z_7]Z_3$;

$G \simeq SL(2,2^n)$, $n \geq 3$, $2^n - 1$ и n — простые числа, $A \simeq Z_{2^n+1}, B \simeq [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$.

В первом случае $\pi = \{5\}$, $\pi' \cap \pi(G) = \{2,3\}$. Во втором случае $\pi = \{2\}$, $\pi' \cap \pi(G) = \{3,7\}$. В третьем случае $\pi = \pi(2^n+1)$, $\pi' \cap \pi(G) = \{2\} \cup \pi(2^n - 1)$. Для каждого случая G является $C_{\pi'}$. Утверждение 2 теоремы 2 доказано.

3. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Если подгруппа A нильпотентна, то по теореме III.5.6 из [4] G — D_π-группа. Пусть A ненильпотентна. Вначале проверим, что фактор-группа G/X с подгруппой AX/X и

единичной подгруппой X/X удовлетворяет требованиям теоремы. Ясно, что AX/X — π-холлова подгруппа в G/X. Пусть S_1/X — π-подгруппа Шмидта в G/X. Тогда по лемме 6 существует минимальное добавление $L \leq S_1$ к подгруппе X в группе S_1 такое, что L содержит π-подгруппу Шмидта S и $S^L = L$. По условию подгруппа A X-перестановочна с подгруппой S^l для каждого $l \in L$, а по лемме 1 подгруппа AX/X перестановочна с подгруппой S^lX/X. По лемме 7 подгруппа AX/X перестановочна с подгруппой $\langle S^lX/X \mid l \in L\rangle$, порожденной подгруппами S^lX/X для всех $l \in L$. Поскольку

$$\langle S^lX/X \mid l \in L\rangle = LX/X = S_1/X,$$

то AX/X перестановочна со всеми π-подгруппами Шмидта из G/X. Таким образом, фактор-группа G/X удовлетворяет условиям теоремы. Если $X \neq 1$, то $|G/X| < |G|$ и по индукции фактор-группа G/X является D_π-группой (C_π-группой). По лемме 2 группа G является D_π-группой (C_π-группой соответственно).

Итак, в дальнейшем считаем. что $X = 1$. В этом случае подгруппа A перестановочна со всеми π-подгруппами Шмидта из G.

Пусть A ненильпотентна и S — подгруппа Шмидта из A. Если существует $x \in G$ такой, что S^x не содержится в A, то AS^x — подгруппа группы G по условию. Так как A — π-холлова, то $AS^x = A$ и $S^G = \langle S^x \mid x \in G\rangle \subseteq A$. Поэтому $A_G = \bigcap_{g \in G} A^g$ содержит все подгруппы Шмидта из A. Предположим, что A/A_G ненильпотентна, и пусть T/A_G — подгруппа Шмидта из A/A_G. По лемме 6 минимальное добавление к подгруппе A_G в T содержит подгруппу Шмидта, которая не содержится в A_G; противоречие. Значит, в A/A_G нет подгрупп Шмидта, поэтому A/A_G нильпотентна. По теореме III.5.6 из [4] G/A_G — D_π-группа, а по лемме 2 G является D_π-группой. Теорема доказана.

При $X = 1$ из теоремы 2 вытекает

Следствие 2.1. *Пусть в группе G существует π-холлова подгруппа A, и пусть B — подгруппа такая, что $G = AB$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если A перестановочна со всеми p-замкнутыми pd-подгруппами Шмидта из B для всех $p \in \pi$, то G является $E_{\pi'}$-группой.*
2. *Если A нильпотентна и перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B, то G является $C_{\pi'}$-группой.*
3. *Если A перестановочна со всеми π-подгруппами Шмидта из G, то G является D_π-группой.*

Отметим, что в такой формулировке утверждение 3 не использует классификацию конечных простых групп. На заключительном этапе доказательства надо вместо леммы 2 использовать следующий результат С. А. Чунихина: *расширение π-группы с помощью D_π-группы является D_π-группой* [1] (см. также [18, теорема 2*]).

Пример 1. Группа $PSL(2, 11) = ([Z_{11}Z_5])A_4$ с $\{5, 11\}$-холловой подгруппой $A = [Z_{11}]Z_5$ и подгруппой $B = A_4$ удовлетворяет условию 1 теоремы 2, но не является $C_{\{5,11\}'}$-группой. Знакопеременная группа $A_5 = Z_5A_4$ с $\{5\}$-холловой подгруппой $A = Z_5$ и подгруппой $B = A_4$ удовлетворяет условию 2 теоремы 2, но не является $D_{\{5\}'}$-группой.

Эти примеры указывают на то, что в п. 1 теоремы 2 группа G может быть не $C_{\pi'}$-группой, а в п. 2 — не $D_{\pi'}$-группой. Но если $2 \in \pi$, то по теореме Гросса [19] группа G в п. 1 теоремы 2 будет $C_{\pi'}$-группой.

4. Доказательство теоремы 3

Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Ясно, что $X \subseteq O_{p'}(G)$. Предположим, что $K = O_{p'}(G) \neq 1$. В фактор-группе G/K подгруппа AK/K является p'-подгруппой и $G/K = (AK/K)(BK/K)$. Пусть M/K — максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы T/K из подгруппы BK/K. Ясно, что $T = PK$ для некоторой силовской p-подгруппы P из B. Тогда $M = (P \cap M)K = M_pK$, где M_p — силовская p-подгруппа из M, содержащаяся в $P \cap M$. Несложные вычисления показывают, что $|P : M_p| = p$, т. е. M_p — максимальная подгруппа в P. По условию теоремы подгруппы A и M_p X-перестановочны. Отсюда следует, что подгруппы AK/K и M/K перестановочны. Тем самым доказано, что условия теоремы наследуются фактор-группой G/K и ее p'-подгруппой AK/K. По индукции $AK/K \subseteq O_{p'}(G/K)$. Но $O_{p'}(G/K) = O_{p'}(G)/K$, поскольку K — p'-подгруппа. Поэтому $A \subseteq O_{p'}(G)$ и теорема справедлива.

Тем самым следует считать, что $O_{p'}(G) = 1$ и $X = 1$. В силу теоремы IV.2.8 из [4] силовская p-подгруппа из G нециклическая. Зафиксируем силовскую p-подгруппу P из B и все ее максимальные подгруппы $P_1, \ldots, P_n$. По теореме III.8.3 из [4] $n \geq 2$. По условию теоремы AP_i — подгруппа группы G. По лемме 7 подгруппа A перестановочна с $\langle P_1, P_2 \rangle = P$, т. е. AP также подгруппа в группе G. Теперь $|AP : AP_i| = p$ и AP_i — нормальная в AP подгруппа для каждого $i = 1, \ldots, n$. Поэтому подгруппа $D = \bigcap_{i=1}^{n} (AP_i)$ нормальна в AP и $D \cap P = P_0$ — силовская p-подгруппа в D. Ясно, что

$$\Phi(P) = \bigcap_{i=1}^{n} (P_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (AP_i) \cap P,$$

стало быть, $\Phi(P) \subseteq P_0$. Применяя лемму 5 к подгруппам A, P_1, P_2 в группе AP, получаем, что

$$P_1 \cap AP_2 = (P_1 \cap A)(P_1 \cap P_2) = P_1 \cap P_2.$$

Поэтому

$$AP_1 \cap AP_2 = A(P_1 \cap AP_2) = A(P_1 \cap P_2).$$

Отсюда следует, что

$$D = \bigcap_{i=1}^{n} (AP_i) = A \left(\bigcap_{i=1}^{n} (P_i) \right) = A\Phi(P),$$

т. е. $\Phi(P) = P_0$ — силовская p-подгруппа в D. По лемме 10 подгруппа D p-нильпотентна, т. е. подгруппа A нормальна в D. Так как A p'-холлова в AP, $A \subseteq D \subseteq AP$ и D нормальна в AP, то A нормальна в AP и $P \subseteq N_G(A)$. Но P — произвольная силовская p-подгруппа из B, поэтому

$$P^B = \langle P^b \mid b \in B \rangle \subseteq N_G(A).$$

Если теперь $x = ba$ — произвольный элемент из группы G, $b \in B$, $a \in A$, то

$$P^x = (P^b)^a \subseteq N_G(A)^a = N_G(A),$$

т. е. $P^G \subseteq N_G(A)$. Если $N_G(A) = G$, то теорема справедлива. Значит, следует считать, что $N_G(A) \neq G$, а P^G — собственная нормальная подгруппа группы G, причем

$$[P^G, A] \subseteq P^G \cap A \subseteq O_{p'}(P^G) = 1.$$

В частности, $P^G A = P^G \times A$. Если $C = C_G(P^G) \neq 1$, то к C применима индукция. Действительно, $A \subseteq C$, а по тождеству Дедекинда $C = A(C \cap B)$. Так как подгруппа A централизует P^G, то A перестановочна с любой максимальной подгруппой из каждой силовской p-подгруппы из $C \cap B$. По индукции $A \subseteq O_{p'}(C) \subseteq O_{p'}(G) = 1$.

Значит, следует считать, что $C = G$. Но в этом случае P^G содержится в центре группы G, поэтому группа G p-нильпотентна. Теорема 3 доказана.

При $B = G$ получаем

Следствие 3.1. *Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы G и A — p'-подгруппа из G. Если A перестановочна с любой максимальной подгруппой из каждой силовской p-подгруппы группы G, то $A \subseteq O_{p'}(G)$.*

Следствие 3.2. *Пусть в группе G существует π-холлова подгруппа A нечетного порядка. Если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и подгруппа A перестановочна с любой максимальной подгруппой из каждой силовской 2-подгруппы из B, то группа G π-разрешима.*

Доказательство. Зафиксируем силовскую 2-подгруппу P в группе G. Пусть P_1 — силовская 2-подгруппа из B. Ясно, что P_1 является силовской в G, поэтому $P = P_1^x$ для некоторого $x \in G$. Но $AM_1 = M_1A$ для каждой максимальной подгруппы M_1 из P_1 по условию. Так как $G = AB$, то $x = ba$, $b \in B$, $a \in A$, и

$$AM_1^x = AM_1^{ba} = A\big(M_1^b\big)^a = \big(AM_1^b\big)^a = \big(M_1^bA\big)^a = M_1^{ba}A = M_1^xA.$$

Если подгруппа M_1 пробегает все максимальные подгруппы из P_1, то M_1^x исчерпает все максимальные подгруппы из P. Таким образом, в группе G подгруппа A перестановочна со всеми силовскими максимальными подгруппами из силовской подгруппы P. Так как P — произвольная силовская 2-подгруппа группы G, выполняются условия теоремы 3. Поэтому группа G π-разрешима. Следствие доказано.

Пример 2. Рассмотрим группу $G = ([Z_7]Z_3) \times G_2$, $A = Z_3$. Подгруппа A удовлетворяет условию теоремы 3 для $p = 2$, и $B = Z_7 \times G_2$. Ясно, что $A \subseteq O(G)$, но A не содержится в $O_3(G) = 1$. Следовательно, в условиях теоремы утверждение «A^G — $\pi(A)$-подгруппа» доказать нельзя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп. Мн.: Наука и техника, 1964.
2. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
3. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Мн.: Вышэйшая школа, 2006.
4. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
5. *Тютянов В. Н.* О теоремах типа Силова для конечных групп // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52, № 10. С. 1426–1430.
6. *Foguel T.* On seminormal subgroups // J. Algebra. 1994. V. 165. P. 633–635.
7. *Guo Wenbin, Shum K. P., Skiba Alexander N.* X-semipermutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 31–41.

8. *Guo Wenbin, Shum K. P., Skiba A. N.* Schur–Zassenhaus theorem for X-permutable subgroups // Algebra Colloq. 2008. V. 15, N 2. P. 185–192.
9. *Монахов В. С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Тр. Укр. мат. конгресса. Киев: Ин-т математики, 2002. С. 81–90.
10. *Монахов В. С.* О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Мат. заметки. 1995. Т. 58, № 5. С. 717–722.
11. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.
12. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 4. С. 448–458.
13. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Hall subgroups of finite groups // Contemp. Math. 2006. V. 402. P. 229–265.
14. *Suzuki M.* Group theory. II. New York; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verl., 1986.
15. *Carocca A., Matos H.* Some solvability criteria for finite groups // Hokkaido Math. J. 1997. V. 26, N 1. P. 157–161.
16. *Lennox J. C., Stonehewer S. E.* Subnormal subgroups of groups. Oxford: Clarendon Press, 1987.
17. *Монахов В. С.* Произведение конечных групп, близких к нильпотентным // Конечные группы. Мн.: Наука и техника, 1975. С. 70–100.
18. *Шеметков Л. А.* Обобщения теоремы Силова // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1425–1431.
19. *Gross F.* Gonjugacy of odd order Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. 1987. V. 19. P. 311–319.

Статья поступила 17 декабря 2009 г.

Княгина Виктория Николаевна
Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь,
ул. Речицкое шоссе, 35-А, Гомель 246023, Беларусь
knyagina@inbox.ru

Монахов Виктор Степанович
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
monakhov@gsu.by